

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI
ANNO CCCXXXIII
1936 (XIV)

SERIE SESTA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV



ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGRAFO DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1936 (XIV)

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1936 (Anno XIV)

(Ogni Memoria e Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo)

Matematica (Geometria algebrica). — *Dimostrazione del teorema fondamentale sulle superficie iperellittiche.* Nota⁽¹⁾ del Corrisp. M. DE FRANCHIS.

Nella nostra Memoria sulle superficie iperellittiche⁽²⁾, io e Bagnera dimostrammo il teorema fondamentale, che le superficie iperellittiche di rango maggior d'uno, se non sono birazionalmente equivalenti a rigate (razionali o ellittiche), sono immagini di involuzioni, generate da un gruppo finito di trasformazioni birazionali, di una superficie iperellittica di rango uno in sè, con la restrizione che una tale involuzione non possedesse punti uniti coniugati a curve fondamentali (restrizione che però non aveva peso, come facemmo osservare nella Memoria, per le involuzioni irregolari).

Non ci fermammo molto su questa restrizione, perchè lo stesso teorema, in tutta la sua generalità, senza cioè la restrizione, era stato dimostrato da Enriques e Severi⁽³⁾; ritenemmo quindi più opportuno affrontare il problema della classificazione completa dei sopradetti gruppi e delle corrispondenti superficie.

(1) Pervenuta all'Accademia il 24 giugno 1936.

(2) G. BAGNERA e M. DE FRANCHIS, *Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche di due argomenti* («Memorie della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL», ser. 3^a, to. XV, 1908, pp. 251-343), nn. 4 e 5.

(3) F. ENRIQUES et F. SEVERI, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* («Acta Mathematica», to. 32, 1909, pp. 283-392 e to. 33, 1910, pp. 321-403).

Recentemente, in occasione di un corso di lezioni, sono stato portato a riesaminare il nostro ordine di idee, e mi sono accorto che la restrizione può agevolmente togliersi, pur rimanendo nel quadro della nostra semplissima dimostrazione del teorema.

Questa dimostrazione, dopo aver fatto vedere che si può togliere la restrizione, voglio dunque riesporre, anche per ripresentare il nostro procedimento, che forse non da tutti è stato convenientemente apprezzato.

1. Sia $F(X, Y, Z) = 0$ l'equazione di una *superficie iperellittica*, cioè di una superficie tale che la suddetta equazione equivalga alle tre equazioni parametriche: $X = X(u, v)$, $Y = Y(u, v)$, $Z = Z(u, v)$ ove le funzioni che sono a secondo membro sono *funzioni iperellittiche* di u, v , cioè funzioni meromorfe quadruplicamente periodiche di u, v . La matrice jacobiana di queste funzioni ha la caratteristica 2 nel punto generico u, v .

Sia:

$$\Omega = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \omega'_1 & \omega'_2 & \omega'_3 & \omega'_4 \end{vmatrix}$$

una tabella di periodi *primitivi* delle funzioni anzidette. Ciò significa che se $u' = u + c, v' = v + d$ è una sostituzione che fa riprendere a queste funzioni lo stesso valore, le coppie di numeri c, d (intese come formanti una matrice di due righe e di una colonna) è una combinazione lineare a coefficienti interi delle colonne della suddetta tabella e, viceversa, dando a c, d valori formanti una qualunque delle colonne della tabella, le funzioni rimangono inalterate. Consideriamo nello spazio a quattro dimensioni ove si rappresentano le coppie di numeri complessi finiti u, v , un *parallelotopo di periodi*, cioè l'insieme dei punti che rappresentano coppie del tipo:

$$u = u_0 + x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2 + x_3 \omega_3 + x_4 \omega_4$$
$$v = v_0 + x_1 \omega'_1 + x_2 \omega'_2 + x_3 \omega'_3 + x_4 \omega'_4$$

ove u_0, v_0 sono due costanti e le x_i sono variabili reali tali che $0 \leq x_i < 1$. Allora il punto generico della superficie F da noi considerata proviene da un certo numero r di punti u, v del parallelotopo e la F è una *superficie iperellittica di rango r*. Se r supera 1, la superficie F è immagine di una involuzione I_r di ordine r appartenente ad una superficie di rango 1.

2. Ora è scopo nostro stabilire il seguente lemma:

Se la superficie F , immagine dell'involuzione I_r , non è birazionalmente trasformabile in rigata (razionale od ellittica), l'involuzione I_r sulla superficie di rango 1 relativa alla tabella Ω non possiede curve fondamentali.

In altri termini:

Se la superficie F, iperellittica di rango r, non è equivalente ad una rigata, sulla corrispondente superficie f di rango 1, non può esistere una curva corrispondente ad un solo punto di F.

Se, infatti, la F non è trasformabile in rigata, qualcuno dei suoi plurigeneri, P_n , è diverso da zero. Ora ad una curva (virtuale) pluricanonica di F corrisponde una curva pluricanonica (virtuale) sulla superficie f, di rango 1, sostegno dell'involuzione I_r , di cui F è immagine; ma su f l'unica curva (virtuale) n-canonica è la curva nulla (virtuale) del coefficiente (costante) dell'espressione differenziale $(du dv)^n$. Il passaggio dall'intorno di un punto u, v di f all'intorno di un suo coniugato nell'involuzione I_r deve lasciare invariata l'espressione. Se denotiamo con u', v' i parametri del punto coniugato considerato, deve dunque essere uguale ad una radice *n*-esima dell'unità l'jacobiano di u, v rispetto ad u', v' , il che esclude la possibilità di curve fondamentali.

3. Riesponiamo ora, modificata nella forma ma non nella sostanza, la dimostrazione del teorema fondamentale:

Se la superficie F, immagine dell'involuzione I_r della superficie f iperellittica di rango 1, relativa alla stessa tabella di periodi primitivi, non è equivalente a rigate, la involuzione è generata da un gruppo, di ordine r, di trasformazioni birazionali di f in sè.

Infatti, poichè l'involuzione I_r è priva, come abbiamo dimostrato al numero precedente, oltre che di curve unite, di curve fondamentali, sulla varietà riemanniana di f ogni ciclo lineare omologo a zero non può cambiare in un altro uno dei punti coniugati del punto generico u, v . Un tale scambio potrebbe dunque avvenire solo percorrendo combinazioni lineari dei quattro cicli fondamentali (che cambiano u, v in $u + \omega_i, v + \omega'_i$, ove $i = 1, 2, 3, 4$). Ma se percorrendo qualcuno dei quattro cicli suddetti il coniugato di un punto generico u, v si scambiasse con un altro, poichè r è un numero intero finito, esisterebbe un intero n tale che, percorrendo n volte i quattro cicli, tutti i coniugati di u, v tornerebbero in sè. Se ci costruiamo la superficie di rango 1, f' , avente per tabella quella ottenuta da Ω moltiplicandone gli elementi per n , la F sarebbe immagine di una involuzione di ordine rn^4 di f' tale che le coordinate di ogni punto di f' sono funzioni (algebriche uniformi e quindi) razionali di uno qualunque dei coniugati; la involuzione è dunque generata da un gruppo di rn^4 trasformazioni birazionali di f' in sè e quindi tra i parametri u, v di un punto e quelli u', v' di un coniugato passano relazioni lineari, insomma l'involuzione è generata da un gruppo G di trasformazioni lineari sui parametri u, v . Tra queste ci sarebbero trasformazioni del tipo $u' = u + c, v' = v + d$. Ma l'insieme di esse è un sottogruppo invariante d'indice finito (n^4) del gruppo delle trasformazioni suddette; se torniamo alla superficie f (che

rappresenta i gruppi di punti generati su f' dal suddetto sottogruppo) il gruppo complementare del gruppo G rispetto al suddetto sottogruppo rappresenta su f un gruppo di r trasformazioni birazionali che generano appunto l'involtuzione I_r .

Il teorema fondamentale è così dimostrato.

In una Memoria che verrà pubblicata altrove, riesporrò con le semplificazioni opportune, per dare risalto ai nostri metodi, le nostre ricerche e qualche loro estensione.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Geometria proiettiva differenziale). — *Una proprietà del 2º spigolo di Green.* Nota⁽¹⁾ di G. MARLETTA, presentata dal Socio G. FUBINI.

Sia φ una superficie non rigata dello spazio ordinario, e sia P un suo punto generico; indicheremo con π il piano tangente φ in P.

Scopo di questa Nota è rispondere alla seguente domanda: quali rette o punti si possono singolarmente individuare, con costruzioni invarianti per omografie, facendo uso soltanto dell'intorno di 4º ordine che il punto P ha sulla superficie φ , intorno preso soltanto nel piano tangente π ?

Questo problema non sembra privo d'interesse, perché una volta individuato un siffatto ente, poi, mediante, p. es., il fascio di Darboux, verrebbe individuata una retta o un piano della stella (P), e in questo avremmo tre (e quindi infinite) rette ciascuna alla sua volta proiettivamente individuata⁽²⁾. E tanto maggiormente queste domande sono giustificate, quanto più si pensa che esistono varie coniche ciascuna individuata come sopra si è detto, e il punto P ha, rispetto ad ognuna di esse, la sua retta polare; e lo stesso dicasi dei vari triangoli ognuno analogamente individuato, perché anche rispetto a ciascuno di essi P ha la sua retta polare; ciò a non parlare di altre costruzioni con le quali si può individuare, sempre proiettivamente, qualche punto del piano π ⁽³⁾.

Ebbene a queste domande risponderemo, in questa Nota, dimostrando che con costruzioni invarianti per omografie e facendo uso soltanto dell'intorno di 4º ordine di P in φ , intorno preso soltanto in π , è il 2º spigolo

(1) Pervenuta all'Accademia il 2 luglio 1936.

(2) P. es., seguendo il procedimento geometrico delle mie Note: *Riflessioni di Geometria proiettiva differenziale*. [«Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», vol. XXI, ser. 6º], e *Osservazioni di...* [Ivi, vol. XXII], e anche *Un'osservazione di Geometria proiettiva differenziale*. [«Bollettino dell'Accademia Gioenia», Catania, ser. III, fasc. 2º].

(3) Cfr., p. es., il punto, di Ceva, di cui si parla nel n. 12.

di Green l'unica retta individuata⁽¹⁾; in quanto a punti, oltre di P, non se ne può individuare alcuno. Insomma: il sopradetto intorno ci ha dato nel 2° spigolo di Green e nello stesso punto P, tutte le rette e tutti i punti che, da solo, poteva singolarmente e proiettivamente individuare.

1. Se è f' la curva sezione di φ col piano π , e sono a e b le sue tangenti in P, indicheremo con (ψ) il fascio delle coniche a contatto 4-punto in P col ramo toccato da a , e con (ψ') quello delle coniche a contatto 4-punto in P col ramo toccato da b ; ne segue che a e b , ciascuna contata due volte, sono coniche rispettivamente dei fasci (ψ) e (ψ') .

Due coniche, una di (ψ) e una di (ψ') , hanno tre punti comuni, oltre di P; questi tre punti generano, al variare delle due coniche, una involuzione piana I che è dunque un covariante di φ per omografie dello spazio di questa superficie.

2. Siano A e B i poli delle rette a e b rispetto alle coniche di (ψ') e di (ψ) ; quindi il punto A è in b , e il punto B è in a .

Cominciamo ad osservare che la retta $p \equiv AB$ è l'unica retta nella quale i due fasci (ψ) e (ψ') secano una stessa involuzione: la $I' \equiv AB$.

Infatti la conica di (ψ') passante per B risulta tangente alla retta p in B, e la conica di (ψ) passante per A tocca in A questa stessa retta.

Che poi non possa esistere un'altra retta siffatta, segue dall'osservare che essa dovrebbe toccare le due coniche, di (ψ) e (ψ') , passanti per i punti in cui essa è secata dalle rette b ed a , in questi stessi punti, onde questi punti coincidono con A e B rispettivamente.

3. Se dunque rammentiamo che la retta $p \equiv AB$ è⁽²⁾ il 2° spigolo di Green, possiamo enunciare in quest'altro modo il teorema del numero precedente:

Il 2° spigolo di Green è l'unica retta che fa parte della sua curva coniugata nell'involuzione piana I.

4. Chiamando omologhe una conica di (ψ) e una conica di (ψ') quando secano la retta p negli stessi (n. 3) due punti, si ottiene tra gli elementi di questi due fasci una proiettività; ne segue che la curva coniugata di p nell'involuzione piana I, si compone di questa stessa retta e di una cubica c contata due volte, cubica avente il punto P come doppio, e in questo con

(1) È questa la proprietà alla quale si allude nel titolo di questa Nota. Per i più interessanti enti proiettivi relativi al punto P, cfr. G. FUBINI-E. ČECH, *Introduction à la Géometrie Projective Différentielle des surfaces*. [Gauthier-Villars, Paris, 1931].

(2) G. PALOZZI, *Alcuni risultati di geometria proiettivo-differenziale*. [«Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», vol. XV, ser. 6^a].

le rette a e b per tangenti; anzi la cubica c è a contatto 4-punto, in P , con i due rami con i quali la curva f' (n. 1) passa per P ⁽¹⁾.

5. I tre punti D, E, F nei quali la retta p seca la cubica c (n. 4), sono uniti per l'involuzione piana I , perchè in ciascuno di essi si toccano le due coniche, omologhe nella sopradetta proiettività (n. 4), passanti per esso; indicheremo con d, e, f le tangenti, a queste coppie di coniche, rispettivamente nei punti D, E, F .

6. Che effettivamente la cubica avente P come doppio e a contatto 4-punto con ciascuno dei due rami con i quali la curva f' (n. 1) passa per P , sia, insieme con la retta p (n. 3), la coniugata nell'involuzione I di questa stessa retta, possiamo dimostrarlo direttamente nel seguente modo.

Chiamando corrispondenti due suoi punti ogni qual volta stiano, rispettivamente, in una conica di (ψ) e in una conica di (ψ') omologhe nella proiettività stabilita nel n. 4, si ottiene tra i punti della detta cubica una proiettività avente come uniti i tre punti, di questa cubica, esistenti nella retta p , cioè si ottiene la identità.

7. Indicheremo con $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, le tre omologie armoniche aventi le rette a e b (n. 1) come omologhe, e rispettivamente i punti D, E, F (n. 4) come centri; i loro assi passano dunque per il punto $P \equiv ab$ e, rispettivamente, per i coniugati di D, E, F nell'involuzione I' (n. 2).

Ciascuna di queste tre omologie armoniche trasforma i fasci (ψ) e (ψ') l'uno nell'altro; e invero essa, intanto, trasforma tra loro le rette a e b , e quindi se ψ_i è la conica del fascio (ψ) passante, p. es., per D , la sua trasformata ψ''_i , in virtù dell'omologia ω_i , sarà una conica: tangente alla retta b in P , passante per la coppia contenente D dell'involuzione I' (n. 2), e tangente in questo punto alla ψ_i . Ne segue (n. 5) senz'altro che ψ''_i coincide con la conica ψ'_i , del fascio (ψ') , passante per D .

8. Di conseguenza se una retta è individuata dal punto P , individuata nel significato detto in principio della prefazione, essa sarà unita per ciascuna delle tre omologie armoniche $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ (n. 7), e quindi essa coincide, senz'altro, con la retta p .

Analogamente se un punto è individuato da P , esso dovendo appartenere a tutti e tre gli assi di queste omologie, coincide (n. 7) col punto P .

Possiamo dunque affermare che

Il 2^o spigolo di Green è l'unica retta proiettivamente individuata facendo uso soltanto dell'intorno di 4^o ordine di P in φ , intorno preso soltanto in π ; inoltre non esiste alcun punto (oltre di P) similmente individuato.

(1) Tutto ciò d'accordo con F. CHIZZONI, *Sopra le involuzioni nel piano*. [« Memorie della R. Accademia dei Lincei », vol. XIX, ser. 3^a].

9. Da questo teorema segue che la retta dei flessi della cubica c (n. 4), è proprio la retta p ⁽¹⁾, anzi questi flessi sono precisamente i punti D, E, F (n. 5).

Le tangenti stazionarie di c , però, non sono le rette d, e, f (n. 5), perché altrimenti la conica ψ_1 (n. 7), p. es., toccherebbe la cubica c (nel punto D, cioè) oltre che in P, e ciò è assurdo.

10. Sia S il punto ulteriore intersezione di c con l'asse dell'omologia ω_1 . La conica c' a contatto 5-punto in S con c , è trasformata in sè stessa da questa omologia; lo stesso quindi accadrà per l'ulteriore punto in cui c' seca c , onde questo punto, essendo unito per ω_1 e distinto da D, coinciderà con S, cioè il punto S è uno dei tre punti sestatici della cubica c .

Possiamo dunque affermare che

Proiettando dal nodo della cubica c i tre flessi di questa si ottengono le tre tangenti di Darboux⁽²⁾, e proiettando dal nodo i tre punti sestatici di questa stessa cubica si ottengono le tre tangenti di Segre.

11. Dal teorema del n. 8 segue pure che

il punto P e la retta p sono polo e polare rispetto a ciascuna conica individuata da P, e così pure rispetto ad ogni triangolo da questo stesso punto individuato⁽³⁾.

In particolare dunque P e p sono polo e polare rispetto a ciascuna delle seguenti coniche, le quali costituiscono un fascio-schiera⁽⁴⁾:

a) la conica toccata dalle rette a e b e dalle rette d, e, f ⁽⁵⁾;

b) la conica circoscritta al triangolo def e passante per i punti A e B;

c) la conica tangente alla cubica c (n. 4) nei tre punti sestatici di questa⁽⁶⁾;

d) la conica tangente alle rette a, b e alle tre tangenti stazionarie di c .

(1) Ciò d'accordo col noto fatto che la retta dei flessi della cubica c è il 2° spigolo di Green; cfr. B. SEGRE, *La cubique indicatrice de l'élément projectif d'une surface*. [« Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences », to. 184, 1927], e V. STRAZZERI, *Una definizione geometrica dello spigolo di Green*. [« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », to. LIV, 1930].

(2) B. SEGRE, loc. cit., n. 3.

(3) « Individuato » nel significato, solito, detto in principio.

(4) Si noti che ogni conica individuata da P, passa per i punti A e B, infatti questi punti A e B costituiscono l'unica coppia di punti individuata da P.

(5) Queste tre rette non passano per uno stesso punto, perchè questo punto dovrebbe (n. 8) coincidere con P, ciò che è assurdo.

(6) L'esistenza di questa conica è nota, ma essa si deduce subito osservando che la conica passante per il punto S (n. 10) e tangente alla c nei rimanenti due punti sestatici, è trasformata in se stessa dalla ω_1 , onde essa seca ulteriormente la cubica c in un punto che, dovendo essere unito per ω_1 , coincide con S.

12. Consideriamo la conica precedente (n. 11, d), ed il trilatero, ad essa circoscritto, delle tre tangentи stazionarie di c. Congiungendone i punti di contatto con i vertici opposti, avremo tre rette passanti per uno stesso punto, e questo punto, essendo individuato da P, coincide con P. Otteniamo così il seguente teorema che non ci sembra privo di eleganza⁽¹⁾:

Nella cubica nodale le tangentи nel nodo e le tangentи stazionarie toccano una conica rispetto alla quale il triangolo da queste formato ammette il nodo come punto di Ceva.

Meccanica. — *Effetti di zavorra dovuti ad una coppia di sorgenti.* Nota⁽²⁾ di B. CALDONAZZO, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

Una coppia di sorgenti determina in un piano un moto liquido le cui linee di corrente costituiscono notoriamente il fascio di circonferenze passanti per le due sorgenti. Una di queste circonferenze si può pensare irrigidita senza alterare il moto liquido. Si può ancora invertire il senso del moto nella regione interna, il moto complessivo restando compatibile colla presenza della circonferenza rigida. In tali ipotesi il moto esterno è quello dovuto alla coppia data di sorgenti aperte sul contorno verso l'esterno, il moto interno è quello dovuto ad un'altra coppia, con portate di segno opposto, aperte negli stessi punti, ma verso l'interno.

Sui due bordi della circonferenza la velocità del liquido è eguale e di segno opposto ed il moto complessivo nell'intero piano diventa quello dovuto al fatto che da una delle sorgenti il liquido esce dall'interno della circonferenza, mentre dall'altro rientra. Praticamente il moto si può pensare realizzato praticando in due punti del contorno rigido, da considerarsi quale ostacolo, due piccole aperture e costringendo il liquido, con un conveniente congegno, ad uscire da una di esse ed a rientrare dall'altra. Per la valutazione delle azioni dinamiche sull'ostacolo rotondo, questo va considerato interrotto nelle due sorgenti e bagnato tanto sul bordo interno che su quello esterno. Poichè in punti affacciati sui due bordi dell'ostacolo le velocità hanno lo stesso valore, la pressioni specifiche vi sono eguali; è nulla quindi

(1) Tutte le proprietà osservate in questa Nota per la cubica nodale si possono ritrovare direttamente considerando le involuzioni $I_1 \equiv D_F^E$, $I_2 \equiv E_D^F$, $I_3 \equiv F_E^D$, ognuna delle quali è subordinata ad una omologia armonica (rispettivamente $\omega_1, \omega_2, \omega_3$) rispetto alla quale la cubica è invariante, essendo D, E, F i flessi della cubica.

(2) Pervenuta all'Accademia il 2 luglio 1936.

l'azione dinamica su qualsiasi porzione dell'ostacolo ed in particolare su tutto l'ostacolo⁽¹⁾.

Al moto precedente si può sovrapporre evidentemente, nel campo esterno, quello dovuto ad una corrente traslocircolaria, mentre nessun altro moto irrotazionale regolare in tutti i punti, contorno compreso, è possibile nella parte interna. La risultante delle pressioni dinamiche dei due moti così combinati sull'ostacolo, che va sempre pensato bagnato su entrambi i bordi, risulta finita e si compone della nota spinta trasversale del Rayleigh, dovuta alla sola corrente traslocircolatoria, ed a quello dovuto alla presenza simultanea dei due moti e che, con denominazione introdotta dal Cisotti nel caso di una sorgente e di una doppietta, chiameremo «effetto di zavorra»⁽²⁾.

Se in particolare le due sorgenti aperte sul contorno si avvicinano fino a sovrapporle, facendo crescere indefinitamente il valore della loro portata, ma conservando finito il loro momento, si ha il caso della doppietta, considerato dal Cisotti, e si ritrovano i suoi risultati, che costituiscono pertanto il solo effetto dinamico provocato dalla doppietta.

1. Sia $|\zeta| = a$ la circonferenza rigida nel piano del moto $\zeta = x + iy$; siano $\zeta = ae^{i\alpha}$ e $\zeta = ae^{-i\alpha}$ le sorgenti, q e $-q$ le loro portate rispettive verso l'esterno. La velocità da esse provocate, da considerarsi solo nel campo esterno, è

$$(1) \quad w_S \doteq \frac{q}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\zeta - ae^{i\alpha}} - \frac{1}{\zeta - ae^{-i\alpha}} \right\}, \quad |\zeta| \geq a.$$

Nell'interno invece il campo della velocità è definito da $-w_S$. La corrente traslocircolatoria, all'esterno, ha la velocità

$$(2) \quad w_T = V \left\{ e^{-i\beta} - \frac{a^2 e^{i\beta}}{\zeta^2} \right\} + \frac{C}{2\pi i\zeta}, \quad |\zeta| \geq a,$$

essendo V e β rispettivamente il suo valore e l'angolo da essa formato con l'asse reale all'infinito, e C la sua circolazione relativa a cammini chiusi intorno all'origine.

Internamente invece è necessariamente

$$w_T = 0, \quad |\zeta| \leq a.$$

I due archi nei quali la circonferenza viene divisa dalle due sorgenti appartengono ciascuno, coi suoi due bordi, ad una stessa linea di corrente.

(1) Cfr. la mia Nota: *Sopra un problema idrodinamico relativo ad un arco di circonferenza*. Questi «Rendiconti», vol. XXIII, 1^o sem. 1936, p. 322.

(2) U. CISOTTI, *Un criterio di valutazione delle azioni dinamiche sopra un ostacolo circolare munito di una sorgente e immerso in una corrente traslocircolatoria*. Questi «Rendiconti», vol. XXII, 2^o sem. 1935, p. 275; e ancora: *Effetti di zavorra dovuti a una doppietta*. Questi «Rendiconti», vol. XXIII, 1^o sem. 1936, p. 253.

Per trovare la risultante delle pressioni dinamiche, su entrambi i bordi, si può applicare separatamente a ciascun arco e nel senso antiorario la formula del Blasius

$$R_y + i R_x = -\frac{\rho}{2} \int (w_s + w_r)^2 d\zeta,$$

dove ρ è la densità del liquido.

Il contributo portato dal termine w_s^2 è, per quanto si è osservato, nullo. Quello dovuto al termine w_r^2 , per essere sul bordo interno $w_r = 0$, si riduce alla spinta del Rayleigh, normale alla velocità asintotica,

$$-\rho V C e^{-i\beta}.$$

Rimane l'effetto di zavorra

$$R_y^* + i R_x^* = -\rho \int w_s w_r d\zeta,$$

per valutare il quale basta integrare sul bordo esterno dei due archi, internamente essendo identicamente $w_r = 0$.

Dalle (1) e (2), spezzando il prodotto $w_s w_r$ in frazioni elementari, si ricava

$$\begin{aligned} w_s w_r &= \frac{q}{2\pi} \left\{ V e^{-i\beta} - V e^{i(\beta+2\alpha)} + \frac{C e^{-i\alpha}}{2\pi i a} \right\} \frac{1}{\zeta - a e^{i\alpha}} - \\ &- \frac{q}{2\pi} \left\{ V e^{-i\beta} - V e^{i(\beta+2\alpha)} + \frac{C e^{i\alpha}}{2\pi i a} \right\} \frac{1}{\zeta - a e^{-i\alpha}} - \\ &- \frac{q}{2\pi} \left\{ 2 V i e^{i\beta} \sin 2\alpha - \frac{C}{\pi a} \sin \alpha \right\} \frac{1}{\zeta} + a q V i e^{i\beta} \frac{\sin \alpha}{\zeta^2}. \end{aligned}$$

L'integrale di questa funzione, sui bordi esterni e nel senso antiorario dei due archi è eguale a quello sull'intera circonferenza, ove si tenga conto dei semiresidui relativi ai due poli nelle sorgenti ed al residuo nel polo $\zeta = 0$. Dopo ciò segue subito per l'effetto di zavorra la espressione

$$(3) \quad R_y^* + i R_x^* = -\rho q V e^{i\beta} \sin 2\alpha - \rho q \frac{iC}{2\pi a} \sin \alpha.$$

Il primo termine, effetto di zavorra relativo alla sola corrente traslatoria, rappresenta una forza la cui retta di azione è simmetrica, rispetto all'asse reale, di quella secondo cui agisce la spinta del Rayleigh ed, a parità delle altre circostanze, acquista il massimo valore quando le sorgenti distano tra loro, sulla circonferenza, di un quadrante. Il secondo termine, effetto di zavorra relativo alla sola corrente circolatoria, è una forza parallela all'asse reale e proporzionale alla distanza delle sorgenti da questo asse.

2. Concentrando le due sorgenti in $\zeta = a$, facendo insieme crescere indefinitamente la portata q , in modo che il prodotto $aq \sin \alpha$ tenda ad un limite finito m , la coppia di sorgenti diviene una *doppietta* concentrata in $\zeta = a$, con l'asse tangente alla circonferenza e di momento m . La velocità prodotta dalla doppietta nel campo esterno diviene, come segue dalla (1),

$$\frac{im}{\pi(\zeta - a)^2}.$$

Nel campo interno, al limite, il moto diviene quello dovuto ad una doppietta di momento opposto $-m$, con lo stesso asse ed aperta nello stesso punto verso l'interno. La velocità da essa determinata è espressa dalla precedente funzione col segno cambiato. Nel passaggio al limite la risultante delle pressioni dinamiche dovute alla doppietta si conserva nulla.

Facendo intervenire ulteriormente la corrente w_T , la risultante delle pressioni dinamiche si compone della spinta del Rayleigh e dell'effetto di zavorra

$$R_y^* + iR_x^* = -\rho \frac{m}{a} \left\{ 2V e^{i\beta} - \frac{iC}{2\pi a} \right\},$$

come si può ottenere direttamente e come segue senz'altro dalla (3) facendovi $aq \sin \alpha = m$, con $\alpha = 0$. Se in particolare la circolazione ha il valore $-4\pi a V \sin \beta$, nel qual caso w_T si annulla nella doppietta, dalla precedente si ricava, d'accordo col Cisotti,

$$R_y^* + iR_x^* = -2\rho \frac{m}{a} V \cos \beta.$$

Meccanica. — *Le oscillazioni isocarene attorno le configurazioni cui competono moti di puro giro permanente.* Nota⁽¹⁾ di G. ARRIGHI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ 1. — La seconda equazione cardinale del moto isocarenico di un galleggiante, facendo astrazione della resistenza dei mezzi e riferendo i momenti al baricentro G, si scrive nella forma particolare

$$(1) \quad M' = \tilde{\omega}V(G - P) \wedge k,$$

dove M' è il momento-impulso, $\tilde{\omega}$ il peso specifico (costante) del liquido, V il volume (costante) di carena, P il centro di carena al tempo t e k un vettore unitario verticale volto in basso il quale, al tempo t , coincide col vettore della normale in P alla superficie dei centri di carena⁽²⁾.

Diremo moto isocarenico di puro giro ogni rotazione attorno a k ; detta ora σ la dilatazione baricentrale d'inerzia risulta

$$M = \sigma\Omega,$$

dove Ω è il vettore-rotazione, e per essere

$$\sigma' = \Omega \wedge \sigma - \sigma \cdot \Omega \wedge$$

si avrà

$$M' = \sigma\Omega' + \Omega \wedge \sigma\Omega$$

e la (1) potrà scriversi

$$(2) \quad \sigma\Omega' + \Omega \wedge \sigma\Omega = \tilde{\omega}V(G - P) \wedge k.$$

Si consideri un generico moto isocarenico di puro giro permanente definito dalla

$$\Omega = \varphi'k \quad (\varphi' = \text{cost.}),$$

la (2) diventa

$$\varphi'^2 k \wedge \sigma k = \tilde{\omega}V(G - P) \wedge k$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 16 luglio 1936.

(2) Per la geometria e la meccanica delle isocarene vedi le mie Note: *Introduzione alla geometria differenziale della superficie dei centri di carena* in «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», vol. LXVII, 1932; *L'evoluta della superficie dei centri di carena*, in «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», vol. XVII, 1933; *Il problema cinematico delle rotazioni isocarene dei galleggianti* in «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», vol. LXVIII, 1933; *La statica dei galleggianti e la dinamica delle isocarene* in «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», vol. XVIII, 1933.

e, per essere sempre verificata, dà

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \wedge \sigma \mathbf{k} &= 0 \\ (\mathbf{G} - \mathbf{P}) \wedge \mathbf{k} &= 0 \end{aligned}$$

cioè \mathbf{k} deve essere direzione principale baricentrale d'inerzia e \mathbf{G} deve stare sulla verticale per \mathbf{P} , imponendo, quest'ultima condizione, che il centro di carena \mathbf{P} corrisponda ad una posizione di equilibrio.

Viceversa, verificate queste condizioni, il puro giro definito dalla

$$\Omega = \varphi' \mathbf{k}$$

per la (2) dà

$$\varphi'' \sigma \mathbf{k} = 0$$

cioè $\varphi' = \text{cost.}$ ed è permanente⁽¹⁾.

§ 2. — Studieremo adesso le rotazioni isocarene attorno alla posizione cui competono moti di puro giro permanente; pertanto detto P_0 un centro di carena per il quale sono soddisfatte le condizioni superiori, e indicando con $G(x, y, z)$ la terna degli assi baricentrali d'inerzia del galleggiante (con G_z formante un piccolo angolo con il verticale \mathbf{k}) la superficie dei centri di carena, nell'intorno di P_0 può definirsi, modo solito, mediante la

$$\begin{aligned} z - z_0 = -\frac{I}{2} \left[\left(\frac{I}{\rho} \cos^2 \theta + \frac{I}{\rho_1} \sin^2 \theta \right) x^2 + 2 \left(\frac{I}{\rho} - \frac{I}{\rho_1} \right) \sin \theta \cos \theta xy + \right. \\ \left. + \left(\frac{I}{\rho} \sin^2 \theta + \frac{I}{\rho_1} \cos^2 \theta \right) y^2 \right] \end{aligned}$$

dove ρ, ρ_1 sono i raggi principali di curvatura in P_0 e θ è l'angolo di Gx con la direzione corrispondente a ρ ; allora i coseni direttori di \mathbf{k} saranno

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{I}{\rho} \cos^2 \theta + \frac{I}{\rho_1} \sin^2 \theta \right) x + \left(\frac{I}{\rho} - \frac{I}{\rho_1} \right) \sin \theta \cos \theta y , \\ \beta &= \left(\frac{I}{\rho} - \frac{I}{\rho_1} \right) \sin \theta \cos \theta x + \left(\frac{I}{\rho} \sin^2 \theta + \frac{I}{\rho_1} \cos^2 \theta \right) y , \quad \gamma = 1 . \end{aligned}$$

Per essere x e y piccoli del 1° ordine si ricava in definitiva

$$(3) \quad \begin{cases} x = (\rho_1 \sin^2 \theta + \rho \cos^2 \theta) \alpha - (\rho_1 - \rho) \sin \theta \cos \theta \cdot \beta \\ y = (\rho_1 \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta) \beta - (\rho_1 - \rho) \sin \theta \cos \theta \cdot \alpha \\ z = z_0 . \end{cases}$$

(1) Si noti l'analogia col problema del corpo appoggiato sopra un piano orizzontale, per il quale vedi: T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*. Zanichelli, Bologna, vol. II, parte II, p. 283. Naturalmente non in tutti i galleggianti potranno esser verificate entrambi le superiori condizioni.

Dalle formule di Poisson si deduce poi

$$p = \beta' + r\alpha \quad , \quad q = -\alpha' + r\beta \quad , \quad r' = 0$$

essendo p e q piccoli del 1^o ordine. L'ultima di queste ci dà subito

$$r = \text{cost.}$$

mostrandoci che la velocità angolare attorno a $G\zeta$ si mantiene costante nei piccoli moti attorno alla posizione da noi considerata. Per le (3) si ricava subito

$$\begin{aligned} M_x &= \zeta_0 \beta - (\rho_1 \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta) \beta + (\rho_1 - \rho) \sin \theta \cos \theta \cdot \alpha \\ M_y &= -\zeta_0 \alpha + (\rho_1 \sin^2 \theta + \rho \cos^2 \theta) \alpha - (\rho_1 - \rho) \sin \theta \cos \theta \cdot \beta, \end{aligned}$$

e la nostra equazione (2) riducesi alle due prime equazioni di Eulero che possono scriversi così nella forma

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(\beta'' + r\alpha') + r(C - B)(-\alpha' + r\beta) = \\ = \tilde{\omega}V[\zeta_0 \beta - (\rho_1 \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta) \beta + (\rho_1 - \rho) \sin \theta \cos \theta \cdot \alpha] \\ B(-\alpha'' + r\beta') + r(A - C)(\beta' + r\alpha) = - \\ - \tilde{\omega}V[\zeta_0 \alpha - (\rho_1 \sin^2 \theta + \rho \cos^2 \theta) \alpha + (\rho_1 - \rho) \sin \theta \cos \theta \cdot \beta]. \end{array} \right.$$

§ 3. — Si ponga ora

$$\begin{aligned} D &= (A + B - C)r, \\ E &= (C - B)r^2 - \tilde{\omega}V[\zeta_0 - (\rho_1 \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta)], \\ F &= (A - C)r^2 + \tilde{\omega}V[\zeta_0 - (\rho_1 \sin^2 \theta + \rho \cos^2 \theta)], \\ G &= \tilde{\omega}V(\rho - \rho_1) \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

e le (4) del paragrafo precedente potranno scriversi più semplicemente

$$\begin{aligned} A\beta'' + D\alpha' + E\beta + G\alpha &= 0 \\ B\alpha'' - D\beta' - F\alpha + G\beta &= 0. \end{aligned}$$

La stabilità della soluzione di queste equazioni è connessa alla realtà delle radici della equazione caratteristica biquadratica

$$(5) \quad ABk^4 + (AF - BE - D^2)k^2 - (G^2 + EF) = 0$$

cosicché dovranno essere simultaneamente verificate le condizioni

$$(AF - BE - D^2)^2 + 4AB(G^2 + EF) > 0$$

$$AF - BE - D^2 < 0$$

$$G^2 + EF < 0;$$

e sostituendo in queste i valori espressi al principio del presente paragrafo, si ricava

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} (A + B - C)^2 C^2 r^4 + H > 0 \\ [(C - B)(A - C) - AB] r^2 + k < 0 \\ (C - B)(A - C) r^4 + L < 0 \end{array} \right.$$

dove H e L sono termini di 2^o grado in r e k non contiene r .

Da quanto sopra segue che quando C è il massimo o il minimo momento principale centrale d'inerzia del galleggiante, scegliendo r sufficientemente grande può farsi sì che il galleggiante, nel suo moto, si mantenga vicino alla configurazione di equilibrio presa in esame⁽¹⁾.

Nel caso particolare in cui $r = 0$, la (5) si riduce alla

$$AB k^4 + (AF - BE) k^2 - (G^2 + EF) = 0$$

dove ora è, semplicemente,

$$E = -\tilde{\omega}V[\zeta_0 - (\rho_i \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta)], \quad F = \tilde{\omega}V[\zeta_0 - (\rho_i \sin^2 \theta + \rho \cos^2 \theta)]$$

conservando G il valore datogli al principio del presente paragrafo, e le condizioni (6) si scrivono ora

$$\begin{aligned} (AF - BE)^2 + 4AB(G^2 + EF) &> 0 \\ AF - BE &< 0 \\ G^2 + EF &< 0, \end{aligned}$$

la prima delle quali è, evidentemente, sempre sodisfatta mentre le altre due, in virtù delle espressioni superiori di E , F , G si scrivono

$$\begin{aligned} (A \sin^2 \theta + B \cos^2 \theta)(\zeta_0 - \rho_i) + (A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta)(\zeta_0 - \rho) &< 0, \\ (\zeta_0 - \rho_i)(\rho - \zeta_0) &< 0. \end{aligned}$$

Evidentemente a quest'ultime si verifica con ζ_0 minore del minore raggio di curvatura cioè inferiormente al piccolo metacentro, ovvero, quando P_o dia una posizione di equilibrio stabile come definito nella statica dei galleggianti.

(1) Non stiamo qui a sviluppare i calcoli relativi alla costruzione di un integrale completo chè non offrono invero alcuna difficoltà.

Botanica. — *Sull'appartenenza della « Pelagosite » ad un nuovo genere di alga calcarea⁽¹⁾.* Nota⁽²⁾ di M. AIROLDI, presentata dal Corrisp. G. ROVERETO.

Alcuni degli esemplari di « Pelagosite » da me esaminati, appartengono alle collezioni dell'Istituto di Geologia della R. Università di Genova, e provengono dall'isolotto e dalla grotta di Bergeggi, dove furono raccolti da A. Issel nel giugno 1894; altri, invece, provengono dallo scoglio di Framura (Riviera di Levante), dove furono recentemente raccolti dallo scrivente.

Di queste località l'aspetto macroscopico delle croste pelagositiche, e la loro ubicazione ed estensione, sono già note per le descrizioni dell'Issel e dal Traverso⁽³⁾, per quelle di Bergeggi, e di C. Caselli e M. Novaresio⁽⁴⁾, per quelle dello scoglio di Framura, e poche precisazioni mi restano da aggiungere.

Nell'isolotto di Bergeggi la « Pelagosite », di colore scuro, quasi nero, ha l'aspetto di gocce di pece spruzzata sulla roccia, che è il calcare grigio del Trias medio. Diverso è l'aspetto di quella che nella grotta di Bergeggi ricopre il calcare cristallino pure triassico, e si estende a rivestire un agglomerato di ceneri ed altri resti di focolare neolitico; qui infatti si tratta di una sorta di crosta giallo-chiaro, a superficie lucida, come di smalto.

I due aspetti, di crosta e di gocce, si trovanò associati a Framura, dove lo scoglio detto Ciamia, costituito da diabase, ne è ricoperto nella parte SE, a partire dal pelo dell'acqua fino ad un'altezza di 2 o 3 metri. Il suo colore varia dal giallo al bruno scuro, ed ha per lo più superficie lucida, come smaltata; si osservano tuttavia alcune zone costituite da piccolissime gocce, spesso strettamente associate, in modo che osservate con la lente sembrano piccoli cavolfiori, le quali non presentano la superficie smaltata; un'accurata osservazione permette di distinguere vari stadi di formazione della patina lucente; infatti, mentre questa appare totalmente assente su talune goccioline più minute, riveste la parte superiore di altre, e avvolge totalmente, di solito, quelle di dimensioni maggiori; ho però osservate anche alcune piccolissime goccioline isolate, a superficie completamente smaltata.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia della R. Università di Genova.

(2) Pervenuta all'Accademia il 2 luglio 1936.

(3) A. ISSEL e S. TRAVERSO, *Nota sul litorale fra Vado e Spotorno.* « Atti Soc. Ligure », vol. V, pp. 308-10. Genova, 1894.

(4) C. CASELLI e M. NOVARESIO, *Pelagosite di Framura.* « Mem. Acc. Lunigianese di Scienze », anno XI, fasc. I, pp. 3-17. La Spezia, 1930.

Le chiazze crostose seguono perfettamente le irregolarità della superficie della roccia, penetrando anche a rivestire le pareti delle fratture di essa. In sezione sottile la struttura delle chiazze crostose e quella delle gocce non differiscono notevolmente; il colore giallognolo, la trasparenza alquanto variabile da sezione a sezione, ed anche nelle varie zone della stessa sezione, la struttura fibroso-raggiata, e la zonatura molto marcata, corrispondono ai caratteri già osservati da Squinabol e Ongaro per esemplari delle Tremiti, e nuovamente illustrati di recente da E. Onorato⁽¹⁾, in una estesa Nota, alla quale rinvio per altre notizie e per la conoscenza della bibliografia sull'argomento.

Negli esemplari da me studiati, ed in particolare in quelli di aspetto crostoso provenienti dalla grotta di Bergeggi, mi è stato tuttavia possibile distinguere alcune strutture, fin'ora non note, che permettono di considerare la Pelagosite come una nuova alga calcarea.

Una di queste strutture è rappresentata nella fig. 1; si tratta di un frammento di crosta, rivestente l'agglomerato di resti vari del focolare neolitico, esistente nella grotta di Bergeggi. Vi si distinguono due parti nettamente differenziate, e che considero come due tessuti cellulari diversi.

L'una (a), alla base in relazione colla roccia, avente uno spessore variabile tra 100 e 160 μ , a fortissimo ingrandimento risulta costituita da cellette a forma poligonale, irregolare, serrate fra di loro, a setti pochissimo marcati, tanto da rendere difficilissima la loro delimitazione; anche le dimensioni di queste cellette, la cui disposizione è assolutamente irregolare, sono varie, ma normalmente corrispondono a 4 o 5 μ nei due sensi.

Nella parte superiore (b), il cui spessore supera il millimetro, il distinguere le cellule non è agevole; anche a forte ingrandimento, ciò che appare più evidente è una rigatura in senso longitudinale; le righe sono scure, e più o meno marcate; si può distinguere una rigatura principale dovuta a file ben riconoscibili, visibili anche nella fotografia, dividenti il tessuto in zone, le quali alla loro volta sono finemente solcate da linee secondarie, molto meno accentuate delle prime.

Queste ultime righe o file sono dovute alle tracce dei setti longitudinali delle cellule, le quali sono quindi allineate in serie regolari, alquanto variabili di altezza (da 9,4 μ a 4,7 μ).

I setti intercellulari nel senso trasversale si confondono, o sono mاسcherati, per lo più dalla struttura fibrosa dell'aragonite, di cui tutto il tallo è impregnato..

Ciò nasconde la originaria struttura organica, e giustifica il fatto che quasi tutti gli autori che si sono occupati fin'ora di questo argomento, seguendo il Tshermak, ne abbiano negata la esistenza. Nella sezione in esame un altro fatto conferma la mia interpretazione, e consiste nella presenza di alcune cavità (c) ellittiche, presso a poco di eguali dimensioni, ed allineate,

(1) E. ONORATO, *Sulla Pelagosite delle isole Tremiti nell'Adriatico.* «Boll. Soc. Geol. Ital.», vol. XLV, fasc. I, pp. 17-31, tav. II, 1926.

ad una certa distanza le une dalle altre, allo stesso livello. Tali cavità, che ricordano per la loro forma gli sporangi liberi, esistenti nelle corallinacee del genere *Archaeolithothamnium*, contengono spesso dei globuletti neri che si possono ritenere resti di spore, e sono sormontate da una sorta di canale, ripieno pure di una sostanza polverosa, nerastra, raggiungente la superficie esterna del tallo; alcune volte due o più canali si anastomizzano fra di loro. Le dimensioni di tali cavità, che interpreto come sporangi, sono le seguenti: $198 \mu \times 88 \mu$; $112 \mu \times 63 \mu$; $100 \mu \times 63 \mu$; $151 \mu \times 55 \mu$ (il primo numero indica l'altezza ed il secondo la larghezza).

È notevole il fatto, che le righe determinanti la zonatura del tessuto, e quelle delimitanti le serie cellulari, si inflettono verso il basso, in corrispondenza di tali sporangi. Cavità siffatte non ho osservate negli esemplari di Framura, né lo erano state mai per altre località; se la mia interpretazione circa la loro natura è esatta, ciò può forse essere messo in rapporto con la stagione nella quale gli esemplari sono stati raccolti; come ho già indicato, quelli provenienti da Bergeggi lo furono nel mese di giugno; e, per quanto si può rilevare dalla bibliografia esistente, gli esemplari studiati dagli altri autori furono raccolti in stagioni differenti; in estate avanzata quelli delle Tremiti, in gennaio quelli di Canalgrande nell'Iglesiente, descritti dal Clerici⁽¹⁾, in settembre quelli di Framura. Si può quindi pensare che cada in giugno il periodo di sporulazione dell'alga in esame; su ciò comunque si dovranno compiere ulteriori ricerche.

I meati esistenti nell'agglomerato di resti di focolare neolitico, sono pure rivestiti dai talli crostosi di quest'alga (fig. 2), tuttavia in essi non ho osservato sporangi; la struttura più evidente è quella fibroso-raggiata, a zone concentriche assai sinuose; con forti ingrandimenti, in alcuni tratti si possono distinguere piccole cellette. Avvolte da uno di questi talli, e penetranti in esso, ho osservate alcune file di cellule disposte a cartuccera, ad andamento irregolare (fig. 2 e fig. 3), e che ricordano all'aspetto i talli di *Melobesia melobesioides* Foslie, conosciuta fossile a partire dell'Eocene, e vivente ancora nel Mar Rosso e nell'Oceano Indiano. Le dimensioni delle cellule si presentano tuttavia alquanto minori; sono le seguenti: larghezza da 7.56μ a 10.08μ ; altezza da 7.56μ a 16.64μ . Fra queste file di cellule si osservano alcune particolari zone a contorno ellittico, costituite da fibre aragonitiche a disposizione raggiata, e racchiudenti una cavità più o meno allungata nella zona mediana, e il cui significato non mi è chiaro.

Ritengo che tali file cellulari appartengano ad un tallo di *Melobesia*, assai vicina alla specie *melobesioides* F., e come questa epifita; nel caso in esame essa è associata con l'alga da me descritta. È da notarsi che le vere melobesie non sono state ancora segnalate nel Mediterraneo.

(1) E. CLERICI, *Pelagosite di Canalgrande nell'Iglesiente*. « Rendiconti R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XXIX, ser. 5^a, 1^o sem., fasc. 110, pp. 462-465, 1920.



Fig. 1 - Sezione di tallo di *Sclerothamnium nitens*, parte crostosa; (su ceneri di focolare neolitico - Grotta di Bergaggi); a = ipotallo; b = peritallo; c = sporangio. [X 34].



Fig. 2 - Associazione di tallo di *Sclerothamnium nitens* con tallo di *Melobesia sp.* [X 34].



Fig. 3 - Dettaglio della fig. 2; a = *Melobesia sp.* — file cellulari a cartuccera. [X 88].



Fig. 4 - Sezione trasversale di rametto di *Sclerothamnium nitens*. (Scoglio di Framura) [X 34].

Nella stessa formazione ho osservato un frammento di $352\text{ }\mu$ di spessore, di un tallo presentante la struttura in serie cellulari a ventaglio, caratteristica dell'ipotallo del genere *Lithophyllum*; la regolarità di queste serie cellulari non è tuttavia rigorosa; le cellule misurano da 23 a $46\text{ }\mu$ di lunghezza, per 6 a $10\text{ }\mu$ di larghezza; benchè non ne sia possibile una determinazione specifica sicura, ritengo che possa trattarsi di un frammento di *Lithophyllum incrassans* Philippi, specie vivente nel Mediterraneo.

Le sezioni sottili riguardanti gli esemplari di « Pelagosite » incrostanti il calcare dell'isola di Bergeggi, e il diabase dello scoglio di Framura, permettono altre nuove osservazioni. In esse ho potuto soprattutto studiare la struttura delle forme a goccia benchè anche in esse la struttura fibroso-raggiata dell'aragonite, a serie concentriche, non conceda di distinguere una struttura organica ben definita; tuttavia, la differenziazione, nelle gocce sezionate trasversalmente (fig. 4), di una zona centrale a struttura differente da quella periferica, distinzione già fatta dall'Onorato, mi pare non sia priva di significato; infatti, nel centro le fibre aragonitiche sembrano disposte in un fascio diretto dal basso all'alto; mentre, alla periferia, esse si diramano invece orizzontalmente; disposizione che è simile a quella delle file cellulari, costituenti i rametti delle forme ramose delle melobesie.

I risultati delle analisi chimiche eseguite dai vari autori sulla « Pelagosite » proveniente da diverse località, ed in particolare quella diligentissima dell'Onorato, non mi sembrano contraddire colla mia spiegazione, così come pure il fatto che il carbonato di calcio incrostante il tallo sia della specie *aragonite*, piuttosto che *calcite*. Negli scheletri e nelle conchiglie degli invertebrati infatti, come è noto, il carbonato di calcio è presente sia nella prima, che nella seconda forma: per quanto riguarda le alghe calcaree l'Oltmanns⁽¹⁾ afferma, che in quelle non appartenenti alle Corallinacee, il CaCO_3 è allo stato di aragonite.

Per quanto riguarda la composizione chimica, riporto qui alcuni dati desunti dall'analisi dell'Onorato, ed altri di analisi di alghe calcaree, eseguite da vari autori.

| | Pelagosite (Onorato) | Lithothamnium e Lithoph. viv. (da Lemoine) | Coralline viv. (da Lemoine) | Halimeda opuntia (Fayen) | Galaxaura fragilis (Damour) |
|-----------------------|-------------------------|--|--------------------------------|--------------------------------|-----------------------------------|
| CaCO_3 . . . | 79.47 % | 77 — 87 % | 67 — 70 % | 90 % | 72.56 % |
| SrCO_3 . . . | 2.27 % | — | — | — | — |
| MgCO_3 . . . | 3.13 % | 9.41, 16 % | 9 — 16 % | 5.50 % | 0.86 % |
| Mat. organica | 2.10 % | 0.35 — 16.46 % | 6 — 22 % | 3.80 % | 17.60 % |

(1) FR. OLTMANNS, *Morphologie und Biologie der Algen*, 2^a ediz. Jena, 1923, vol. III., p. 3.

I confronti fra questi dati permettono alcune considerazioni. La quantità di CaCO_3 , nella finora nomata « Pelagosite » corrisponde a quella presente nelle altre alghe calcaree; la percentuale di MgCO_3 , vi è alquanto più scarsa che nelle Corallinacee viventi (nelle specie fossili del Leithakalk, secondo Högbom, MgCO_3 va da 1.95 % a 2.20 %), e corrisponde piuttosto a quella determinata per le alghe calcaree non corallinacee; ciò del resto sarebbe in relazione a quanto asseriscono Clarke e Wheeler⁽¹⁾, che cioè negli organismi, MgCO_3 , è abbondante in associazione con CaCO_3 , sotto forma di calcite, e scarso in associazione con aragonite.

Quanto al SrCO_3 , non mi sono note determinazioni analitiche riguardanti le alghe calcaree; per quelle incrostate di calcite, se ne può ritenere superflua la ricerca; ma per le aragonitiche è probabile che essa darebbe risultati positivi; la delicatezza del metodo analitico è forse stata fin'ora di ostacolo a tale determinazione, eseguita invece dall'Onorato. Che alghe verdi assimilino dei sali di stronzio è stato sperimentalmente dimostrato, come è indicato dal Loew⁽²⁾, quindi si può ritenere possibile una presenza più frequente di SrCO_3 , anche nelle alghe calcaree.

Rispetto alla quantità della sostanza organica, rivelata dall'analisi dell'Onorato, essa è alquanto scarsa, tuttavia percentuali non molto diverse, ed anche minori, sono state determinate in alghe calcaree viventi. Trascurando la percentuale di 0.35 %, data dal Damour per *Lithoth. calcareum* Pallas della Manica, che probabilmente, come nota la Lemoine, fu stabilita su esemplari morti da molto tempo, ricordo un 3.15 % determinato su esemplari di *Lithoph. incrassans* Philippi raccolti viventi nella Manica (Lemoine), un 1.84 % per *Lithoph. Kaiserii* Heydrik (Clarke e Wheeler), e valori oscillanti tra il 3 e il 5 % stabiliti per numerose altre specie.

Non ho osservato, negli esemplari da me studiati, alghe unicellulari del genere *Crohoccus*, e neppure talli del genere *Scytonema*, che sarebbero stati invece presenti, secondo la dott. Bombaccioni, negli esemplari delle Tremiti, descritti dall'Onorato.

Da quanto precede risulta, che mi scosto dalle spiegazioni finora formulate circa la genesi e la natura della « Pelagosite », considerata, dalla quasi totalità degli autori, una specie minerale, dal novero delle quali l'ha però esclusa l'Onorato, che ne ha sostenuto l'origine biochimica.

La mia spiegazione perfeziona quella del Rovereto, il quale aveva creduto di ravvisare, negli esemplari descritti dallo Squinabol e dall'Ongaro, talli di *Lithothamnium* e di *Lithophyllum*⁽³⁾, poichè secondo me si tratta sì, come

(1) F. W. CLARKE and W. C. WHEELER, *The inorganic constituent of marine invertebrates*. « U. S. Geol. Survey ». Washington, 1922, p. 58.

(2) O. LOEW, *Ueber die Wirkung von Strontiumsalzen auf Algen*. « Flora », 1911, N. F. 2, 96.

(3) G. ROVERETO, « Forme della Terra », *Trattato di Geologia Morfologica*. Milano, Hoepli, 1924, vol. I, cap. III, pp. 76-77.

ho già accennato, di un'alga calcarea, del gruppo delle Melobesie, ma di un nuovo genere e nuova specie, vivente nel Tirreno e nell'Adriatico, presentante talli crostosi e ramosi. Dai generi noti differisce, oltre che per i caratteri anatomici sopra precisati, anche per la incrostazione aragonitica del tallo. Suoi caratteri microscopici sono: tallo fortemente zonato, con ipotallo a cellule irregolarmente disposte, e peritallo a cellule assai piccole, e allineate in serie orizzontali di differente altezza; sporangi ellittici, allineati allo stesso livello, e piuttosto regolarmente spaziati, sormontati da lunghi canali; tallo fortemente impregnato di aragonite, la cui struttura fibroso-raggiata occulta la struttura organica. Fra i caratteri macroscopici è tipica la sua lucentezza a guisa di smalto. Propongo per questo nuovo genere il nome di *Sclerothamnium*, il quale per ora consisterebbe nella sola specie sopradescritta, alla quale assegno il nome di *Sclerothamnium nitens* n. gen. et n. sp.

Botanica. — *Prime osservazioni sull'importanza dei cotiledoni per la neoformazione di radici sugli ipocotili di «*Lupinus albus L.*» e «*Vicia villosa Roth.*»⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di V. BAMBACIONI-MEZZETTI e A. SUARDI, presentata dal Corrisp. E. CARANO.*

Da circa due anni stiamo studiando l'azione esercitata rispettivamente dai cotiledoni e dalle foglie adulte sulla produzione di radici avventizie in ipocotili di giovani piantine e in talee di piante adulte.

Nella presente Nota descriveremo i risultati ottenuti su piantine da seme di *Lupinus albus L.* e di *Vicia villosa Roth.*

Abbiamo creduto opportuno scegliere queste piante per le nostre esperienze per il fatto che il Lupino, come è noto, contiene nei cotiledoni scarsi idrati di carbonio e quindi l'eventuale azione da essi esercitata sulla neoformazione di radici, almeno in piante tenute al buio, sarebbe stata indipendente dalla presenza di zuccheri che, secondo quanto risulta dalla letteratura, sono tra le sostanze più stimolanti tale neoformazione. La *Vicia villosa* è stata scelta perchè, avendo questa pianta cotiledoni ipogei, il suo ipocotile è brevissimo e quindi avremmo potuto vedere se anche in questo caso l'eventuale sostanza determinante la produzione di radici avventizie contenuta nei cotiledoni [la *rizocalina* di Bouilleme e Went⁽³⁾] mostrasse solo una dislocazione basipeta.

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 21 luglio 1936.

(3) R. BOUILLEME et F. WENT, *Recherches expérimentales sur la néoformation des racines dans les plantules et les boutures des plantes supérieures. (Substances formatrices de racines).* «Annales du Jardin Botanique de Buitenzorg», vol. 43, 1933, pp. 25-201.

OSSERVAZIONI SUL « *LUPINUS ALBUS L.* ».

1^a serie di esperienze. — Semi di lupino di grandezza uniforme venivano messi a gonfiare in acqua per 24 ore, quindi erano posti in germinatoi tenuti al buio ripieni di sabbia o segatura bagnata con acqua di fonte.

Quando le piantine avevano raggiunto un'altezza di cm. 10 e il numero delle radici prodotte non aumentava più, sceglievamo le piantine che presentavano uno sviluppo quasi uguale, le privavamo di tutte le radici con un taglio netto fatto con rasoio e le dividevamo in due lotti. Quelle del primo lotto venivano distribuite in tre recipientini di vetro ricoperti con carta nera e pieni di acqua di fonte: di questi recipienti uno era tenuto in serra, in piena luce, uno alla luce diffusa del laboratorio e uno al buio in camera oscura. Le piantine del secondo lotto venivano private di un cotiledone e poi anch'esse erano messe in acqua di fonte nelle tre condizioni di ambiente sopra indicate.

Ogni giorno si cambiava l'acqua dei vasetti e si osservavano le piantine. Dopo una decina di giorni cominciarono a comparire abbozzi radicali sugli ipocotili forniti di due cotiledoni e dopo dodici, tredici giorni la loro comparsa si notò anche sugli ipocotili privati di un cotiledone.

Riassumiamo nella seguente tabella i dati rilevati alla fine di un'esperienza durata dal 18 marzo al 10 aprile 1935, risultati pienamente confermati dalle osservazioni successive. In essa sono indicati i numeri minimo e massimo di radici prodotte per ogni pianta e la loro lunghezza massima.

| | In serra | In laboratorio | In camera oscura |
|---|---------------------|-------------------|---------------------|
| Piantine con due cotiledoni | 11-14 radici, cm. 9 | 8-9 radici, cm. 4 | 10-11 radici, cm. 3 |
| Piantine con un solo cotidone | 4-8 radici, cm. 4 | 7 radici, mm. 5 | 2-4 radici, mm. 2 |

Da questi dati risulta evidente che gli ipocotili con due cotiledoni producono sempre un numero maggiore di radici degli ipocotili con un solo cotiledone e che le radici più numerose e più sviluppate si ottengono nelle piantine tenute in serra, quindi i cotiledoni, nel processo di organizzazione del carbonio, debbono arricchirsi della sostanza capace di provocare la neoformazione di radici.

2^a serie di esperienze. — Nelle esperienze precedenti oltre i cotiledoni le piantine avevano la gemma apicale che, sviluppandosi, aveva dato nuove foglie; ora, per vedere quale parte potessero avere anche queste ultime

nella produzione di radici sugli ipocotili, nelle nuove esperienze toglievamo dai germinatoi piantine lunghe circa cm. 10, le privavamo delle radici e le dividevamo in tre lotti: a quelle del primo lotto lasciavamo i cotiledoni e toglievamo la gemma, a quelle del secondo lotto toglievamo i cotiledoni e lasciavamo la gemma, a quelle del terzo lotto lasciavamo un solo cotiledone e la gemma. Le piante di ogni lotto erano poi distribuite in due recipientini diversi di cui uno veniva tenuto in serra e uno in camera oscura.

Nella tabella seguente rappresentiamo i risultati ottenuti in un'esperienza durata dal 5 al 24 febbraio 1936 e successivamente confermata.

| | Piantine con soli cotiledoni | Piantine con sola gemma | Piantine con un solo cotiledone e la gemma |
|------------------------|------------------------------|-------------------------|--|
| In serra | 12 radici, cm. 7 | 6 abbozzi radicali | 10 radici brevi ma ramificate |
| In camera oscura . . . | 4-8 radici, cm 7 | nessuna radice | 2 abbozzi radicali |

Da questi dati risulta che l'importanza delle foglie per la neoformazione di radici sull'ipocotile è, nel Lupino, molto inferiore a quella dei cotiledoni.

3^a serie di esperienze. — In queste esperienze eseguite nel 1935 e ripetute quest'anno ci siamo proposte di vedere se la sostanza capace di promuovere la neoformazione di radici contenuta nei cotiledoni del Lupino migrasse di continuo dai cotiledoni stessi alle radici.

A tale scopo a piantine di Lupino poste nei germinatoi toglievamo i cotiledoni e la piumetta, dopo 24 ore toglievamo dai germinatoi le piantine, le privavamo delle radici e le mettevamo nei soliti recipientini in acqua di fonte. Contemporaneamente altre piante della stessa età venivano private dei cotiledoni, della gemma apicale e delle radici e messe, come le prime, in acqua di fonte. In queste esperienze tutti gli ipocotili venivano tenuti in laboratorio.

Dalle numerose osservazioni fatte è risultato che solo gli ipocotili privati contemporaneamente delle radici, dei cotiledoni e della gemma sono capaci di emettere due, tre radici piuttosto brevi; quelli decapitati il giorno precedente non hanno mai emesso radici. Ciò mostra che la *rizocalina* passa, attraverso l'ipocotile, dai cotiledoni nelle radici e che gli ipocotili tenuti per un giorno nei germinatoi dopo la decapitazione ne sono del tutto privi.

Abbiamo cercato di provocare la formazione di radici in questi ipocotili privi di *rizocalina* con soluzioni di cloruro di torio, di glucosio, di

maltina Merck, di estratto di crusca di riso, di estratto dei cotiledoni stessi ma i risultati ottenuti vanno ancora controllati.

OSSERVAZIONI SU « *VICIA VILLOSA* ROTH ».

Le piantine di *Vicia villosa* ottenute da semi messi a germinare in capsule Petri su carta da filtro bagnata con acqua di fonte erano poste al buio in germinatoi pieni di sabbia e quando avevano raggiunto una lunghezza di circa cm. 7 iniziavamo le esperienze togliendo le piantine dalla sabbia, privandole delle radici e dividendole in quattro lotti. Alle piantine del primo lotto lasciavamo i due cotiledoni, a quelle del secondo lotto ne lasciavamo uno, a quelle del terzo mezzo, mentre a quelle del quarto lotto venivano tolti entrambi i cotiledoni con un taglio netto alla base. Tutte conservavano la gemma apicale ed erano tenute in laboratorio.

I risultati di un'esperienza eseguita dal 10 al 25 maggio 1936 si possono così riassumere:

| Piantine con due cotiledoni | Piantine con un cotiledone | Piantine con mezzo cotiledone | Piantine prive di cotiledoni |
|-----------------------------|----------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| 7-8 radici, cm. 8 | 3-4 radici, cm. 6 | 2 radici, cm. 1 | nessuna radice |

Le radici neoformate compaiono tanto sul brevissimo ipocotile quanto sull'epicotile, ciò che potrebbe far pensare come in questa pianta con cotiledoni ipogei la *rizocalina* sia capace di spostarsi anche verso l'alto ma ci riserviamo di approfondire questa questione nelle esperienze che eseguiremo nel prossimo anno.

Concludendo, dalle esperienze sopra riferite si deduce:

1° che tanto nel *Lupinus albus* L. quanto nella *Vicia villosa* Roth i cotiledoni contengono una sostanza capace di provocare sugli ipocotili la formazione di radici avventizie;

2° che tale sostanza migra, almeno nel Lupino, dai cotiledoni nelle radici attraverso l'ipocotile che ne rimane completamente privo in piantine decapitate e lasciate nei germinatoi per 24 ore;

3° che i cotiledoni si arricchiscono di questa sostanza alla luce;

4° che nel Lupino le foglie adulte hanno, per la neoformazione di radici sull'ipocotile, un'importanza molto inferiore a quella dei cotiledoni.

Botanica (Patologia vegetale). — *Sulle cause della cosiddetta « defogliazione primaverile » del pioppo in alta Italia*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di G. GOLDANICH, presentata dal Corrisp. L. PETRI.

Nelle regioni dell'Italia settentrionale in cui la cultura del pioppo è maggiormente diffusa, e precisamente nel Piemonte, nella Lombardia, nell'Emilia, questa preziosa pianta industriale va soggetta ad una grave malattia.

Gli agricoltori ed i pratici del luogo hanno dato ad essa il nome, non del tutto bene appropriato, di « defogliazione primaverile »; e questo perché la manifestazione più appariscente delle condizioni patologiche delle piante colpite è il disseccamento e la parziale caduta delle foglie, che avviene con particolare intensità nella primavera. Non è di certo questa una malattia nuova; è da credere anzi che essa esista in Italia da parecchio tempo e che le condizioni particolari che hanno reso più virulento il parassita o più recettivo l'ospite ne abbiano causato l'intenso sviluppo di questi ultimi anni; in ogni modo la prima notizia certa della sua presenza nei pioppi italiani risale solo al 1930⁽³⁾.

L'importanza che riveste per l'economia nazionale la cultura del pioppo, ed il pericolo che gli sforzi che ora si stanno facendo per estenderla ed anche per renderla più produttiva, vengano frustrati da questa nuova avversità, ha fatto sì che sulla « defogliazione primaverile » venisse richiamata la maggiore attenzione dei pioppicoltori, dei pratici, dei tecnici. Già da diversi anni funziona a Villafranca Sabauda, egregiamente diretto dal prof. G. Jacometti, l'Istituto per il miglioramento del pioppo, che ha lo scopo di selezionare nuovi tipi di questa pianta che, pur rispondendo alle necessità dell'industria cartaria specialmente e della falegnameria, siano resistenti alla « defogliazione ». I pioppicoltori, poi, in relazione con tale Istituto impiantano i nuovi ibridi, già collaudati, nelle proprie tenute per convalidarne nella pratica i pregi.

Nel corrente anno l'Istituto per il miglioramento del pioppo e del pari l'Ente nazionale della cellulosa interessavano questa R. Stazione di Patologia Vegetale affinché venissero eseguite ricerche sulla natura della malattia ed eventualmente sui mezzi per combatterla. È il direttore, professor L. Petri, accogliendo la richiesta, affidava a me l'incarico ed otteneva dal Ministero dell'Agricoltura e delle Foreste l'autorizzazione agli studi su questo argomento.

(1) Ricerche eseguite nella R. Stazione di Patologia vegetale. Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 2 luglio 1936.

(3) P. VOGLINO, *Il « seccume » del pioppo. « La difesa delle piante », 8, 1931, pp. 1-3.*

A partire dal mese di aprile ho eseguito perciò numerosi sopralluoghi in Emilia, in Lombardia, in Piemonte visitando le zone maggiormente colpite dalla malattia, soffermandomi in special modo nei dintorni di Torino dove la defogliazione è più grave. Le osservazioni fatte in natura e i risultati ottenuti dall'esame del materiale raccolto nei vari luoghi ed osservato in laboratorio, mi hanno portato già a conclusioni sulla eziologia della malattia che, seppure incomplete, son tali che credo opportuno fin d'ora di renderle di pubblica ragione.

La « defogliazione primaverile » del pioppo dell'alta Italia trova riscontro nella malattia scoperta per la prima volta in Francia dal Vuillemin nel 1889⁽¹⁾. I caratteri che questo A. ha dato delle piante ammalate non lasciano alcun dubbio che i pioppi italiani sono soggetti ad una malattia, se non identica, affatto simile a quella francese. Secondo il Vuillemin s trattava infatti dell'infezione di un fungo sferossidale (*Phoma sp. sec. l'A.*) alla cui azione parassitaria era dovuto un parziale disseccamento dei giovani germogli, che all'apice si piegavano in modo caratteristico ad uncino e quindi anche della foglia che essi portavano. A detta sempre dello stesso A. questa specie di *Phoma* è la forma picnidica dell'ascomicete *Didymosphaeria populina* Vuill.

La chiara diagnosi del Vuillemin veniva però quasi subito turbata dall'asserzione del Prillieux il quale sosteneva⁽²⁾ che il fungo parassita aveva anche uno stadio ifale, identificabile nel *Napicladium tremulae* Fr.

L'opinione del Prillieux, quantunque contraddetta dal Vuillemin e quantunque basata su una esperienza quanto mai poco attendibile, è stata accolta da quasi tutti i fitopatologi che si occuparono in seguito dell'argomento; ed anzi taluni sono arrivati addirittura a considerare il *Napicladium tremulae* (*Fusicladium radiosum*) come lo stadio più dannoso del parassita agente della defogliazione. Ed è infatti proprio questa l'opinione ora diffusa in Italia⁽³⁾.

Io sostengo al contrario che l'ifale noto sotto il nome di *Napicladium tremulae* Fr. o *Fusicladium radiosum* (Lib.) Sacc., e a cui spetta la denominazione più esatta di *Stigmina radiosa* (Lib.) G. Goid.⁽⁴⁾ non ha nulla

(1) P. VUILLEMIN, *La maladie du Peuplier pyramidal*. « Compt. rend. d. l'Ac. de France », 108, 1889, pp. 632-634.

(2) E. PRILLIEUX, *Sur la maladie du Peuplier pyramidal*. « Compt. rend. d. l'Ac. d. France », 108, 1889, pp. 1133-1136.

(3) Cfr. O. SERVAZZI, *Contributi alla patologia dei pioppi*. III. La « defogliazione primaverile » dei pioppi. Osservazioni preliminari sulla defogliazione primaverile dei pioppi da « *Fusicladium radiosum* » (Lib.) Lind. [« *Napicladium tremulae* » (Fr.) Sacc.]. « Boll. Lab. sper. e R. Oss. di Fitop. Torino », 12, 1935, pp. 162-173.

(4) G. GOIDANICH, *Morfologia, biologia e sistematica di un fungo parassita delle foglie dei pioppi* [« *Stigmina radiosa* » (Lib.) G. Goid.] « Ann. di Botanica » (in corso di stampa). Dimostro in questo lavoro che il fungo noto finora come *Napicladium tremulae* o *Fusicladium radiosum* non può appartenere né al genere *Napicladium* né al genere *Fusicladium* ma deve passare al genere *Stigmina*.

a che vedere con il fungo che causa la grave malattia dei pioppi in alta Italia. Esso è un puro parassita fogliare; sul lembo produce delle macchie che si iniziano quasi sempre alla periferia in corrispondenza di una nervatura e procedono verso l'interno pressappoco sotto forma di cuneo. Solo raramente l'infezione della *Stigmina radiosua* raggiunge il picciolo e di qui il rametto.

Il disseccamento dei germogli è dovuto all'attacco di un fungo sferossidale che si isola costantemente dai tessuti ammalati e si osserva in natura in corrispondenza delle zone infette. Probabilmente è lo stesso che ha osservato il Vuillemin e che questo A. riferì al genere *Phoma*.

Poco si sa su tale *Phoma* tanto che esso non possiede neppure la denominazione specifica. A mio parere è invece necessario che venga stabilita l'esatta posizione sistematica di questa forma fungina ed anche che, sia essa o no stadio imperfetto della *Didymosphaeria populina*, le sia attribuito, per ragioni di ordine sistematico che ho esposto in altra occasione⁽¹⁾, il nome che le spetta. Ma non avendo ancora fatto un esame approfondito indicò per il momento questo fungo come *Sferossidale G. 2191* (numero d'ordine del primo isolamento puro ottenuto).

Esso inizia l'infezione in qualsiasi punto dei rametti, con predilezione in corrispondenza dell'attaccatura delle gemme; da qui si estende verso il basso e verso l'alto indifferentemente con molta rapidità. Le parti del germoglio che si trovano al di sopra del punto in cui si è avuta l'infezione iniziale dissecano dopo essersi ripiegate, in modo assai caratteristico, ad uncino. Le foglie seguono la sorte del germoglio. Ancor prima che il micelio abbia raggiunto il ramo da cui si dipartono i germogli infetti, questi si distaccano e cadono per un processo di autotomia di cui le piante ci offrono numerosi esempi.

Che lo sferossidale non abbia nulla a che vedere con la *Stigmina radiosua* l'ho stabilito in modo certo. Infatti le culture che ho ottenuto, sia facendo dei trapianti su substrati artificiali di parti di foglie infette da *Stigmina*, sia isolando singole spore in germinazione dello stesso fungo, non sono costituite altro che da un micelio che fruttifica a partire dal terzo-quarto giorno di età producendo tipici conidi di *Stigmina*⁽²⁾.

(1) G. GOIDÀNICH, *Il genere di ascomiceti «Grosmannia» G. Goid.* «Boll. R. Staz. Pat. Veg.» a. XV, n. s., 1936 a p. 54.

(2) In questi ultimi giorni, poi, quasi contemporaneamente tutti gli isolamenti differenziano dei corpiccioli rotondeggianti piuttosto grossi, che mi lasciano supporre siano abbozzi di periteci. Se essi giungeranno a maturità potrò riuscire a stabilire quale è la vera forma perfetta della *Stigmina*; se la *Didymosphaeria populina* od altro ascomicete. Nel primo caso allora la *D. populina* non entrerebbe nel ciclo dello sferossidale come ora si crede. E del resto di questo non ci dovremmo meravigliare perché la relazione metagenetica tra queste due ultime forme fungine non è stata ancora sperimentalmente dimostrata.

Le culture del o cicerchiatale, d'altro conto, sono costituite di un miscuglio diverso da quello della Saguinus e fanno luogo alla formazione di ampidiametri più fiti, senza mai differenziare alcuna forma finale. Pure l'ascrezimento dei cui tipi di culture è assai diverso: mentre quelle della Saguinus non raggiungono ad esempio, in 10 giorni più di 4-5 millimetri di diametro, le altre nello stesso tempo arrivano a 5-6 centimetri.

Io afferro perciò che la variazione determinata dalla Saguinus G. 2131 è che si può indicare con la denominazione di ampidiametri apicale dei semezzi e che il determinista della Saguinus nasca (che per distinguerla dagli altri tipi di infestazioni bisognerebbe definire come Saguinissi dei semezzi) come due ore di loro effetti diverse, seppure possono coesistere nella stessa vegetazione, nelle medesime località, sulle medesime piante e i danni causati dai primi di questi parassiti possono venire aggravati dall'attacco degli altri.

Io afferro inoltre che la «primum» del poppo, e malattia di importanza in ogni lungo interstizio al riacquisto apicale dei germozzi e che questa forma è la causa di una evoluzione certamente principaleissima delle semezze, che cominciano a parere i semezzi nel Italia settentrionale, cominciando con questo col nome di «deflorazione primaverile».

La deflorazione primaverile interessa in special modo il *Populus canadensis*, *P. tremula*, *P. virginiana*, *P. montana*, *P. nigra* sono comuni, nelle medie latitudini gradi di settembre inverno. I fioridi ottengono la loro piena floritura e spesso perdutamente hanno dato buoni frutti, e questa circostanza anzi forse rivolse le ricerche per risolvere il problema della «deflorazione primaverile».

Sulle cause che hanno intuito a rendere possibile questo scoppio quasi improvviso e universale per la cultura del poppo, e su altri importanti fenomeni riguardanti la tifosa, le fioridi parassiti e la eziologia delle malattie, mi occuperò più indennemente in altra sede, distanziandomi per ora aver mostrato questi i punti principali su cui debbono impernarsi le ricerche sui semezzi stagionali.

Botanica. — *Germinazione di embrioni di «Mais» staccati dalla cariosside e privati dello scudetto in presenza di poliosi contenenti frutto-furanosio⁽¹⁾.* Nota⁽²⁾ di GIUSEPPINA DRAGONE-TESTI, presentata dal Corrisp. E. CARANO.

Lo scorso anno avevo eseguite⁽³⁾ esperienze con embrioni di mais staccati dalla cariosside ed allevati in substrati formati dalla mia speciale soluzione salina nutritizia e da polisaccaridi contenenti nella molecola frutto-furanosio. L'azione benefica esercitata da questi ultimi era da me attribuita al frutto-furanosio che si sarebbe eliminato nella loro idrolisi. La stagione avanzata nella quale avevo compiute queste esperienze non mi permise di allevare ulteriormente le piantine provenienti dagli embrioni sperimentati.

Quest'anno ho ripetuto in tempo opportuno (marzo) le esperienze su embrioni provenienti da cariossidì di mais germinabili della raccolta dell'anno precedente.

Bagnavo dei dischi di ovatta con la soluzione da sperimentare e adagiavo su di essi gli embrioni staccati dalla cariosside e privati dello scudetto.

Avendo nello scorso anno constatata la possibilità per gli embrioni con scudetto allontanati dall'albume di poter germinare e dare piante che potevano raggiungere lo stato adulto ben sviluppate, portanti infiorescenze fertili, che fruttificarono anche, ho limitato le esperienze di quest'anno ad embrioni privati pure dello scudetto.

Le esperienze furono fatte adoperando la mia soluzione salina che nello scorso anno mi aveva dati risultati migliori che non quella di Knop in questo genere di esperienze.

Ad essa aggiunsi, nella dose dell'1 %, rispettivamente glucosio, fruttosio, saccarosio, raffinosio ed inulina.

Le esperienze furono iniziate il 25 marzo.

In ogni capsula erano adagiati dieci embrioni.

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 9 luglio 1936.

(3) Per le esperienze precedenti sullo stesso argomento v. anche:

G. DRAGONE-TESTI, *Germinazione di embrioni di grano fuori della cariosside.* «Rend. R. Acc. Naz. Lincei», ser. 6°, vol. XIX, fasc. 9, 1934, p. 652; Id., *Azione di alcuni sali sulla germinazione di embrioni di grano staccati dalla cariosside.* «Ibid.», vol. XX, 1934, p. 59; Id., *Esperienze sulla germinazione di embrioni di frumento staccati dalla cariosside.* «Ann. di Bot.», vol. XX, 1934, p. 534; Id., *Germinazione di embrioni di graminacee staccati dalla cariosside.* «Ann. di Bot.», vol. XXI, 1935, p. 98.

Il giorno successivo essi si presentavano turgidi, ma solo da alcuni di quelli aventi a disposizione idrati di carbonio cominciava a spuntare, dalla coleoriza lacerata, l'apice della radichetta primaria.

Nella soluzione salina ciò avveniva tre giorni dopo la semina, quando le piantine nelle soluzioni con idrati di carbonio presentavano la radice principale allungata ed anche, nel caso del fruttosio, con abbondanti peli radicali. In molte piantine, tranne in quelle della soluzione salina, cominciavano ad apparire anche le radici laterali ed il coleopzile iniziava l'inverdimento.

Lo sviluppo procedeva ancora nei giorni successivi ed il 31 marzo la radice principale raggiungeva le seguenti dimensioni massime per le singole soluzioni :

| | |
|-----------------------------------|-------|
| In soluzione salina | mm. 3 |
| » » » + 1 % di glucosio | » 11 |
| » » » fruttosio | » 15 |
| » » » saccarosio | » 12 |
| » » » raffinosio | » 15 |
| » » » inulina | » 14 |

Come si poteva prevedere le piantine più sviluppate erano quelle in idrati di carbonio.

Tutte le piantine furono accuratamente trapiantate in vasi contenenti terra fine mista a sabbia e furono innaffiate con le singole soluzioni nei giorni successivi.

Malgrado tutta la diligenza usata nel somministrare le soluzioni e nel mantenere il terreno sufficientemente umido, il 6 aprile tutte le piantine allevate con la soluzione salina nutritizia soltanto erano andate a male. Il 7 aprile qualcuna delle piantine in glucosio e qualcuna di quelle in saccarosio cominciavano a dare i primi segni di sofferenza, mentre le altre, sia in glucosio, che in fruttosio, in raffinosio, ed in inulina mostravano, benchè lentamente, di seguitare ad accrescetersi, anzi dal coleoptile di una piantina allevata in fruttosio fuorusciva l'apice della prima fogliolina, mentre altre cresciute con inulina si mostravano molto prossime a fare altrettanto.

Questo stato di benessere e di lento accrescimento però durò breve tempo. Malgrado l'annaffiamento regolare con le soluzioni saline contenenti gli idrati di carbonio, le piantine lentamente arrestarono il loro sviluppo e poi, dopo brevi segni di sofferenza, morirono.

Così l'11 aprile ne sopravvivevano alcune soltanto in glucosio, fruttosio, raffinosio, inulina; quelle in saccarosio erano andate a male.

Il 13 aprile erano morte anche le piantine in inulina, e se ne conservavano alcune in glucosio, fruttosio e raffinosio.

Il 15 dello stesso mese ne sopravvivevano solo alcune in glucosio e in fruttosio.

Tre giorni dopo gli unici superstiti erano una piantina in glucosio e tre in fruttosio, in una delle quali il lembo della prima foglia continuava ad allungarsi.

Il 20 aprile anche l'ultima pianta in glucosio moriva, e pochi giorni dopo, a breve distanza l'una dall'altra, subivano la stessa sorte quelle in fruttosio, l'ultima delle quali era la pianta che presentava la prima fogliolina normalmente inverdita, che aveva cessato di accrescere.

Altre esperienze ripetute durante questo periodo hanno mostrato lo stesso andamento.

CONCLUSIONI.

Da quanto ho esposto precedentemente si può concludere che gli embrioni di mais privati dello scudetto possono germinare, accrescere ed inverdire anche in soluzione salina completa soltanto, ma ciò fino ad un certo limite. Le piantine cominciano ad un certo momento a mostrare segni evidenti di sofferenza, e poi vanno rapidamente a male.

L'inverdimento in generale è abbastanza rapido.

Esamineate al microscopio delle sezioni di embrioni tolti da semi simili a quelli sperimentati mostrano dei minuti granuli di amido nel coleoptile e nella coleoriza. L'amido manca nelle foglie che, come guaine concentriche, sono contenute nell'interno del coleoptile. In esse è abbondante la riserva grassa e la proteica. Nelle radichette e specialmente in prossimità del punto d'impianto della coleoriza è presente l'amido in granuli minimi. Ciò spiega la possibilità abbastanza rapida di questi embrioni di inverdire se esposti alla luce.

L'azione degli zuccheri adoperati si è dimostrata, come del resto avevo osservato nello scorso anno, decisamente favorevole, determinando un vantaggio tanto nell'emissione della radice principale quanto in quella delle radici laterali e nell'inverdimento. Le radici si accrebbero di più, purstrandosi, a parità di tempo meno lunghe e meno robuste di quelle di altre piante derivate dalla germinazione di cariossidi integre o da embrioni con scudetto.

Di tutti gli zuccheri quello che determinò azione più vantaggiosa fu il fruttosio; con questo zucchero la prima fogliolina inverdita normalmente riusciva a fuoruscire dal coleoptile e ad allungarsi alquanto.

Ma le piante, malgrado l'utilizzazione degli idrati di carbonio, non riuscivano a sopravvivere a lungo.

Queste esperienze lasciano dunque pensare alla mancanza nell'embrione privato dello scudetto e staccato allo stato secco dalla cariosside, di sostanze

a valore ormonico, senza le quali l'accrescimento delle piante è molto stentato, di brevissima durata, e la vita non può protrarsi a lungo.

Tuttavia in queste esperienze viene confermata nuovamente l'azione favorevole dei polisaccaridi contenenti frutto-furanosio, che potendo nell'idrolisi, venire immediatamente utilizzato, esplicherebbe un'azione fisiologica importante e pronta.

Le sostanze a valore ormonico proverebbero nella germinazione delle cariossidi normali da qualcuno di quei tessuti che furono nel corso delle esperienze allontanati.

Mi propongo nel prossimo anno, in epoca propizia, di ripetere in questo senso altre prove, specialmente con gli ormoni di accrescimento.

Zoologia. — *Lo sviluppo della coda negli Anfibi. — I. Esperimenti di isolamento e di difetto⁽¹⁾.* Nota⁽²⁾ di H. BYTINSKI-SALZ, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Tutte le ricerche sullo sviluppo della coda negli Anfibî si sono imbatte in gravi difficoltà di studio derivate dal mancato differenziamento dei tessuti nei primi stadi della urogenesi. Gli studiosi del secolo 19° e delle prime decadi del secolo 20° si limitarono perciò a descrivere l'abbozzo codale come una gemma mesenchimatica apparentemente omogenea, che i metodi descrittivi ed anatomo-comparativi, allora noti, non permettevano di analizzare ulteriormente.

VOGT ha il grande merito di aver reso accessibile l'analisi sperimentale del differenziamento degli organi per mezzo del metodo dei contrassegni vitali (*Vitalfarbmarkierung*). Oggi, in seguito ai suoi lavori (VOGT 1925-1929) e alle ricerche di BIJTEL (1928-1931), siamo in grado di orientarci sull'andamento dei processi formativi nell'estremità posteriore dell'embrione degli Anfibî. Secondo le suddette ricerche nonchè rilievi personali, gli abbozzi degli organi che verranno a costituire il bottone codale sono distribuiti, allo stadio di neurula, intorno alla regione blastoporale, e più precisamente, come mostra lo schema (fig. 1), nella piastra midollare, immediatamente innanzi al blastoporo a forma di fessura: il materiale dei futuri somiti caudali; anteriormente, quello del tubo neurale caudale; lateralmente ai cercini midollari, il materiale ectomesenchimatico e l'epidermide dorsale del margine della pinna. Lateralmente al blastoporo: i somiti più caudali

(1) Dall'Istituto di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparate della R. Università di Padova. Ricerche eseguite in parte con i mezzi del *Theresa Sessel Fellowship* alla Yale University e dell'*Academic Assistance Council* a Padova.

(2) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1936.

del tronco, che vengono ancora invaginati durante la neurulazione, ed il materiale del margine ventrale della pinna. Caudalmente a questo: il materiale del proctodeo (e secondo BIJTEL dell'intestino caudale) disposto in forma di falce e che più tardi viene pure invaginato. L'ectoderma dei lati della coda è situato molto lateralmente, e si connette all'ectoderma del margine della pinna. Sotto la piastra midollare, nel tetto dell'archenteron, sono situati: medialmente l'abbozzo della coda, lateralmente quelli dei miotomi del tronco. Ventro-lateralmente a questi, le pareti laterali endodermiche dell'intestino si inarcano, portandosi verso l'alto e, in stadi successivi, raggiungendo l'abbozzo della coda e venendo a costituire il substrato (*Unterlage*) di tutto il mesoderma laterale.

Durante la neurulazione ha luogo un sollevamento delle pieghe midollari in direzione dorsale, e la chiusura della piastra midollare nel tubo midollare, più precisamente con movimenti formativi orientati verso la linea mediana (nella fig. 1 sono segnati con frecce). Anche il territorio dei miotomi caudali si chiude formando un cuscinetto pieno, ricoperto dall'ectoderma, che rappresenta l'abbozzo della futura gemma caudale. In questa perciò penetrano, alla fine della neurulazione, tubo neurale e corda, in forma di processi solidi dalla parte dorsale, l'intestino caudale, in forma di cul di sacco, dalla parte ventrale. Una sezione trasversale della base della coda mostra il noto quadro degli abbozzi degli organi in posizione normale: dorsalmente e ventralmente le duplicature cutanee del margine dorsale e ventrale della pinna; nel mezzo della regione assile, in direzione dorso-ventrale le sezioni trasversali del tubo neurale, della corda e dell'intestino caudale; lateralmente a questi i miotomi caudali, che possono essere riuniti ventralmente all'intestino caudale da un tratto impari mesenchimatico.

Stabilito così il piano topografico degli abbozzi dei singoli territori organo-formativi allo stadio iniziale di neurula, mi fu possibile aggredire con metodi sperimentali l'analisi causale della formazione del bottone caudale. Il problema che mi sono posto si può press'a poco così porre: nello sviluppo normale, quale importanza hanno i diversi abbozzi degli organi, localizzati nella gemma caudale, per la formazione della coda?

Già da mie precedenti ricerche (1931) risulta, che si possono ottenere delle code esternamente completamente normali, che contengono all'interno, come organi assili, soltanto il tubo neurale o solamente i somiti, perciò con notevole deficienza di organi. Nelle mie esperienze ed in altre analoghe di HOLTGRETER (1933, 1934) e di MANGOLD (1932, 1933), erano state indotte delle code completamente sviluppate, provviste di strisce di pigmento laterali, nonché di lembo dorsale e ventrale della pinna ecc., mediante impianti di pezzi posteriori di piastra midollare. Questi risultati permettevano di supporre che anche la formazione di una gemma caudale normale potesse essere notevolmente indipendente dai suoi singoli abbozzi, che cioè questi si potessero sostituire in via dinamica e meccanica.

Ecco lo scopo della nuova serie di esperienze da me effettuate ed i cui risultati verranno qui brevemente riassunti e discussi. Gli esperimenti furono eseguiti su specie del genere *Ambystoma* (*A. maculatum*, *A. tigrinum*, *A. mexicanum*) e *Molge* (*M. vulgaris*, *M. alpestris*, *M. s. g. Triturus cristatus*), con operazioni omo-, etero- e xenoplastiche.

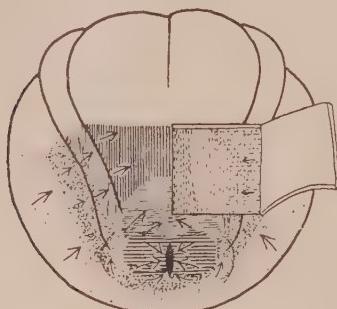


Fig. 1.

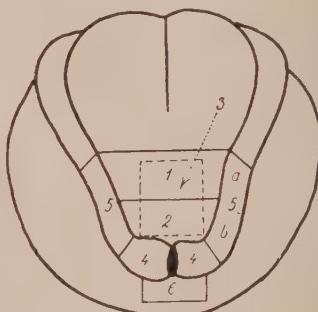


Fig. 2.

I. — *Esperimenti di isolamento per lo studio delle capacità dinamiche dei singoli abbozzi nel territorio presuntivo della coda.* — I varî territori dell'abbozzo neurale della coda furono trapiantati secondo lo schema della fig. 2, sulla parte ventrale di embrioni nello stadio iniziale di bottone caudale. Un confronto col piano degli abbozzi ottenuto mediante i contrassegni vitali (fig. 1), dimostra che corrisponde:

- Segmento 1: al quarto quinto della piastra midollare.
- Segmento 2: al quinto posteriore della piastra midollare.
- Segmento 3: alla regione cordo-mesodermica.
- Segmento 4: ai labbri laterali del blastoporo.
- Segmento 5: ai cercini midollari.
- Segmento 6: al territorio del labbro ventrale del blastoporo.

Segmento 1. Si differenziò sempre in un tubo neurale allungato, localizzato all'interno dell'embrione (v. anche BYTINSKI-SALZ, 1931), talora fortemente ripiegato. Non si osservò mai una accentuata sporgenza visibile esternamente.

Segmento 2. Si differenziò sempre nei miotomi, talvolta seriati, e diede sempre luogo a delle escrescenze allungate cilindriche, sulla parte ventrale dell'embrione (v. anche BYTINSKI-ALZ, 1931 e BIJTEL, 1936). Se insieme con esso era stato trapiantato anche il tubo neurale caudale, si poteva ottenere la contrazione autonoma di tali prolungamenti della coda.

Segmento 3. Formò soltanto coda oppure coda e muscolatura, raramente vescichette intestinali accessorie (se il pezzo impiantato era troppo largo!). L'impianto venne a costituire in quasi tutti i casi delle gobbe coniche o esrescenze allungate, nelle quali raggiungeva l'estremità. La coda si presentava soltanto raramente rettilinea, per lo più era piegata a S oppure raggomitolata.

Segmento 4. Si differenziò in muscoli, mesenchima ed epidermide. Il pezzo impiantato appariva per lo più disteso sulla parete del ventre. Di rado si osservò un breve prolungamento; e molto raramente si ottenne la formazione di una piccola pinna (forse indotta?). Sebbene non si possa parlare di un allungamento del pezzo impiantato, tuttavia l'epidermide mostrò una netta tendenza a crescere in superficie.

Segmento 5. Si differenziò in epidermide, in cellule pigmentate (v. anche DU SHANE, 1936), cellule mesenchimali derivanti dall'ectoderma, e raramente in cellule gangliari (v. RAVEN, 1936). Formò per lo più dei prolungamenti o nodi visibili esternamente, mai però lembi di pinna (come quelli descritti da TERNI, 1934).

Segmento 6. Si differenziò diversamente, a seconda che era stato trapiantato solo ectoderma del labbro ventrale del blastoporo, oppure anche il mesoderma. Nel primo caso l'impianto si fuse completamente con la parete del ventre differenziandosi in epidermide. Nel secondo si ebbe al disotto dell'epidermide un piccolo nodulo o un'intumescenza appiattita contenente all'interno cellule mesenchimatiche.

CAPACITÀ DI « EVOCAZIONE » NELLA REGIONE VENTRALE DELL'EMBRIONE OSPITE.

I territori dell'ospite manifestarono reazioni differentissime all'impianto dei territori embrionali sopra descritti. Risultò che l'ectoderma dimostrava la maggior facilità a reagire, sebbene potessero partecipare a induzioni provocate dall'impianto, anche il mesoderma e l'endoderma. In quasi tutti i casi, ove l'epidermide dell'ospite ricopriva l'impianto, si formarono ingrossamenti dell'epidermide talora paragonabili a gibbosità appiattite.

Da abbozzi differenziati di organi si ottennero:

1) *Coda* il cui asse corrispondeva al pezzo impiantato, con lembi sacciformi della pinna. Questi si potevano ottenere su tutta la superficie ventrale, dalla regione cardiaca fino all'ano; risultarono specialmente bene sviluppati nella metà posteriore del corpo, mentre cranialmente alla regione epatica si formavano soltanto piccoli lembi sacciformi. In tutti i casi i lembi della pinna apparivano disposti secondo l'asse longitudinale dell'embrione, più tardi per ragioni meccaniche, si piegavano secondariamente su un lato. In molti casi partecipava alla formazione della coda indotta il materiale della base della coda dell'ospite (endoderma e mesoderma).

2) *Formazioni di estremità*: queste apparirono finora soltanto nelle adiacenze delle estremità anteriori, quasi al limite della regione epatica. In alcuni casi si ebbero doppie le estremità dell'ospite, certamente in seguito ad influenza meccanica dell'impianto sull'abocco proprio dell'ospite. In altri casi però l'estremità differenziata non aveva rapporti specifici con l'abocco dell'ospite, e certamente era provocata dal pezzo trapiantato. Lo sviluppo delle estremità poteva variare fortemente; nei casi meno evidenti si ottenne un prolungamento digitiforme con asse cartilagineo non segmentato; nel migliore caso un'estremità rudimentale segmentata con asse di simmetria palmare-ulnare. Ciò dimostra che il « campo delle estremità » (FILATOV, 1933) non si estende soltanto al di sopra dei lati del corpo, ma anche sulla parte mediana ventrale, almeno dalla regione cardiaca a quella epatica.

3) *Gemme mesenchimatiche*: nelle adiacenze del pezzo impiantato comparvero talora dei cumuli mesenchimatici a forma di gemme. In un caso 2 gemme di tal genere apparivano simmetriche al pezzo impiantato (v. anche RAVEN, 1935). In sei casi, nei quali gli ospiti si svilupparono sufficientemente, non si poté riscontrare un ulteriore sviluppo di tali gemme, anche negli stadi in cui le estremità anteriori (dell'ospite) avevano 3 e 4 dita, e quelle posteriori erano rappresentate da gemme coniche allungate. Non dovrebbe dunque trattarsi di « gemme formative di arti », bensì di concentrazioni locali di mesenchima, in forma di gemme, che tuttavia non ricevettero gli stimoli necessari all'ulteriore differenziamento.

4) *Pigmento*: cellule pigmentate, derivate dall'ospite, comparvero in abbondanza nelle adiacenze del pezzo impiantato, molto frequenti in ispecie in relazione con altre induzioni (induzioni di estremità e di coda).

5) *Prolungamenti dell'intestino*: nella formazione di prolungamenti del pezzo impiantato appare sovente un'estroflessione a mo' di ernia della parete intestinale alla base del prolungamento, che nei suoi stadi iniziali si può forse spiegare in modo puramente meccanico. Assai presto però in questi territori endodermici si inizia un'attiva moltiplicazione cellulare, che si palesa, alla conta numerica dei nuclei, fino del 70% maggiore che nei tratti intestinali craniali e caudali. Si vengono così a costituire dei prolungamenti intestinali molto lunghi, che terminano nel pezzo impiantato a fondo cieco. Non ho osservato finora la formazione di un ano secondario, come è stata ottenuta antecedentemente da me (1931) e da RAVEN (1935) con trapianti nella gastrula. In alcuni casi, dove non si rilevava dall'esterno un prolungamento dell'intestino, si costituivano dentro di esso delle pieghe intestinali accessorie, rivolte verso il pezzo impiantato.

II. — *Esperienze di difetto per l'esame della formazione di gemme caudali in assenza di diversi abbozzi di organi*. — I segmenti 1-6 della neurula furono asportati o separatamente o in gruppo, ed in loro sede fu trapiantato ectoderma del ventre e del fianco (talora insieme con mesoderma). I pezzi

trapiantati contrassegnati con colorazione vitale dovevano impedire processi di regolazione e di cicatrizzazione e servire, contemporaneamente, a palesare dall'esterno le dimensioni del territorio trapiantato.

Asportazione del segmento 1 (soltanto piastra midollare): dà come risultato larve prive completamente di tubo neurale nella coda. Dai cercini midollari si erano sviluppati da entrambi i lati due lembi di pinna separati nel mezzo dal materiale impiantato (v. anche HOLTGRETER, 1935). Questo risultato in *Molge* si ottenne tuttavia soltanto se si fece cicatrizzare un pezzo del territorio trapiantato con la ferita. Altrimenti i cercini midollari si chiusero sempre formando una lamina caudale unica. Gli embrioni appaiono sovente ripiegati dalla parte ventrale.

Asportazione del segmento 1 e da ambo le parti i segmenti 5 a (piastra midollare e cercini midollari): ne risultano larve prive del tubo neurale caudale e del lembo dorsale della pinna (v. anche VOGT, 1931). Gli embrioni sono sempre fortemente ricurvi dalla parte ventrale. In alcuni casi l'estremità posteriore del corpo, a cominciare dalla regione asportata, è priva di pigmento, la coda e la parte posteriore sono insensibili a stimoli meccanici e rimangono tali anche in quei casi rari, nei quali si verifica rigenerazione del tubo neurale fino all'estremità della coda; in questi casi mancano sempre i gangli spinali.

Asportazione del segmento 2 (miotomi della coda): ne risultano larve con code accorciate e con diminuzione nel numero dei somiti caudali. VOGT (1931) ottenne con questa esperienza anche code normalmente sviluppate prive di somiti e contenenti soltanto corda, tubo neurale e mesenchima. All'interno la corda si presenta spesso fortemente piegata ed attorcigliata. La formazione dei lembi della pinna è normale. Se si asporta solo una metà del materiale dei miotomi, si ottiene una coda diritta di lunghezza normale, la quale può essere notevolmente difettosa dei somiti caudali; per lo più però i somiti sono presenti in numero minore del normale, oppure sono sostituiti da mesenchima. L'orlo anale manca sempre. Degno di nota è il fatto che l'embrione non si contrae verso la parte operata, contrariamente a quanto accade in seguito all'asportazione del labbro del blastoporo (somiti posteriori).

Asportazione del segmento 2 (miotomi della coda) *e di ambedue i segmenti 5 b* (parte posteriore del cercine midollare). In questi embrioni la formazione della coda si presenta notevolmente ridotta. La lamina dorsale della pinna manca. Le estremità posteriori della corda e del tubo neurale sono fortemente ripiegate e talvolta attorcigliate.

Asportazione del segmento 3 (cordo-mesodermico): ne risultano embrioni in cui manca completamente la corda nei segmenti posteriori somatici e caudali. I miotomi si fondono sulla linea mediana, al di sotto del tubo neurale. Gli embrioni si sviluppano dapprima normali esteriormente; più tardi però interviene un accentuato ripiegamento laterale a forma di S di tutta

la parte posteriore del corpo. I miotomi somatici posteriori sono accentuatamente schiacciati in senso cefalo-caudale.

Asportazione del segmento 4 sinistro (labbro del blastoporo): ne risulta una forte torsione della gemma caudale in via di accrescimento verso la parte operata, che però si regola dopo nel corso dello sviluppo (v. anche VOGT, 1931). Ambedue i lembi della pinna sono sviluppati normalmente. All'interno il danno derivato dall'asportazione è relativamente piccolo rispetto all'entità dell'operazione. Il numero dei somiti può essere diminuito di 1-4, ed i somiti mancanti appartengono alla parte posteriore del corpo. Il territorio impiantato si invaginò parzialmente in molti casi, situato come era nella regione dal 10-15 somite.

Asportazione del segmento 4 da ambo le parti (labbri del blastoporo): ne risultarono embrioni con gemma caudale normale ad accrescimento rettilineo. Le larve sono piegate per lo più dalla parte dorsale. Il lembo ventrale della pinna spesso manca completamente.

Asportazione del segmento 5 da ambo le parti (cercini midollari): ne risultarono embrioni privi del lembo dorsale della pinna e di tutto il pigmento nella regione operata (v. anche TERNI, 1934; DU SHANE, 1935). Se la parte asportata è molto piccola, si può formare, per un processo regolativo, una lamina completa della pinna. Bisogna tuttavia osservare, che in casi singoli si ottengono embrioni con pigmentazione normale senza lembo dorsale della pinna, ed embrioni con lembo dorsale normale senza pigmento. Il mesenchima della lamina della pinna e le cellule pigmentate sono perciò probabilmente localizzate in parti differenti nel cercine midolare, oppure possono svilupparsi uno indipendentemente dall'altro.

Asportazione del segmento 6 (regione ventrale del blastoporo): ne risulta mancanza dei labbri anali e difetti al lembo ventrale della pinna. L'endodorma intestinale si trova all'esterno nelle vicinanze dell'ano. Poichè nelle sezioni di questa regione si riscontrava sempre l'intestino caudale, che secondo BIJTEL (1929) è ivi localizzato, è possibile che il suo abbozzo si trovi al momento dell'operazione già parzialmente all'interno dell'embrione, od anche che esso si sia regolato dal segmento più caudale dell'intestino.

Zoologia. — *Sulla natura della peritrofica di «Reticulitermes lucifugus (Rossi)»⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di ELENA PLATANIA, presentata dal Socio A. Russo.*

La natura chimica della membrana peritrofica degli insetti è tutt'ora molto controversa. Diversi autori le hanno attribuito natura chitinosa, così Schneider (1887)⁽³⁾, Biedermann (1898)⁽⁴⁾, Berlese (1909)⁽⁵⁾, Müller (1922)⁽⁶⁾, Ertogroul (1929)⁽⁷⁾, Hoevener (1930)⁽⁸⁾, Wigglesworth (1930)⁽⁹⁾ Dehn (1933)⁽¹⁰⁾. Altri invece escludono che la chitina entri nella sua composizione, come Petersen (1912)⁽¹¹⁾ per l'Ape, o lo ritengono molto improbabile, come Montalenti (1930)⁽¹²⁾ per le Termiti. Secondo Deegener (1913)⁽¹³⁾ la membrana che circonda gli alimenti nel mesenteron degli insetti, è di

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata della R. Università di Catania.

(2) Pervenuta all'Accademia il 6 luglio 1936.

(3) A. SCHNEIDER, *Ueber den Darm der Arthropoden besonders der Insekten*. «Zool. Anz.», Bd. 10, 1887.

(4) W. BIEDERMANN, *Beiträge zur vergleichenden Physiologie der Verdauung*. «Pflügers Arch.», Bd. 72, 1898.

(5) A. BERLESE, *Gli Insetti*. Milano, 1909.

(6) M. MÜLLER, *Rhyphus und Mycetobia mit besonderer Berücksichtigung des larvalen Darms*. «Arch. für Naturgesch.», Abt. A., 1922.

(7) T. ERTOGROUL, *Sur l'origine de la membrane peritrophique chez la ver à soie*. «C. R. Ac. Sc.», Paris, vol. 188, 1929.

(8) M. HOEVENER, *Der Darmtraktus von Psycoda alternata, und seine Anhangdrüsen*. «Z. Morph. Ökol. Tiere», Bd. 18, 1930.

(9) V. B. WIGGLESWORTH, *The formation of the peritrophic membran in insects, with special reference to the larvae of Mosquitoes (Dipt)*. «Quart. J. Micr. Sci.», London, vol. 73, 1930.

(10) M. DEHN, *Untersuchungen über die Bildung der peritrophischen Membran bei den Insekten*. «Z. Zellforsch. u. micr. Anat.», Bd. 19, 1933.

(11) H. PETERSEN, *Beiträge zur vergleichenden Physiologie der Verdauung. V. Die Verdauung der Honigbiene*. «Pflügers Arch.», Bd. 145, 1912.

(12) G. MONTALENTI, *L'origine e la funzione della membrana peritrofica dell'intestino degli Insetti*. «Boll. Ist. Zool. Roma», vol. 8, 1930.

(13) P. DEEGENER, *Der Darmtraktus und seine Anhänge*. «Schröders Handbuch der Entomologie», Bd. I, Iena, 1913.

natura chitinosa in talune specie, ed in questo caso deriva dall'intestino anteriore; in altre non è chitinosa, e deriva dalle cellule del mesenteron. Secondo l'A. il nome «peritrofica» dovrebbe riservarsi a quest'ultima formazione; la prima, di natura chitinosa, si dovrebbe indicare col nome di «imbuto» (Trichter).

Nel corso di alcune mie ricerche, di prossima pubblicazione, sul tubo digerente di *Reticulitermes lucifugus*, ho preso anche in esame la natura chimica della peritrofica, che finora non era stata studiata da nessun Autore. Infatti, Montalenti⁽¹⁾, che recentemente ne ha studiato l'origine e la funzione in *Calotermes flavicollis* e *Termes lucifugus*, dice di non aver fatto speciali ricerche sulla sua natura; all'A. sembra però molto difficile poter ammettere che sia costituita essenzialmente da chitina.

Ho anzitutto eseguito la cosiddetta reazione del *chitosano*, consigliata per la dimostrazione della chitina. Alcune peritrofiche, estratte cautamente dall'intestino, venivano riscaldate a 140°, in bagno ad olio, per 10-15 minuti, in una soluzione al 40% di idrato sodico; indi, lavate in alcool e in acqua, venivano trattate dapprima con soluzione iodo-iodurata e successivamente con acido solforico al 5%. Le membrane assumevano la caratteristica colorazione violetta, che si ha in presenza di chitina. Ho ottenuto gli stessi risultati con un procedimento molto più semplice, cioè trattando con l'alcali tutto il tubo intestinale: i tessuti rapidamente si dissolvevano, e rimaneva la sola peritrofica, che veniva sottoposta al trattamento già descritto. La reazione ha dato esito positivo anche limitando il riscaldamento in alcali alla temperatura di 50°-60°, ma protraendo il trattamento per 15 giorni. Wigglesworth⁽²⁾ ha eseguito la reazione del *chitosano* sulla peritrofica di diversi Ditteri con risultato positivo. Sembra che l'A. consideri come chitina anche la peritrofica delle Termiti, sebbene dal testo non risulti che egli abbia eseguito, in questo caso, la reazione. Con lo stesso metodo Dehn⁽³⁾ ha potuto dimostrare l'esistenza di chitina nella peritrofica di tutte le specie di Imenotteri, Lepidotteri, Coleotteri, Ditteri, Ortotteri, Odonati, Ephemeridi esaminate.

Ho cercato anche di vedere se nella costituzione della peritrofica di *Reticulitermes lucifugus* entri qualche altra sostanza oltre la chitina. Avendo osservato che le cellule mesointestinali elaborano del muco, ho pensato che tale sostanza potesse entrare a far parte della peritrofica, tanto più che, secondo Berlese⁽⁴⁾, nella peritrofica di diversi insetti si osserva un deposito di sostanza mucosa.

(1) Loc. cit.

(2) Loc. cit.

(3) Loc. cit.

(4) Loc. cit.

Su sezioni d'intestino, fissato in Bouin, ho eseguito la colorazione con mucicarminio ed ho rilevato che la peritrofica assumeva costantemente una caratteristica colorazione rossa; con la tionina e il blu di toluidina, dopo fissazione in sublimato, una tinta rossa violacea. Con il blu di toluidina anzi, è stato possibile distinguere a volte uno straterello interno regolare colorato in viola nerastro, ed uno esterno irregolare, colorato in rosso.

Questi risultati inducono ad ammettere che nella costituzione della peritrofica di *Reticulitermes lucifugus* entri, accanto alla chitina, un'altra sostanza di natura mucosa.

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1936 (Anno XIV)

(Ogni Memoria e Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo)

Geologia (Geomorfologia). — *L'analisi panoramica nella descrizione geomorfologica della Liguria.* Nota⁽¹⁾ del Corrisp. G. ROVERETO.

Ora che lo studio geologico della Liguria si può dire presso al termine, si può trarre dallo stesso una descrizione geomorfologica; ma la difficoltà principale che si incontra è quella di essere completi nella utilizzazione degli elementi litologici e tettonici, e nella descrizione morfologica.

Ho riconosciuto che uno dei modi per avvicinarsi alla completezza è l'analizzare, da determinati punti panoramici, di ampio orizzonte, i principali assieme: monti, colline, costa.

Nella presente Nota mi riferisco alle colline delle Langhe e del Monregalese, di cui credo aver potuto riconoscere parecchie caratteristiche, osservando da uno dei più notevoli dei loro punti panoramici, dalla torre di Monbarcaro, a oltre 900 m. di altezza.

Come oggi si presenta, la profilazione del complesso delle colline della Bormida di Spigno all'Ellero, comprese quindi le colline del Monregalese, veduta da Monbarcaro induce a sospettare che tutta questa regione sia emersa nell'ultima fase del suo sollevamento, per movimenti verticali, o per un rigonfiamento epirogenetico, assai ampio e piatto. La faglia di Mondovì, di cui dico fra poco, avrebbe accompagnato dal lato di ponente questo movimento; verso settentrione si trova invece che si passa al piegamento neogenico, in sinclinale, della regione dell'Astigiano; ma il profilo delle colline che occupano il fianco meridionale di tale sinclinale non segue l'inclina-

(1) Pervenuta all'Accademia il 21 luglio 1936.

zione degli strati, si è manifestato dopo la piega, ed è il profilo residuo di uno spianamento pressochè orizzontale, mantenuto unito dall'egualanza di distanza e di azioni erosive fra le correnti di nuova conseguenza.

A nord di Monbarcaro, ad es., questo profilo si vede scendere lentamente, e di pochissimo verso settentrione, verso la depressione astigiana; a sud di Monbarcaro è invece per lungo tratto pressochè orizzontale; il suo complesso quindi, benchè alquanto abbassato dell'erosione, non indica un sollevamento in curva.

Per conoscere lo sviluppo morfologico si può immaginare, che lo spianamento, essendo dovuto ad azioni abrasive, sia passato per lo stadio di una grande *piattaforma costiera*, in parte emersa a marea bassa, tutta sommersa a marea alta, poi diventata gradualmente tutta emersa, senza terrazzamenti, come si osserva al presente lungo la costa neogenica dell'America Meridionale.

Al contrario, la grande prevalenza rocciosa di marne poco indurite, la presenza di numerose correnti di *conseguitazione derivata* (« Trattato », p. 1006) dal rilievo alpino, l'abbassamento di tutti i livelli di sbocco secondo linee di minima pendenza, in relazione ai movimenti eustatici del quaternario, hanno prodotto incisioni profonde, ripetute e ravvicinate, sino al disotto dei 500 m., nella massa sollevata, che hanno così ridotta a un insieme collinoso tipicamente *diramato*, accompagnato tutt'attorno da una zona collinosa più bassa e più piatta, e al di là di questa dalle pianure di Cuneo e di Alessandria.

Il numero delle incisioni è stato aumentato dai corsi di *conseguitazione propria*, come ho distinto per studiare le colline adriatiche, nati nella stessa massa collinosa, quali sono quelli dell'Uzzone, del Belbo, del Rea, per ricordare solo gli entranti nella zona collinosa alta.

Aumentano l'interesse della zona i fenomeni di orogenesi attenuata che sono avvenuti attorno alla collina.

Si ha ad occidente, come ora si è detto, la pianura di Cuneo, la quale si addentra sino al piede delle Alpi, e ha l'apparenza di una depressione, ossia di un affondamento, in contrasto con l'epirogenesi, fra Alpi Occidentali e Liguri, al loro divergere con incurvamento e con principio di virgazzione; depressione che si è colmata per alluvionamento, a cominciare dall'emersione postpliocenica, sino ad un livello più alto dell'attuale, com'è di tutta la pianura padana, e di cui sono residui gli altipiani di Fossano e gli altri, descritti dal Sacco.

Ora, questo affondamento, che finora forse alcuno ha supposto, si può accettare, studiando il margine delle colline delle Langhe; e si può così pure ridurre in ristretti limiti l'ipotesi più facile, che tutta la piatura sia dovuta alla convergenza dell'erosione conseguente dei diversi fiumi alpini che la solcano.

Difatti, la serie dei terreni oligocenici e miocenici, che appiattiti embricatamente, formano le Langhe, si trovano, come sempre si verifica lungo

la depressione padano-adriatica, diretti come la montagna, e quindi debbono essere trasversali all'orlo orientale della pianura che è diretto normalmente. Questa condizione difatti si verifica per tali terreni sino all'alveziano incluso: ma a cominciare dalle marne azzurro-chiaro del tortoniano, si osserva che queste, uscendo dal fondo del sinclinale dell'Astigiano, si dirigono verso mezzogiorno, e giungono con tale direzione sino a Mondovì; ossia, cingono tutta la pianura del lato orientale, senza essere tagliati trasversalmente dal confine della pianura stessa, dimostrando così di essere l'orlo di una depressione sinclinale, determinatasi alla fine dell'elveziano.

In nessun'altra parte della regione Ligure-Piemontese si riconosce, in maniera così evidente, un movimento epirogenetico, postelveziano, e di tale intensità; solo ebbi già ad osservare, che in Valle Scrivia esiste una discordanza fra elveziano e tortoniano; una epirogenesi postelveziana, o, come altrimenti dicesi, vindoboniana è nota però di altrove, e sino al carreggiamento (Lepini, Circeo, Baleari, ecc.).

Stabilitasi nella geosinclinale padana la nuova orlatura, in conformità di questa si sono avuti successivamente la emersione semi-continentale del pontico, il regime schiettamente marino del pliocene, la condizione paludosò-lacustre del villafranchense, si sono invece verificati trasversalmente, il colmamento quaternario, e l'asportazione dello stesso.

Nel campo più strettamente morfologico della osservazione panoramica, le colline marnose delle Langhe possono essere esempio: di quei sottili e allungati rilievi a fianchi ripidi, a dorso unito, quasi senza calanchi, che i piemontesi chiamano *costiglie*; e sui cui dorsi si allungano bellamente gli abitati, con le loro torri, accompagnate da qualche ciuffo di alti alberi; del sopralluvionamento che si osserva lungo il Tanaro, quando questo entra fra le colline (a Villa Tanaro), e fa opera di *seppellimento* (« Trattato », p. 1003), e del sopralluvionamento della Rea a Dogliani, di poi asportato per riattivazione del livello di sbocco (non vi è però traccia di un sopralluvionamento che abbia deviato il Tanaro per tracimazione, e l'abbia immesso nel fondo del sinclinale astigiano, che ora percorre); della mancanza di *cuestas*, perchè la serie dei terreni ha composizione piuttosto uniforme, e perchè mancano corsi susseguiti notevoli, solo si ha qualche accenno di rilievo trasversale con le arenarie elveziane; della variata, e in vari stadi, erosione dei bassi versanti marnosi, scalzati al piede dalle volute delle correnti, le quali producono ripidezze e spellature bianchegianti, in cui la roccia è già spoglia, o sta spogliandosi, o è in via di rivestirsi, sta incidentando o è tutta una rovina, o è in via di uniformarsi, e che per l'abitante delle Langhe, che vede da esse minacciati i suoi vigneti, e interrotta l'uniformità pingue della sua terra, costituiscono le *rocche*.

Guardando lungo il piede delle Alpi Liguri, verso occidente, la discesa delle varie costole a tanti sporgimenti di monti come isolati, oltrepassa le linee di costa dell'oligocene (intorno a 1000 m.) e del miocene (di poco

più bassa), e giunge sin sopra alla depressione di conseguenza periferica di Mondovi-Santuaria-San Michele-Lesegno, oggi usufruita in parte dalla ferrovia Ceva-Fossano e in parte dalla tranvia San Michele-Mondovi.

E questa discesa ha eccezionalmente, in qualche tratto, un profilo regolare, a piano inclinato, com'è quello che consiste in un tratto finale, da Vasco (m. 621) a Mondovi (m. 390); però a monte di Vasco, come in molti altri punti, il piano di discesa, o di ascesa, è interrotto da depressioni trasversali, susseguenti, che nel caso di Vasco è quella di Monastero Vasco, dalla quale, con un profilo diventato irregolarissimo, si giunge sino alla isoipsa dei 1000 m. sopra notata.

È quindi un complesso di fenomeni erosivi, che possono essere stati favoriti da una curva, o dalla curva di sollevamento epirogenetico postoligocenico, curva che verrebbe a terminare lungo la incisione conseguente periferica; perchè a settentrione di questa si vede, che il complesso delle ondulate colline *a costiglie* del Monregalese, si presenta all'occhio livellato orizzontalmente, con le maggiori alture a m. 598 (Vicoforte), a m. 631 (Bric della Bicocca), a m. 559 (Mondovi Piazza) ecc., quindi in condizioni di superficie fondamentale affatto differenti.

Queste colline sono costituite da miocene medio, e coperte sino alla quota di m. 559, da sedimentazioni litoranee e argille-marnose, rosso-giallastre, plioceniche; e ciò indica che la superficie fondamentale di denudazione di queste colline monregalesi è derivata dalla regressione pliocenica, che aveva origine probabilmente dove poi si incavò la depressione di conseguitazione periferica San Michele-Santuaria.

Al piede delle colline, con un dislivello di circa 270 m., si distende il terzo elemento morfologico della regione, ossia la pianura di Cuneo. Se questa pianura portiamo all'altitudine originaria, al livello che è ora rappresentato dai pianalti, abbiamo che la differenza di altezza fra lo spianamento di regressione pliocenica al sommo delle colline e l'accumulo fluviale quaternario della pianura va diminuita di 140-160 m.; ma rimane sempre notevole, ed in più è eccezionale, se consideriamo che lo stesso dislivello esiste fra il pliocene della collina, e quello del piano; poichè il pliocene si riconosce lungo il letto del Tanaro, e dei suoi affluenti di sinistra, e lungo la Stura di Demonte sino a Salmur (dai rilievi del Sacco in Foglio «Cuneo») ad almeno 115 m. più in basso che a Mondovi Piazza.

Ora, tale dislivello non si può spiegare che con una faglia, che suppongo corra lungo l'Ellero, al piede della collina, piede che sarebbe così morfologico e tetttonico; e questa faglia che comincierebbe a Viale, a settentrione di Roccaforte, seguirebbe l'Ellero per un tratto, e poi, staccandosene, andrebbe verso Benevagienna e Cherasco, limitando a distanza il contorno delle colline della destra del Tanaro.

A ciò va unita una condizione morfologica spiccatissima, cui ho accennato nel paragrafo precedente: la serie pliocenica-miocenica delle colline

pedemontane e del sinclinale astigiano termina verso ponente, e con essa si tronca, dal lato di ponente, il rilievo collinare secondo il corso Ellero-Tanaro, e, se si vuole, del vecchio Tanaro da Bra a Carmagnola sul Po; succede la grande pianura di Cuneo, senza che dall'altro limite di questa, lungo le Alpi, si riprenda tale serie neogenica.

Quindi, spettano al *Piemonte superiore*, come lo chiamava il Nallino, illustratore settecentesco di questa regione: l'affondamento dell'area corrispondente alla pianura cuneese, per movimenti verticali e per epirogenesi negativa in tempi immediati al pliocene; le erosioni che distruggono per lungo tratto i residui neogenici della cintura; il periodo quaternario di intenso alluvionamento, che produce l'altipiano; il terrazzamento successivo, e la riduzione dell'altipiano di colmamento ai pochi lembi isolati di Fossano, di Salmur, di Bene Vagienna fra Tanaro e Maira; gli alti terrazzi in pianura collegati ai pianalti e alcuni pedemontani senza pianalti.

Teoricamente si può dire, che la zolla compresa nella parte interna della curvatura per la quale si passa, dalla direzione delle Alpi Occidentali a quella delle Alpi Liguri, si è affondata a seguito dell'accentuazione di quest'incurvamento e di faglie.

Già ho supposto, a questo proposito, fin dal 1904, una piega trasversale, come quella che si forma in un foglio di carta che esperimentalmente dapprima si pieghi in senso verticale, ad anticlinale, e poi da un lato, in senso orizzontale.

Secondo Argand (Congr. Géol. Intern., XIII^{me} Sess., vol. I, p. 177. Liège, 1924), la genesi di vere pieghe trasversali in una catena ben regolata è possibile in un solo caso, dove un arco di una certa lunghezza si contragga ad accentuare la curvatura del suo piano; e questo si accorda con il mio vecchio punto di vista.

Dopo ciò si può anche dire, che la collina pedemontana del bacino monregalese non è sorta con la montagna, ma è un'aggiunta posteriore: e con questo chiudere una trattazione, di carattere particolare, anche dal punto di vista geomorfologico, che sin dai suoi tempi prospettava Targioni Tozzetti (in *Prodromo della Corografia ecc.*, Firenze, 1754), conferendole la denominazione di *bunologia*: nessuna denominazione è stata più dimenticata di questa.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Su una nuova costruzione grafica del piano osculatore.* Nota⁽¹⁾ di U. CASSINA, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

In una mia Nota precedente⁽²⁾ ho ricondotto il problema della costruzione grafica del piano osculatore ad una linea sghemba qualunque, al problema analogo per una quartica di prima specie approssimante, di cui ho dato una semplice risoluzione lineare.

E. Bompiani, ha ripreso poi il problema generale della costruzione grafica del piano osculatore ad una linea sghemba qualunque e lo ha risolto esaurientemente in più modi e direttamente, cioè senza ricondurlo ad un problema algebrico⁽³⁾.

È particolarmente interessante il caso in cui la linea sghemba assegnata sia rappresentata nel metodo di Monge (doppia proiezione ortogonale). Allora, la costruzione di E. Bompiani, è fondata sull'uso di un teorema (ch'egli precedentemente dimostra) sull'esistenza di una certa proiettività fra un fascio di piani ed una punteggiata; ed è ricondotta alla costruzione del centro di curvatura in un punto di un'ellisse definita come trasformata di un cerchio in un'affinità omologica ortogonale.

Però, pur partendo sempre dalla proiettività di E. Bompiani, è possibile giungere alla determinazione grafica del piano osculatore senza ricorrere alla costruzione dell'ellisse di cui sopra e quindi del centro di curvatura in un suo punto. Ho segnalato questa variante al prof. E. Bompiani, che ha avuto la cortesia di accennare ad essa in calce alla sua Nota⁽⁴⁾.

Ma poichè la costruzione che ne risulta è conveniente in molti casi (essendo eseguibile con la sola squadra), ed è giustificabile anche con un semplice calcolo diretto, reputo opportuno farla conoscere esplicitamente.

Costruzione. — Sia C una curva sghemba individuata nel metodo di Monge mediante le proiezioni C_1 e C_2 sui piani di riferimento π_1 e π_2 ; $O = (O_1, O_2)$ un suo punto, $t = (t_1, t_2)$ la tangente in O a C , ω il piano osculatore a C in O , A_1 e B_2 i centri di curvatura rispettivamente di C_1

(1) Pervenuta all'Accademia il 24 luglio 1936.

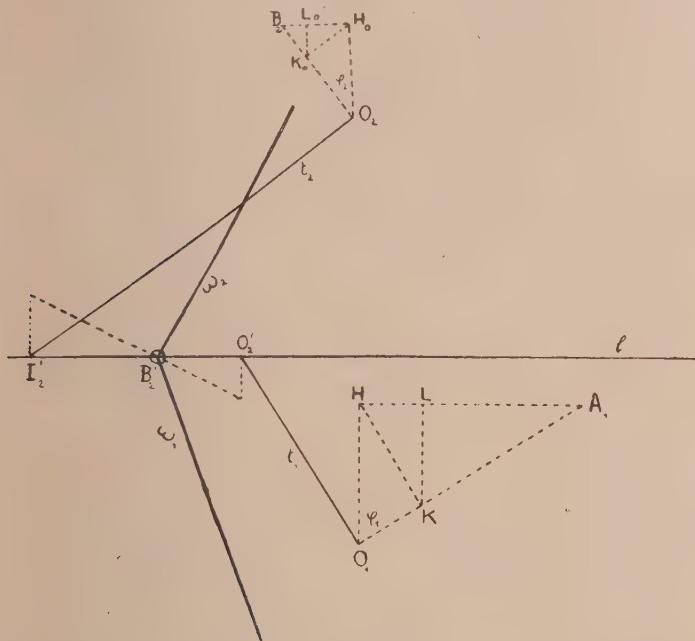
(2) U. CASSINA, *Sulla costruzione grafica del piano osculatore ad una quartica di prima specie e ad una linea qualunque.* «Rend. Ist. Lomb.» (2), 68 (1935), p. 503.

(3) E. BOMPIANI, *Costruzioni grafiche dei piani osculatori ad una curva sghemba.* «Rend. Ist. Lomb.» (2), 68 (1935), p. 911.

(4) Loc. cit. in (3), p. 915.

in O_1 e di C_2 in O_2 ; l la linea di terra e O'_2 e I'_2 le sue intersezioni rispettivamente con t_1 e t_2 ⁽¹⁾.

Sia ora H la proiezione ortogonale di A_1 (v. figura) sulla linea di richiamo per O_1 , K la proiezione ortogonale di H su $O_1 A_1$, L la proiezione ortogonale di K su HA_1 ; analogamente: sia H_o la proiezione ortogonale di B_2 sulla linea di richiamo per O_2 , K_o la proiezione ortogonale di H_o su $O_2 B_2$, L_o la proiezione ortogonale di K_o su $H_o B_2$.



Allora il piano osculatore ω taglia la linea di terra nel punto B'_2 tale che:

$$(o) \quad \frac{I_2 B'_2}{O'_2 B'_2} = \frac{H L}{H_o L_o}.$$

Nota B'_2 il piano osculatore ω è allora individuato da t e B'_2 , mediante i quali si trovano nel modo consueto le tracce ω_1 e ω_3 .

Dimostrazione. — Assunto un sistema cartesiano ortogonale in cui π_1 sia rappresentato da $z = 0$, π_2 da $y = 0$ e il piano di profilo per O da $x = 0$, si può supporre che le equazioni di C siano:

$$(I) \quad y = y_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots$$

$$(2) \quad \zeta = \zeta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots;$$

le quali, sui piani π_1 e π_2 , rappresentano anche le proiezioni C_1 e C_2 .

(1) Le notazioni adottate concordano con quelle di E. BOMPIANI.

Quindi le coordinate del centro di curvatura A_1 sono:

$$(3) \quad c_1 = -\alpha_1 \frac{1 + \alpha_1^2}{2\alpha_2}, \quad c_2 = y_0 + \frac{1 + \alpha_1^2}{2\alpha_2}, \quad c_3 = 0;$$

e quelle del centro di curvatura B_2 sono:

$$(4) \quad \gamma_1 = -\beta_1 \frac{1 + \beta_1^2}{2\beta_2}, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = z_0 + \frac{1 + \beta_1^2}{2\beta_2}.$$

La tangente t ha per equazioni:

$$(5) \quad y = y_0 + \alpha_1 x,$$

$$(6) \quad z = z_0 + \beta_1 x;$$

le quali, sui piani π_1 e π_2 , rappresentano anche le rette t_1 e t_2 . Perciò le ascisse di O'_2 e I'_2 sono rispettivamente:

$$(7) \quad x = -y_0/\alpha_1 \quad \text{e} \quad x = -z_0/\beta_1.$$

Il piano osculatore ω ha come equazione:

$$\begin{vmatrix} x & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia:

$$(8) \quad (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) x - \beta_2 (y - y_0) + \alpha_2 (z - z_0) = 0;$$

quindi il punto B'_2 ha per ascissa:

$$(9) \quad x = \frac{\alpha_2 z_0 - \beta_2 y_0}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}.$$

Dalle (7) e (9) si ha perciò:

$$(10) \quad \frac{I'_2 B'_2}{O'_2 B'_2} = \frac{\alpha_1 \beta_2 (\alpha_1 z_0 - \beta_1 y_0)}{\beta_1 \alpha_2 (\alpha_1 z_0 - \beta_1 y_0)} = \frac{\alpha_1 \beta_2}{\alpha_2 \beta_1}.$$

Siano ora φ_1 e φ_2 gli angoli che t_1 e t_2 formano con la linea di terra (cioè gli angoli che $O_1 A_1$ e $O_2 B_2$ formano con le linee di richiamo); allora per le (5) e (6) si ha:

$$(11) \quad \alpha_1 = \operatorname{tg} \varphi_1, \quad \beta_1 = \operatorname{tg} \varphi_2,$$

e quindi per le costruzioni indicate (v. figura) si ha:

$$(12) \quad H L = H K \cos \varphi_1 = H A_1 \cos^2 \varphi_1 = c_1 \cos^2 \varphi_1,$$

$$(13) \quad H_0 L_0 = H_0 K_0 \cos \varphi_2 = H_0 B_2 \cos^2 \varphi_2 = \gamma_1 \cos^2 \varphi_2.$$

Dalle quali, per le (11), (3) e (4) si deduce:

$$(14) \quad \frac{HL}{H_0 L_0} = \frac{c_1 \cos^2 \varphi_1}{\gamma_1 \cos^2 \varphi_2} = \frac{c_1}{1 + \alpha_1^2} \cdot \frac{1 + \beta_1^2}{\gamma_1} = \frac{-\alpha_1}{2\alpha_2} \cdot \frac{-2\beta_2}{\beta_1} = \frac{\alpha_1 \beta_2}{\alpha_2 \beta_1}.$$

Dalle (10) e (14) si ha quindi la (o), cioè la formula su cui è fondata la costruzione esposta.

Osservazione. — La costruzione suddetta è utile solo quando il punto B'_2 cade nel foglio (il che non avviene, per es., nelle figure che accompagnano la mia Nota dell'anno scorso). Invece, la costruzione lineare già da me data, essendo fondata sulla costruzione d'un punto X appartenente alla quartica approssimante, è certo tutta contenuta nel foglio che contiene i cerchi di curvatura di C_1 e C_2 rispettivamente in O_1 e O_2 ⁽¹⁾.

Matematica (Geometria proiettiva differenziale). — *Sulla Geometria proiettivo-differenziale di nuovi reticolati dello spazio ordinario.* Nota⁽²⁾ di G. PALOZZI, presentata dal Socio G. FUBINI.

1. Si tratta di reticolati costituiti da tre sistemi ∞^1 di superficie tali che per ogni punto dello spazio passi una superficie di ciascun sistema coi piani tangentи in quel punto distinti fra loro e non facenti fascio.

In una Nota precedente⁽³⁾ ho iniziato lo studio di questi reticolati definendo l'elemento lineare proiettivo e trattando il problema dell'applicabilità proiettiva. Completo ora quello studio introducendo altre due forme le quali, associate ad un reticolato, insieme all'elemento lineare proiettivo, possono servire ad individuarlo nel gruppo delle collineazioni.

2. Se $x (= x^i; i = 1, 2, 3, 4)$ indicano coordinate proiettive omogenee di un punto dello spazio, uno dei nostri reticolati è rappresentabile con equazioni del tipo

$$(1) \quad x = x(u, v, w)$$

(1) E. KRUPPA nella sua analisi della mia Nota⁽²⁾, («Zentralblatt f. Math.», 12 (1936), p. 309) segnala, oltre a quelle da me citate, un'altra costruzione del piano osculatore alla quartica di prima specie esposta da H. BÖHEIN nella Nota *Zur Konstruktion der Schmiegeungsebene an die Raumkurve 4. Ordnung, 1. Art.* «Z. f. d. Réalschulen», Wien, 37 (1912), che io non ho ancora potuto consultare. Osserva pure che la costruzione, mediante uno specchietto, della normale ad una linea grafica piana, che in Italia io ho trovato solo nelle *Lezioni di Geometria descrittiva* di E. BOMPIANI, è stata già esposta fin dal 1880 da E. REUSCH.

(2) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1936.

(3) Dal titolo: *L'elemento lineare proiettivo e l'applicabilità proiettiva di nuovi reticolati dello spazio ordinario.* «Rendiconti Lincei», 1930.

tali che

$$(2) \quad \Delta = |x_u, x_v, x_w, x| = 0.$$

Le x soddisfano ad un sistema del tipo

$$(3) \quad \begin{cases} x_{uu} = px_u + gx_v + bx_w + h_1 x, & x_{uv} = ux_u + lx_v + \gamma x_w + k_1 x \\ x_{vv} = cx_u + qx_v + ex_w + h_2 x, & x_{vw} = ax_u + vx_v + mx_w + k_2 x \\ x_{ww} = fx_u + ax_v + rx_w + h_3 x, & x_{uw} = nx_u + \beta x_v + \lambda x_w + k_3 x \end{cases}$$

Questo sistema individua, coi suoi sistemi fondamentali di soluzioni, un reticolato a meno di una collineazione; però non è completamente determinato dal reticolato potendosi ancora operare una trasformazione del tipo

$$(4) \quad x = \rho x' \quad , \quad \rho = \rho(u, v, w)$$

od anche effettuare un cambiamento di parametri della forma

$$(5) \quad u = u(\bar{u}) \quad , \quad v = v(\bar{v}) \quad , \quad w = \bar{w}.$$

Nella Nota citata sono pervenuto all'elemento lineare proiettivo

$$F = \frac{(adu - fdv) dw^3 + (bdv - gdw) du^3 + (cdw - edu) dv^3}{du \ dv \ dw}.$$

considerando la superficie $S(v, w)$ ⁽¹⁾, che passa per il punto x corrispondente a valori generici dei parametri u, v, w e che è definita dalle (1) quando si tiene fisso u e si lasciano variare v e w , e, su $S(v, w)$, la linea per x le cui tangenti appartengono ai piani osculatori nei punti di $S(v, w)$ alle linee u uscenti da questi punti.

Consideriamo ora la congruenza C_u delle tangenti a dette linee u nei punti di $S(v, w)$. Dal punto x esce la retta della congruenza che congiunge x con x_u ; e dal punto $x' = x + x_v dv + x_w dw$ esce la congiungente

$$(x', x'_u) = (x + x_v dv + x_w dw, x_u + x_{uv} dv + x_{uw} dw);$$

queste due rette stanno in un piano se

$$|x, x_u, x_v dv + x_w dw, x_{uv} dv + x_{uw} dw| = 0$$

cioè, per le (3), se

$$(6) \quad \gamma dv^2 - \beta dw^2 + (l - \lambda) dv dw = 0,$$

che definisce dunque i due sistemi di sviluppabili della congruenza.

(1) E le analoghe $S(u, w)$, $S(u, v)$.

Ne segue che, nella forma

$$K' = \gamma dv^2 - \beta dw^2 + (l - \lambda) dv dw,$$

tutti i termini si alterano, per effetto delle trasformazioni (4) e (5), per uno stesso fattore; e poichè

$$\gamma' = \gamma \quad , \quad \bar{\gamma} = \gamma \frac{u' v'}{w'} \quad ,$$

$\gamma \frac{du dv}{dw}$ e quindi anche

$$K_1 = K' \frac{du}{dv dw}$$

è *intrinseca ed invariante*. Lo stesso accade delle altre due forme analoghe K_2, K_3 , le cui espressioni si deducono da quella di K_1 con la rotazione delle lettere $\alpha, \beta, \gamma; l, m, n; \lambda, \mu, \nu; u, v, w$.

Le tre forme K_1, K_2, K_3 si possono sostituire con le altre due

$$K = L du + M dv + N dw$$

ove

$$(7) \quad L = l - \lambda, \quad M = m - \mu, \quad N = n - \nu$$

(1) Ove $\gamma' (\bar{\gamma})$ è il coefficiente analogo a γ del sistema (3) a cui soddisfano le $x' = \frac{x}{\rho} (\bar{x} = x(u(\bar{u}), \dots))$. Le sopra scritte relazioni si possono verificare direttamente col calcolo; ma si può anche fare a meno della verifica diretta, tenendo conto dell'invarianza dell'elemento lineare proiettivo e dell'osservazione seguente.

Il piano tangente in x a $S(v, w)$ sega questa superficie secondo una curva le cui tangenti in x sono definite da

$$|x', x, x_v, x_w| = 0 \quad \text{cioè da} \quad \frac{dv}{dw} = - \frac{\alpha}{c} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{c^2} - \frac{f}{c}}$$

onde la direzione coniugata armonica p. es. di $dw = 0$ rispetto a queste due è definita da

$$cdv + \alpha dw = 0;$$

e poichè $c \frac{dv^2}{du}$ è invariante, per essere un termine di F , ne viene che è tale anche

$$(cdv + \alpha dw) \frac{dv}{du}$$

e quindi ancora $\frac{\alpha dv dw}{du}$; e analogamente $\frac{\beta dudw}{dv}, \frac{\gamma dudv}{dw}$.

e

$$P = \frac{\alpha dv^2 dw^2 + \beta dw^2 du^2 + \gamma du^2 dv^2}{du dv dw}$$

anch'esse *intrinseche ed invarianti*.

3. Dirò che la congruenza C_u è *coniugata* se le direzioni definite dalla (6) sono coniugate armoniche rispetto a $dv = 0$ e $dw = 0$. La condizione perché C_u sia coniugata è che sia $l = \lambda$; sicchè: la forma K è indeterminata soltanto per i reticolati per cui sono coniugate le congruenze C_u, C_v, C_w .

È poi evidente⁽¹⁾ che: la forma P è indeterminata solo per i reticolati le cui linee costituiscono un doppio sistema coniugato delle superficie $S(u, v), S(v, w), S(u, w)$ ⁽²⁾.

4. Il procedimento col quale si perviene a normalizzare le coordinate, nel caso dei reticolati piani⁽³⁾, suggerisce di esaminare, qualora si voglia cercare di estenderlo al nostro caso, come varia la forma

$$|x_u, x_v, x_w, x| du dv dw = \Delta du dv dw$$

quando si operano le trasformazioni (4) e (5). Si trova che le (5) la lasciano inalterata, mentre per effetto delle (4) si ha

$$\Delta' du dv dw = \frac{I}{\rho^4} \Delta du dv dw,$$

sicchè, nel nostro caso, per normalizzare le coordinate $x(u, v, w)$ basterà eguagliare questa forma ad un'altra dello stesso tipo, ma intrinseca ed invariante. Ora dal n. 2 risulta che tale è la forma

$$\alpha\beta\gamma du dv dw,$$

per cui come coordinate *normali* si potranno assumere le $x' = \frac{x}{\rho}$ ove

$$\rho = \sqrt[4]{\frac{\Delta}{\alpha\beta\gamma}}.$$

(1) Basta tener conto delle espressioni di α, β, γ .

(2) Infine: la forma F è indeterminata solo per i reticolati le cui linee sono asintotiche delle superficie $S(u, v), S(v, w), S(u, w)$. Cfr. la Nota citata.

(3) I reticolati che soddisfano a questa condizione o a quelle del n. 3 s'intendono senz'altro esclusi. V. FUBINI et ČECH, *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces*. Paris, Gauthier-Villars. Chap. X, § 59.

Continuando ad indicarle con x , sarà

$$(8) \quad \Delta = \alpha\beta\gamma$$

e quindi, essendo

$$\frac{\Delta_u}{\Delta} = p + l + \lambda \quad , \quad \frac{\Delta_v}{\Delta} = q + m + \mu \quad , \quad \frac{\Delta_w}{\Delta} = r + n + \nu,$$

sarà pure

$$(9) \quad p + l + \lambda = \frac{\partial \lg \alpha\beta\gamma}{\partial u} \quad , \quad q + m + \mu = \frac{\partial \lg \alpha\beta\gamma}{\partial v},$$

$$r + n + \nu = \frac{\partial \lg \alpha\beta\gamma}{\partial w}.$$

5. Le condizioni d'integrabilità del sistema (3) si ottengono esprimendo che, in forza delle (3) stesse, debbono essere soddisfatte le

$$(10) \quad x_{uuv} - x_{uvu} = 0 \quad , \quad x_{uuw} - x_{wwu} = 0 \quad , \quad x_{uwu} - x_{vvn} = 0$$

e le altre relazioni analoghe. Per ciò che segue, basta però scrivere per disteso le

$$(11) \quad \left| \begin{array}{l} b_v - \gamma_u + b(m - \mu) - \gamma(l + \lambda - p) + ge = 0 \\ c_w - \alpha_v + c(n - \nu) - \alpha(m + \mu - q) + cf = 0 \\ a_u - \beta_w + a(l - \lambda) - \beta(n + \nu - r) + fg = 0 \\ gv - l_u - g(\mu - q) - l(l - p) + bv - \beta\gamma + h_1 = 0 \\ e_w - m_u - e(\nu - r) - m(m - q) + c\lambda - \gamma\alpha + h_2 = 0 \\ fu - n_w - f(\lambda - p) - n(n - r) + a\mu - \alpha\beta + h_3 = 0 \\ p_v - \mu_u + cg - l\mu + ab - \gamma n - k_1 = 0 \\ q_w - \nu_v + ae - mv + \beta c - \alpha l - k_2 = 0 \\ r_u - \lambda_w + bf - n\lambda + \gamma a - \beta m - k_3 = 0. \end{array} \right.$$

e sapere che, tenendo conto di queste, le rimanenti⁽¹⁾ si possono esprimere mediante i coefficienti delle forme F, K, P. Lo si può provare molto facilmente riferendosi per un momento a coordinate normali.

(1) Non tutte indipendenti, come p. es. già si vede confrontando le (10) con le relazioni analoghe.

Le (7), le (9) e le prime tre delle (11) danno

$$(11') \quad \left\{ \begin{array}{l} p = \frac{I}{2} \left\{ \frac{\partial \lg \alpha \beta \gamma^2}{\partial u} - \frac{I}{\gamma} (b_0 + bM + ge) \right\} \\ q = \frac{I}{2} \left\{ \frac{\partial \lg \alpha^2 \beta \gamma}{\partial v} - \frac{I}{\alpha} (c_w + cN + ef) \right\} \\ r = \frac{I}{2} \left\{ \frac{\partial \lg \alpha \beta^2 \gamma}{\partial w} - \frac{I}{\beta} (a_u + aL + fg) \right\} \\ l = \frac{I}{4} \frac{\partial \lg \alpha \beta}{\partial u} + \frac{I}{2\gamma} (b_v + bM + ge) + \frac{I}{2} L \\ m = \frac{I}{4} \frac{\partial \lg \beta \gamma}{\partial v} + \frac{I}{2\alpha} (c_w + cN + ef) + \frac{I}{2} M \\ n = \frac{I}{4} \frac{\partial \lg \alpha \gamma}{\partial w} + \frac{I}{2\beta} (a_u + aL + fg) + \frac{I}{2} N \\ \lambda = \frac{I}{4} \frac{\partial \lg \alpha \beta}{\partial u} + \frac{I}{2\gamma} (b_v + bM + ge) - \frac{I}{2} L \\ \mu = \frac{I}{4} \frac{\partial \lg \beta \gamma}{\partial v} + \frac{I}{2\alpha} (c_w + cN + ef) - \frac{I}{2} M \\ \nu = \frac{I}{4} \frac{\partial \lg \alpha \gamma}{\partial w} + \frac{I}{2\beta} (a_u + aL + fg) - \frac{I}{2} N \end{array} \right.$$

le quali esprimono $p, q, r, l, m, n, \lambda, \mu, \nu$ mediante i coefficienti di F, K, P. Tenendo conto di queste, dalle rimanenti (11) si ricava poi

$$(11'') \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1 = \dots, \quad b_2 = \dots, \quad b_3 = \dots \\ k_1 = \dots, \quad k_2 = \dots, \quad k_3 = \dots \end{array} \right.$$

ove i \dots stanno ad indicare brevemente espressioni che dipendono anche esse soltanto dai coefficienti di F, K, P.

Ora, le condizioni di integrabilità delle (3) non sono altro che relazioni fra i coefficienti delle (3) stesse; e di questi coefficienti alcuni ($a, b, c, e, f, g, \alpha, \beta, \gamma$) figurano fra i coefficienti di F, K, P, e tutti gli altri ($p, q, r, l, m, n, \lambda, \mu, \nu, b_1, b_2, b_3, k_1, k_2, k_3$) sono espressi dalle (11') e (11'') mediante i coefficienti di F, K, P. Perciò è vero che le condizioni di integrabilità delle (3) che non danno luogo alle (11') e (11''), ossia proprio quelle in più delle (11), si potranno esprimere in funzione dei coefficienti di F, K, P, almeno in coordinate normali. Ed allora anche in coordinate qualunque, perchè i coefficienti di queste forme non dipendono dalla scelta di ρ .

6. Dopo ciò si può affermare che, dato un reticolato (1) per il quale valga la (2), od un suo collineare, restano determinate le forme F, K, P in cui i coefficienti risultano legati da certe relazioni (costituite appunto dalle condizioni d'integrabilità in più delle (11)). Ed è facile dimostrare che viceversa: se sono date le forme F, K, P i cui coefficienti siano legati da tali relazioni, resta determinato un sistema (3) completamente integrabile per i cui sistemi di soluzioni vale la (2), cioè resta determinato un reticolato a meno di una collineazione.

Infatti risulta dal numero precedente che le coordinate normali soddisfano ad un sistema (3) in cui i coefficienti $p, q, r, l, m, n, \lambda, \mu, v, b_1, b_2, b_3, k_1, k_2, k_3$ sono dati dalle (11') e (11'') e per il quale le condizioni di integrabilità (essendo le (11) soddisfatte per il modo stesso come sono determinati i suddetti coefficienti) si riducono solo a quelle in più delle (11). Ora queste sono soddisfatte per ipotesi; i coefficienti $a, b, c, e, f, g, \alpha, \beta, \gamma$ sono dati, perché son date le forme F, K, P ; i rimanenti sono determinati da questi e da L, M, N pure date (con le forme F, K, P); dunque resta determinato un sistema (3) completamente integrabile, e se $x = x(u, v, w)$ ne è una soluzione vale per essa la (2) in virtù della (8) e per essere (cfr. il n. 3 e in particolare l'ultima nota) $\alpha\beta\gamma \neq 0$; anzi queste $x = x(u, v, w)$ definiranno il reticolato in coordinate normali.

c. d. d.

Fisica. — *Sull'energia e l'intensità dei gruppi di neutroni emessi dal Po + Be.* Nota I⁽¹⁾ di G. BERNARDINI e D. BOCCIARELLI, presentata dal Corrisp. L. TIERI.

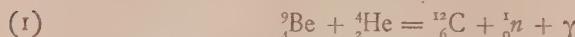
1. In una Nota precedente⁽²⁾ abbiamo descritto uno schema di circuito a valvole che permette di registrare agevolmente delle coincidenze fra contatori a moltiplicazione. Abbiamo allora anche accennato ai vantaggi che si possono realizzare, usando di due siffatti contatori in coincidenza, nello studio delle particelle ad alto potere ionizzante, vantaggi che si riassumono nella notevole sensibilità accompagnata da un bassissimo effetto di zero e nella possibilità di misurare direttamente, per mezzo di schermi assorbenti, la penetrazione delle particelle.

Con questo dispositivo, ci siamo proposti di investigare nuovamente lo spettro energetico dei neutroni emessi da una sorgente di Po + Be, e questo col duplice scopo di analizzare la struttura energetica di questa sorgente di neutroni, di così comune impiego nelle ricerche di fisica nucleare, e di

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1936.

(2) «Rend. Acc. Lincei», XXIII, 265, 1936.

raccogliere qualche ulteriore indizio sulla struttura del nucleo del $^{12}_6\text{C}$. Tale nucleo si forma infatti nella nota reazione



e lo spettro dei neutroni così emessi viene a corrispondere ai diversi stati di eccitazione nei quali può trovarsi il nucleo di carbonio a reazione finita.

I raggi γ di grande energia che accompagnano la reazione, messi in evidenza da W. Bothe e H. Becker⁽¹⁾, sono poi da ritenersi dovuti al conseguente processo che conduce il nucleo del $^{12}_6\text{C}$ nel suo stato stabile, come è dimostrato dall'identità delle curve relative all'eccitazione dei raggi γ e dei neutroni⁽²⁾.

Sull'argomento sono già state eseguite, e con metodi più svariati, numerose ricerche, concordi nello stabilire l'esistenza di due bande di neutroni, una costituita di neutroni aventi un'energia dell'ordine di 10⁵ volt, l'altra di neutroni aventi un'energia di alcuni milioni di e. v.; i dati raccolti in alcune di esse indicano in quest'ultima banda una maggiore differenziazione, e precisamente l'esistenza, in questa, di almeno due gruppi, aventi un'energia massima di circa 4.5 m. e. v. e di 7.5 m. e. v.⁽³⁾.

È stato appunto a questa seconda banda che noi abbiamo rivolto la nostra attenzione, nella speranza di raggiungere una maggiore precisione nell'analisi della medesima.

Le misure sono raggruppabili in due serie indipendenti eseguite con due preparati diversi. L'uno e l'altro li abbiamo avuti in prestito dall'Istituto Fisico di Roma; al prof. O. M. Corbino, direttore del medesimo, e ai proff. F. Rasetti, E. Segrè e B. Pontecorvo che hanno eseguito le preparazioni, vogliamo rinnovare le espressioni della nostra più viva gratitudine.

Di una parte dei risultati ottenuti è già stata data notizia in due Note preliminari⁽⁴⁾. Insistiamo quindi qui in particolare sulla seconda serie che ha un aspetto di completezza, piuttosto che sulla prima, eseguita allo scopo di orientarsi e come collaudo dell'apparecchio di ricerca.

2. Le condizioni geometriche dell'esperienza sono indicate in schema nella fig. 1: C₁ e C₂ sono in sezione i contatori a moltiplicazione, costruiti secondo quanto fu indicato nella nostra precedente Nota⁽⁵⁾, AB è lo schermo

(1) «ZS. f. Phys.», 76, 421, 1932.

(2) H. BECKER u. W. BOTHE, «ZS. f. Phys.», 76, 421, 1932; F. RASETTI, «ebenda», 78, 165, 1932; I. CURIE et F. JOLIOT, «C. R.», 196, 397, 1933; J. CHADWICK, «Proc. Roy. Soc.» (A), 142, 1, 1933 e S. FRANCHETTI, «N. Cim.», XII, 516, 935.

(3) I. CURIE e F. JOLIOT, «Journ. d. Phys.», VII, 4, 21, 1933; J. CHADWICK, «Proc. Roy. Soc.», 142, 1, 1933; N. FEATHER, «Proc. Roy. Soc.», 142, 689, 1933; L. WINAND, «Journ. d. Phys.», VII, 5, 597, 1934; J. R. DUNNING, «Phys. Rev.», 45, 486, 1934 ecc.

(4) «Ric. Scient.», ser. II, a. VII, 1, 128, «ebenda», ser. II, a. VII, 2, 89, 1936,

(5) «Rend. Acc. Lincei», loc. cit., p. 267.

di Al, di spessore variabile interposto fra essi, MN un sottile strato di paraffina (150 mm. equivalenti in aria), ed S la sorgente. Dei contatori il primo aveva una sezione efficace di 1.8×3 cm.; il secondo, delimitante l'apertura del cono di proiezione di protoni, di 1.8×2 cm. Tale cono aveva un'apertura massima di 7° .

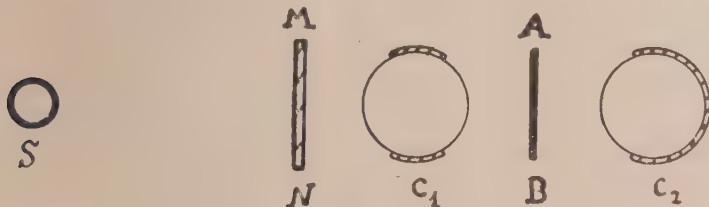


Fig. 1.

Le pareti dei contatori erano fatte con una sottile foglia di Al ($7\ \mu$ nella prima serie, $10\ \mu$ nella seconda), salvo un leggero telaio di sostegno in ottone. La pressione interna ai contatori era naturalmente quella atmosferica; il loro filo (filo calibro di Pt o di W) di 0.2 mm. di diametro; la tensione di esercizio circa 4100 volt. Tale tensione fu quasi sempre fornita da una batteria di pile a secco, ma recentemente il sig. L. De Seras ha impiantato un alimentatore di alta tensione (5.000 volt) in alternata, raddrizzata e poi stabilizzata da un pentodo, che sembra sostituire egregiamente la batteria di pile.

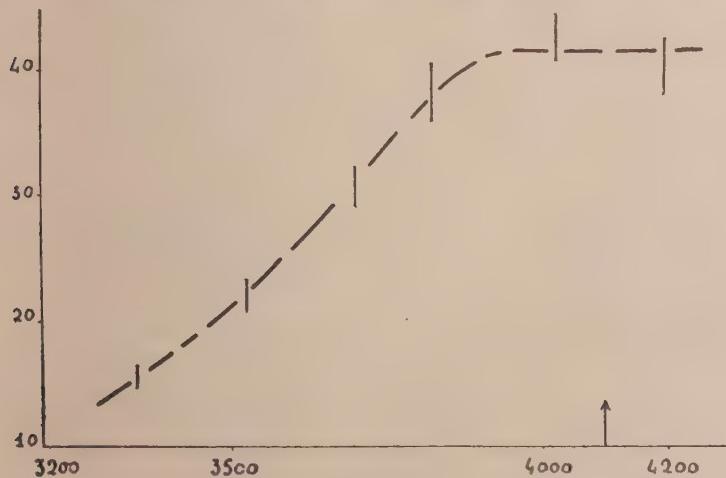


Fig. 2.

Il campo di moltiplicazione nel quale i contatori erano nettamente sensibili ai protoni si estendeva per circa 500 volt. Alle particelle α , data la relativamente alta amplificazione di ogni ramo dalla registrazione, i con-

tatori erano sensibili anche per tensioni molto più basse (circa 1500 volt), ma naturalmente allora si comportavano più come semplici camere di ionizzazione che come contatori a moltiplicazione.

La fig. 2 mostra la caratteristica di uno dei contatori a moltiplicazione da noi utilizzati.

Essa è naturalmente determinata dal sistema di amplificazione. Solo verso i 4.000 volt tutti gli impulsi vengono registrati. La tensione da noi impiegata fu di circa 4.100 volt.

Una prova fatta con i contatori in coincidenza, impiegando la tensione che noi abbiamo poi utilizzata sistematicamente, una tensione 100 volt inferiore a questa, e una 150 volt superiore, ci ha indicato che la sensibilità della registrazione in coincidenze era pressoché costante entro un relativamente ampio intervallo di tensioni.

I numeri relativi a questa prova di controllo sono dati dalla seguente tabella dove V indica la tensione e n il numero delle coincidenze registrate al minuto.

| V | n |
|------|-----------------|
| 4000 | 1.5 ± 0.09 |
| 4100 | 1.68 ± 0.08 |
| 4250 | 1.87 ± 0.12 |

Data la distanza fra i contatori, lo spessore globale in cm. di aria fra la paraffina e l'ultimo contatore era valutabile a ~ 8.1 cm. nella prima serie, e a ~ 9.4 cm. nella seconda. Lo spettro investigato è così delimitato, per le condizioni sperimentali, dalla parte delle piccole velocità, ai protoni e quindi ai neutroni di circa 2.10^6 e. v.

3. Le misure vennero eseguite alternando gli schermi assorbenti a intervalli di tempo regolari di circa una mezz'ora, prolungando naturalmente quelli relativi agli schermi di maggior spessore e perciò richiedenti un conteggio più lungo.

Durante le misure fu, ogni giorno, controllato il funzionamento dei contatori con un conteggio d'impulsi singoli e con uno di coincidenza.

I risultati ottenuti nelle due serie di misure sono complessivamente esposti nella tabella I:

Essi sono anche rappresentati con le ordinate in scala appropriata, per un confronto, coi relativi errori medi, nella fig. 3.

Come si vede i risultati delle due serie sono fra loro ben consistenti, per quanto non solamente il preparato e i contatori fossero diversi, ma anche il sistema di registrazione, che nella seconda serie era stato ulteriormente modificato onde realizzare una maggiore amplificazione. La maggiore amplifi-

TABELLA I.

— 63 —

| Spessore in $\frac{1}{10}$ mm. dello schermo di alluminio | I ^a serie | | | II ^a serie | | |
|---|-------------------------------|---|--------------|-------------------------------|-------------------|----------------------------|
| | spessore totale (cm. aria) | coincidenze registerate al minuto | errore medio | spessore totale (cm. aria) | tempo (minuti) | coincidenze registerate |
| 0 | 8.12 | 1.5 | 0.07 | 9.4 | 415 | 745 |
| 0.25 | | | | 13.1 | 247 | 340 |
| 0.50 | 15.52 | 0.9 | 0.05 | 16.8 | 463 | 501 |
| 0.75 | | | | 20.5 | 524 | 493 |
| 1.00 | 22.92 | 0.51 | 0.03 | 24.2 | 641 | 363 |
| 1.25 | | | | 27.9 | 735 | 344 |
| 1.50 | 30.32 | 0.42 | 0.025 | 31.6 | 744 | 328 |
| 1.75 | | | | 35.3 | 1104 | 389 |
| 2.00 | 37.72 | 0.24 | 0.018 | 39.0 | 1028 | 260 |
| 2.25 | | | | 42.7 | 1138 | 201 |
| 2.50 | 45.12 | 0.15 | 0.015 | 46.4 | 2135 | 301 |
| 2.75 | | | | 50.1 | 1946 | 207 |
| 3.00 | 52.52 | 0.07 | 0.008 | 53.8 | 2015 | 162 |
| 3.25 | | | | 57.5 | 909 | 65 |
| 3.50 | 59.92 | 0.046 | 0.008 | 61.2 | 2162 | 104 |
| 3.75 | | | | 64.9 | 1772 | 56 |
| 4.00 | 67.32 | 0.036 | 0.005 | 68.6 | 3336 | 100 |
| 4.25 | | | | 72.5 | 1442 | 18 |
| 4.50 | 74.72 | 0.012 | — | 76.0 | 2544 | 33 |
| 5.00 | 82.12 | 0.009 | — | 83.4 | 2444 | 15 |
| 6.00 | 97.12 | 0.008 | — | 98.2 | 1617 | 14 |

coincidenze
al minuto

errore medio

cazione raggiunta ci ha anzi indotti ad alimentare in continua le prime valvole, onde ridurre il rumore di fondo.

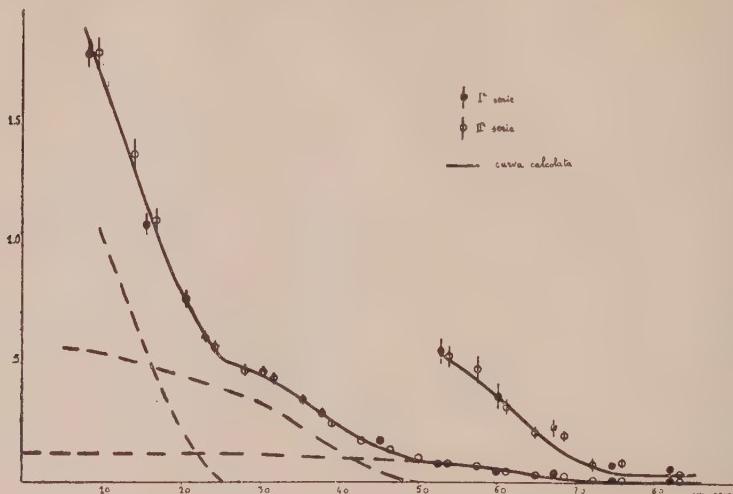


Fig. 3.

L'insieme di tali punti rivela la presenza di due gruppi di neutroni, uno avente un'energia massima di circa 4 m. e. v. e l'altro fra 7.5 e 8 m. e. v., conformemente alle misure precedenti, e quel che più conta in accordo ottimo con i dati forniti con l'impiego di tutt'altri metodi sperimentali, dai diversi autori di cui alla citazione ⁽³⁾ a p. 60.

Ma anche la presenza di un terzo gruppo avente un'energia massima di circa 6.5 m. e. v. sembra molto probabile perchè ammettendo l'esistenza di un solo gruppo di neutroni di energia massima fra 7.5 e 8 m. e. v. difficilmente si può spiegare l'andamento dei corrispondenti punti ottenuti sperimentalmente fra 80 e 20 cm. d'aria.

La cosa acquista maggiore evidenza quando si cerchi di analizzare la curva sperimentale in base ad un calcolo relativamente semplice che si può tentare di fare onde giustificare l'aspetto della curva sperimentale medesima. A questo calcolo e alla discussione dei risultati sperimentali sarà dedicata una Nota successiva.

Chimica. — *Demolizione ossidativa del 4-fenil-1, 9-benzantrone-(10) con soluzione acetica di anidride cromica⁽¹⁾.*
Nota⁽²⁾ di G. CHARRIER ed ELISA GHIGI, presentata dal Socio M. BETTI.

Sottponendo all'ossidazione il 4-fenil-1, 9-benzantrone-(10) con anidride cromica in acido acetico glaciale Clar⁽³⁾, e più tardi Nakanishi⁽⁴⁾, credettero di aver ottenuto l'acido antrachinon-1-carbossilico, per cui attribuirono erroneamente al prodotto di fenilazione, ottenuto per grignardazione, del comune 1, 9-benzantrone-(10), col bromuro di fenilmagnesio, la formula di 3-Bz-fenilbenzantrone, ammettendo che avvenisse durante la reazione di Grignard un'addizione in 1, 6.

Noi dimostrammo⁽⁵⁾ che la sostanza ottenuta per ossidazione dal 4-fenilbenzantrone con CrO₃ in acido acetico glaciale non era acido antrachinon-1-carbossilico, ma bensì un prodotto non appartenente alla serie antrachinonica e che conteneva ancora il fenile: inoltre abbiamo attribuito al composto ottenuto per azione del bromuro di fenilmagnesio sul comune benzantrone la formula di 4-fenilderivato, analogamente a quanto avevamo dimostrato per gli analoghi 4-alchilderivati del benzantrone ottenuti nello stesso modo⁽⁶⁾.

C. F. H. Allen e S. C. Overbaugh⁽⁷⁾ confermarono i nostri dati e sottponendo alla demolizione ossidativa con soluzione alcalina di permanganato potassico il 4-fenilbenzantrone ottennero, analogamente a quanto noi abbiamo dimostrato verificarsi collo stesso processo di ossidazione per il comune benzantrone, dal 4-fenilbenzantrone l'acido 4-fenilantrachinon-1-carbossilico, la cui costituzione dimostrarono anche per sintesi. Essendo stati noi i primi ad occuparci dell'argomento, a preparare i prodotti di grignardazione del comune benzantrone e a dimostrarne la costituzione, a riconoscere la profonda differenza tra il prodotto di ossidazione con CrO₃ in acido acetico del 4-fenil-1, 9-benzantrone-(10) e l'acido antrachinon-1-carbossilico, abbiamo ritenuto essere doveroso da parte nostra di chiarire completamente il meccanismo della demolizione ossidativa del 4-fenil-1,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica e tossicologica della R. Università di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 24 luglio 1936.

(3) «Ber.», 65, 846 (1932).

(4) «Proc. Imp. Acad. (Tokyo)», 9, 394 (1933).

(5) «Gazz. Chim. Ital.», 62, 928 (1932); «Rend. Acc. Lincei», 6°, XIV, 257 (1932).

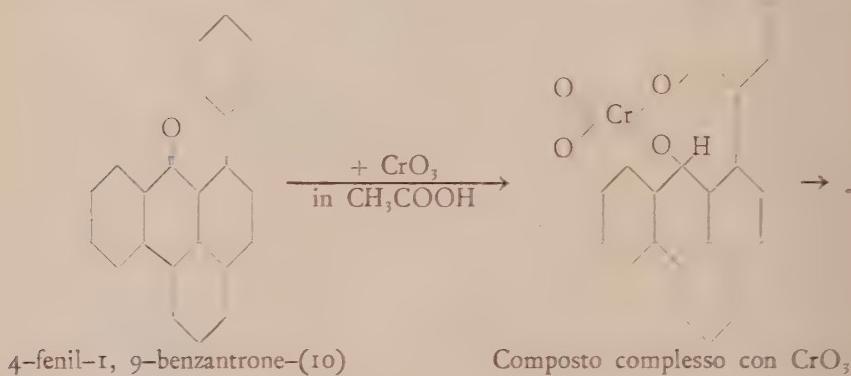
(6) «Gazz. Chim. Ital.», loc. cit.

(7) «J. Am. Chem. Soc.», 57, 740 (1935).

9-benzantrone-(10) con anidride cromica in soluzione in acido acetico glaciale: abbiamo raggiunto completamente il nostro scopo impiegando complessivamente per le nostre ricerche⁽¹⁾ circa 650 gr. di 4-fenil-1,9-benzantrone-(10) che abbiamo preparato dal comune benzantrone col metodo noto (azione del bromuro di fenilmagnesio in eccesso) con un ricavo riferito al benzantrone di partenza del 75%.

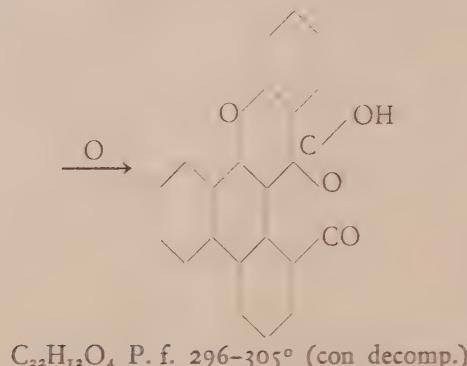
Anzitutto abbiamo potuto riconoscere che nella demolizione ossidativa del 4-fenilbenzantrone con CrO₃ in acido acetico glaciale il composto acido risultante contiene un atomo di carbonio in più di quanto si era creduto dapprima e che quindi invece della formula grezza C₂₂H₁₂O₂ possiede la formula C₂₂H₁₂O₄, formandosi dal 4-fenilbenzantrone con eliminazione di un solo atomo di carbonio.

Riscaldando il 4-fenilbenzantrone con soluzione di CrO₃ in acido acetico glaciale si separa dapprima un composto di color rosso vivo, il quale però per idrolisi si scinde rigenerando il 4-fenilbenzantrone di partenza e fornendo acido cromico; continuando l'ossidazione si forma l'acido:



4-fenil-1, 9-benzantrone-(10)

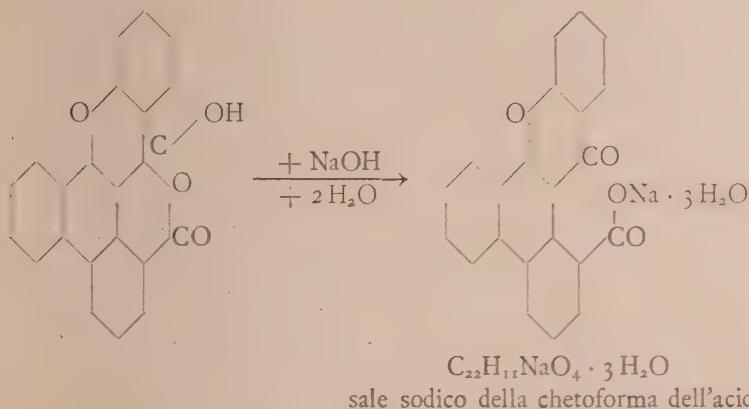
Composto complesso con CrO₃,



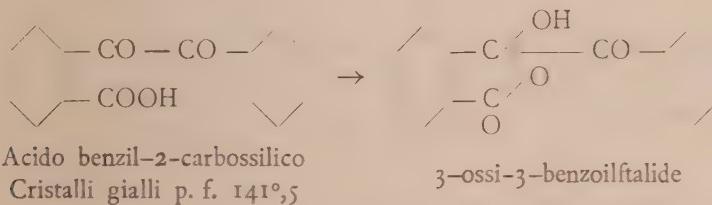
C₂₂H₁₂O₄ P. f. 296-305° (con decomp.)

(1) Anche per quelle concernenti la demolizione ossidativa del 4-fenil-1,9-benzantrone-(10) con soluzione alcalina di permanganato potassico. Vedi « Rendiconti Accademia Lincei », 6^a, XIV, 257 (1932).

L'acido si ottiene in questa forma ciclica enolica e indifferente a freddo verso le soluzioni di carbonato e anche di idrato sodico, quando si acidifica la soluzione acquosa del sale ottenuto per riscaldamento con soluzione di Na_2CO_3 ; la formazione del sale è accompagnata dalla seguente trasposizione



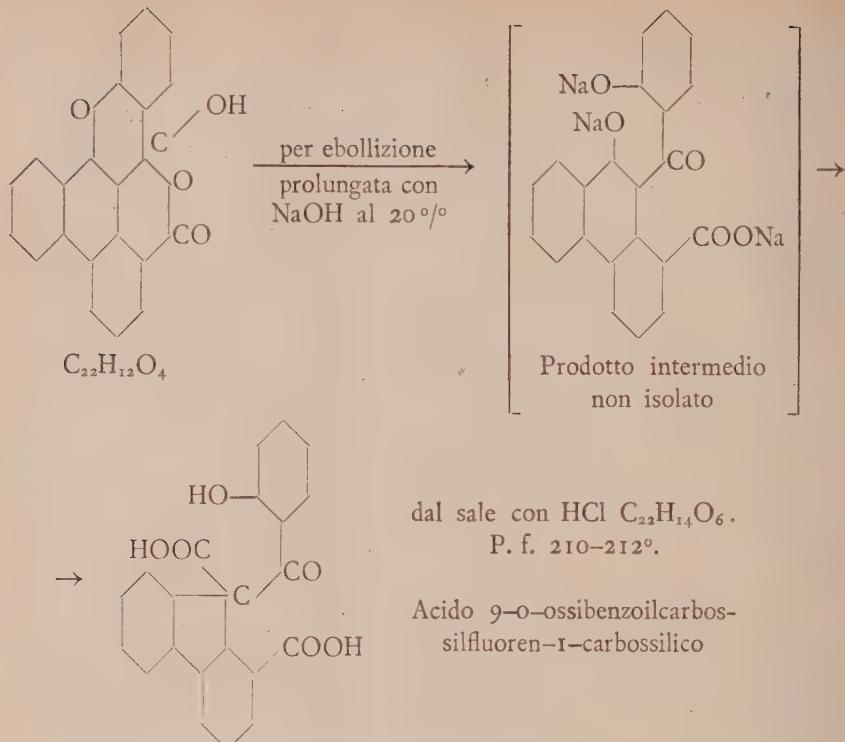
Questo comportamento è analogo, tra l'altro, a quello dell'acido benzil-2-carbossilico, il quale messo in libertà dal sale a freddo o cristallizzato da solventi adatti, si trasforma quantitativamente nella desmotropa 3-ossi-3-benzoilftalide⁽¹⁾:



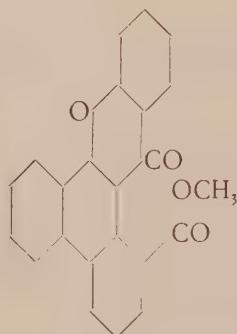
Non abbiamo per ora isolato la forma desmotropa chetonica dall'acido $C_{22} H_{12} O_4$.

Analogamente alla trasformazione dell'acido benzil-2-carbossilico cogli alcali caustici in soluzione concentrata in acido difenilcarbinol-2- α -dicarbossilico $C_6H_5C(OH)(COOH)C_6H_4COOH$, abbiamo ottenuto dall'acido $C_{22}H_{12}O_4$ per apertura del nucleo xantonico all'ossigeno un altro acido dicarbossilico secondo lo schema:

(1) HANTZSCH e SCHWIETE, « Ber. », 49, 213 (1916).

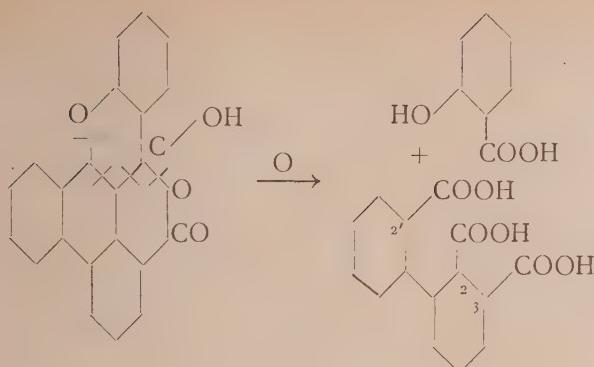


L'acido $C_{22}H_{12}O_4$ venne trasformato, saturandone con HCl gassoso la soluzione in alcool metilico, in estere metilico $C_{23}H_{14}O_4$ fusibile a 217° della formula:



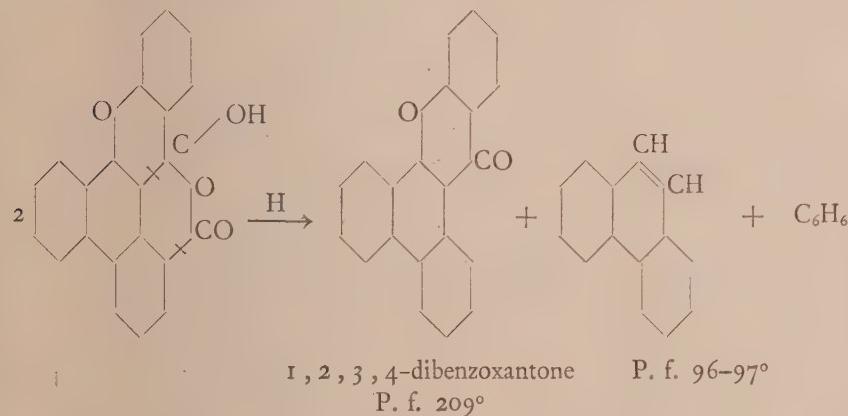
La costituzione dell'acido $C_{22}H_{12}O_4$ risulta in modo sicuro dalla sua demolizione ossidativa con soluzione alcalina di permanganato potassico che fornisce acido salicilico e acido difenil- $2,3,2'$ -tricarbossilico⁽¹⁾ secondo lo schema:

(1) L'acido difenil- $2,3,2'$ -tricarbossilico è identico con quello ottenuto per ossi-



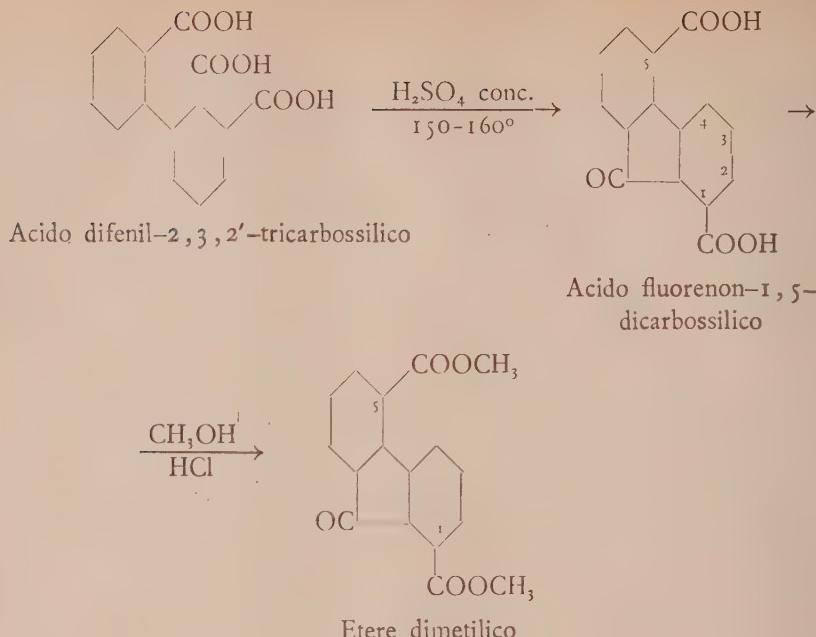
e inoltre dalla distillazione secca su polvere di zinco che produce fenantrene, benzolo, tracce di difenile e fenolo e lo stesso dibenzoxantone che risulta per semplice decarbossilazione dall'acido $C_{22}H_{12}O_4$.

La distillazione secca su polvere di zinco al rosso procede principalmente secondo lo schema:



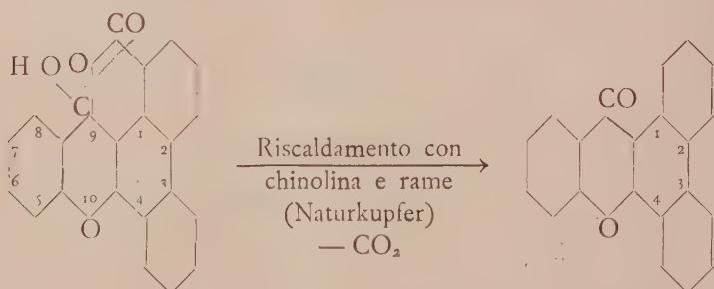
L'acido difenil-2, 3, 2'-tricarbossilico venne inoltre identificato per trasformazione con H_2SO_4 conc. a $150-160^\circ$ in acido fluorenon-1, 5-dicarbossilico, aghi di color rosso-bicromato, fusibili a $295-299^\circ$, che diede l'estere dimetilico, in aghi setacei di color giallo-pallido, fusibili a 120° .

dazione con $KMnO_4 + H_2SO_4$ dell'acido risultante dalla demolizione ossidativa con soluzione alcalina di $KMnO_4$ del comune benzantrone.



Il fenantrene proveniente dalla distillazione secca dell'acido $C_{22}H_{12}O_4$ su polvere di zinco venne caratterizzato trasformandolo in fenantrenchinone, dal quale si ottennero il 9, 10-fenilazofenantrolo e la fenazina coi punti di fusione indicati nella letteratura.

Il miglior metodo di decarbossilazione dell'acido $C_{22}H_{12}O_4$ consiste nel riscaldamento con chinolina e rame (Naturkupfer): si ottiene secondo la seguente equazione quantitativamente l'1, 2, 3, 4-dibenzoxantone:

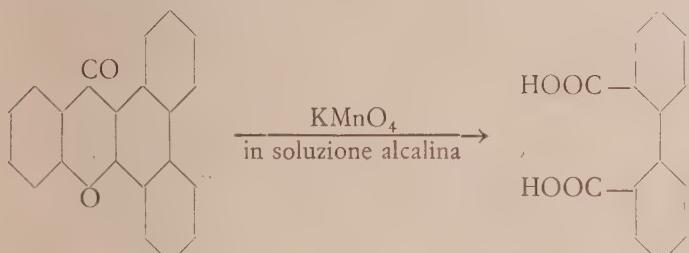


1, 2, 3, 4, -dibenzoxantone
Aghi bianchi setacei
P. f. 209°

La costituzione del prodotto neutro risultante dalla decarbossilazione dell'acido ottenuto per ossidazione del 4-fenilbenzantrone con CrO_3 in acido

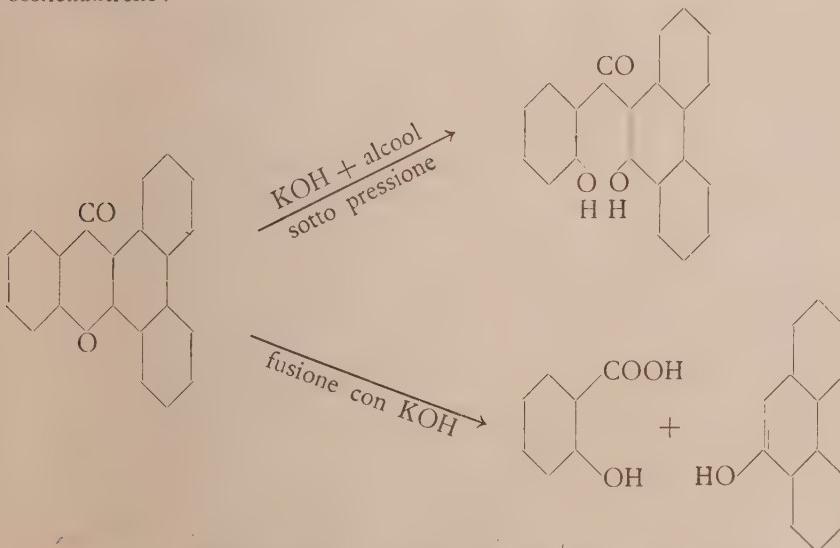
acetico glaciale viene dimostrata dai prodotti che dà per distillazione secca sulla polvere di zinco, tra cui principalmente fenantrene (P. F. 97–98°) trasformato in fenantrenchinone (P. F. 205–206°), da cui si ebbero il 9–10-fenilazofenantrolo fusibile a 165° e la fenazina fusibile a 222–223°.

Ma l'1, 2, 3, 4-dibenzoxantone inoltre per ossidazione prolungata con soluzione alcalina di KMnO_4 dà acido difenico di p. f. 228°:



Acido difenico P. f. 228°

e fuso cogli alcali caustici fornisce in presenza di alcool il 10–fenantril-9–ossi-o–ossifenilchetone e per fusione alcalina energica acido salicilico e 9–ossifenantrene :



La nostra comunicazione completa corredata dei dati sperimentali comparirà prossimamente sui « Berichte » della Società Chimica tedesca; inoltre ne verrà pure pubblicata una parte sul « Journal of the American Chemical Society ».

Con questa demolizione che abbiamo ora effettuato del 4-fenilbenzantrone a fenantrene, restano così stabiliti rapporti genetici del sistema ben-

zantronico col fenantrene, oltrechè per via sintetica secondo lo schema di Turski e Pragerowa⁽¹⁾, anche per via analitica.

Conclusione. — Abbiamo trovato la costituzione del prodotto di demolizione ossidativa con soluzione acetica di anidride cromica del 4-fenil-1, 9-benzantrone-(10): esso corrisponde alla formula grezza C₂₂H₁₂O₄ anzichè a quella C₂₂H₁₂O₄, dapprima ammessa dai precedenti ricercatori ed è l'acido ortocarbossilico rispetto al CO xantonico, derivante dall'1, 2, 3, 4-dibenzoxantone.

Chimica. — *Demolizione ossidativa del 4-fenil-1, 9-benzantrone-(10) con soluzione alcalina di permanganato potassico⁽²⁾.* Nota⁽³⁾ di G. CHARRIER ed ELISA GHIGI, presentata dal Socio M. BETTI.

C. F. H. Allen e S. C. Overbaugh⁽⁴⁾ facendo agire la soluzione alcalina di permanganato potassico sul 4-fenil-1, 9-benzantrone-(10) isolarono dell'acido 4-fenil-antrachinon-1-carbossilico, analogamente a quanto noi avevamo osservato sottoponendo il comune 1, 9-benzantrone-(10) alla stessa reazione, la quale ci diede acido antrachinon-1-carbossilico, accanto all'acido difenil-2', 3-dicarbossil-2-gliossilico. Essi poterono così confermare la struttura da noi attribuita al fenilbenzantrone ottenuto per azione del bromuro di fenilmagnesio sul comune benzantrone, reazione che noi abbiamo studiata in modo generale per primi e della quale abbiamo chiarito, sin da principio, in modo esatto il meccanismo. Allen e Overbaugh però, non conoscendo o non tenendo conto dei nostri lavori precedenti, sulla demolizione ossidativa del benzantrone⁽⁵⁾, misero in evidenza soltanto la formazione di questo acido 4-fenilantrachinon-1-carbossilico, che si forma in via affatto secondaria con un ricavo, riferito al 4-fenilbenzantrone di partenza ed espresso in sale sodico, dell'8 % soltanto. La reazione principale di demolizione ossidativa porta invece all'acido difenil-3, 4-dicarbossil-2-gliossilico e all'acido ossalico; come prodotto secondario si ha l'acido 4-fenilantrachinon-1-carbossilico, il quale a sua volta può per prolungata ossidazione trasformarsi nell'acido difenil-3, 4-dicarbossil-2-gliossilico.

(1) «Przemysl Chemiczny», 13, 33 (1929); «Chem. Zentr.», 1929, I, 1692.

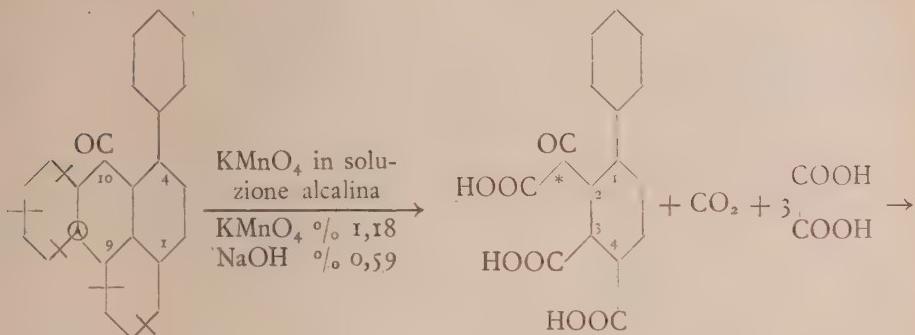
(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica e tossicologica della R. Università di Bologna.

(3) Pervenuta all'Accademia il 24 luglio 1936.

(4) «Journ. Am. Chem. Soc.», 57, 740 (1935).

(5) «Gazz. Chim. Ital.», 63, 685 (1933).

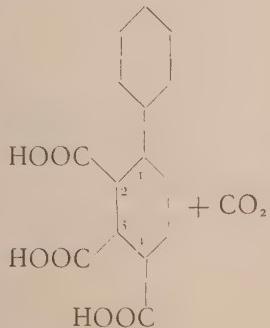
La demolizione ossidativa del 4-fenil-1, 9-benzantrone-(10) decorre dunque secondo gli schemi seguenti, dei quali il primo rappresenta la reazione principale:



4-fenil-1, 9-ben-
zantrone-(10).
P. f. 186°.

Acido difenil-3, 4-dicarbossil-2-gliossilico
P. f. 256-257° (con decomposizione). Ren-
dimento dal fenilbenzantrone 47%.

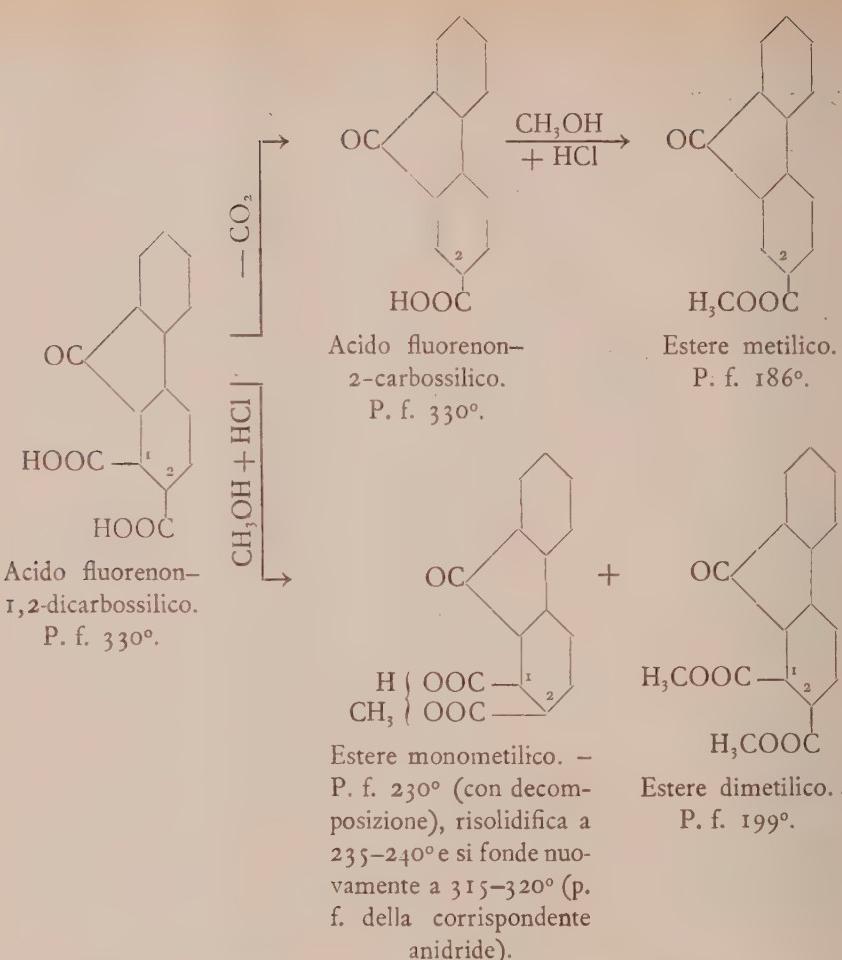
KMnO₄ in solu-
zione acida
per H₂SO₄ →



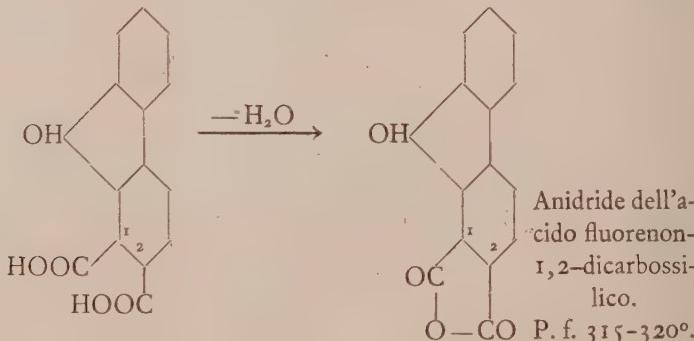
Acido difenil-2, 3, 4-
tricarbossilico.
P. f. 210-212°.

* La posizione del resto gliossilico non è completamente sicura.

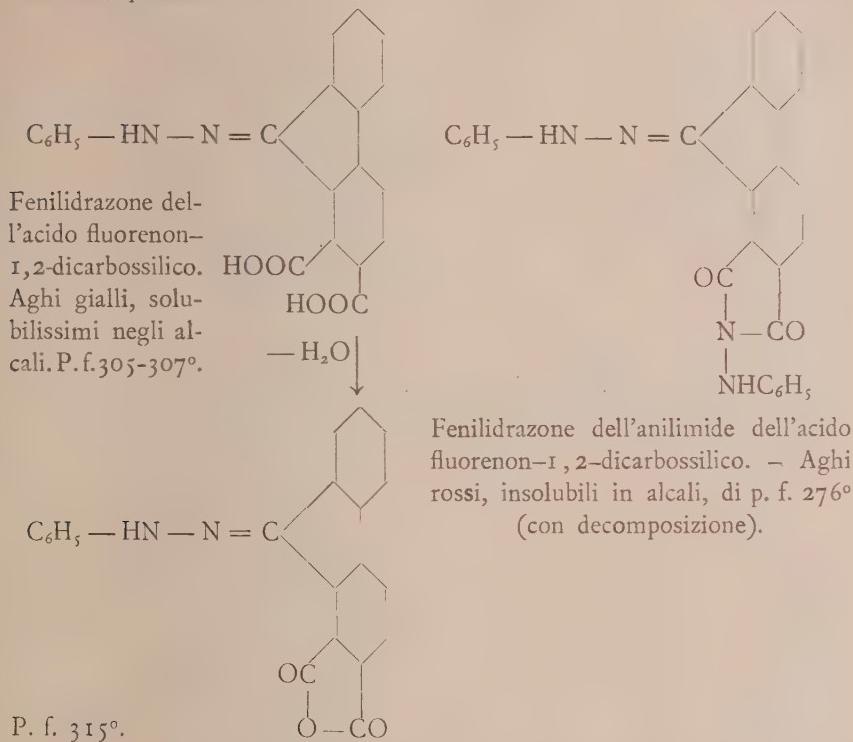
Entrambi gli acidi difenil-tricarbossilici danno, riscaldati a 150-160° con H₂SO₄ conc., il primo per eliminazione di un gruppo CO e di H₂O, il secondo di H₂O, l'acido fluorenon-1, 2-dicarbossilico, il quale ha dato luogo alle trasformazioni seguenti:



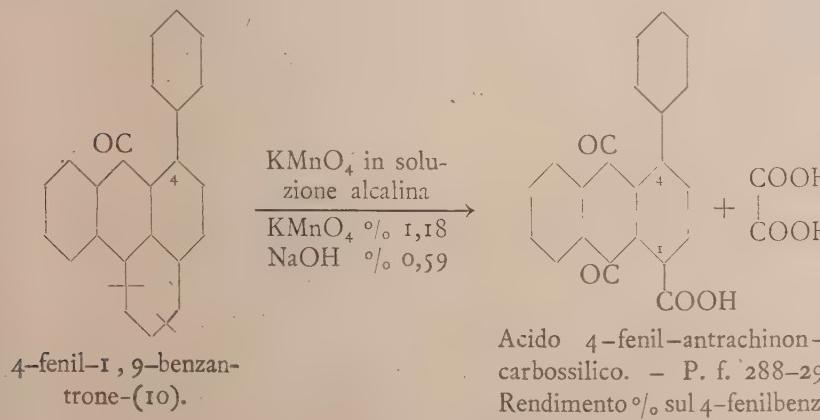
Per cristallizzazione dall'anidride acetica l'acido fluorenon-1, 2-dicarbossilico di p. f. 330° si trasforma nella corrispondente anidride che si fonde a $315-320^\circ$:

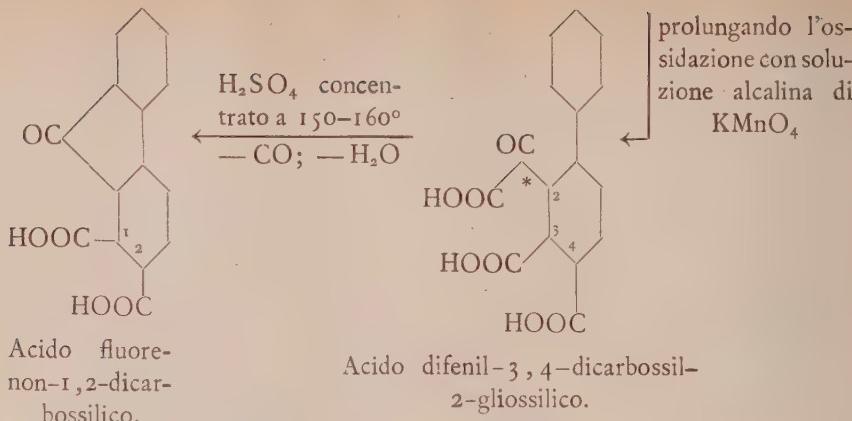


Molto interessante è il comportamento dell'acido fluorenon-1, 2-dicarbossilico colla fenilidrazina: si ottengono due sostanze, il semplice fenilidrazone corrispondente e il fenilidrazone dell'anilimide:



In via secondaria la demolizione ossidativa del 4-fenil-1, 9-benzantron-(10) con soluzione alcalina di permanganato potassico decorre seguendo il secondo schema:

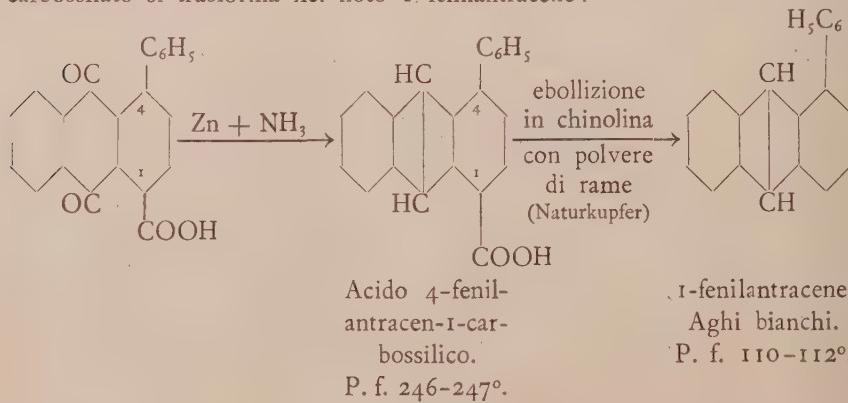




* La posizione del resto gliossilico non è stabilita con sicurezza.

La formazione dell'acido difenil-3,4-dicarbossil-2-gliossilico per ossidazione dell'acido 4-fenil-antrachinon-1-carbossilico farebbe supporre che la demolizione ossidativa desse luogo a quest'ultimo acido come prodotto primario, il quale in un secondo tempo si ossiderebbe ulteriormente ad acido difenil-3,4-dicarbossil-2-gliossilico. Certamente però la formazione dello stesso acido difenil-3,4-dicarbossil-2-gliossilico, tanto dal 4-fenilbenzantrone quanto dall'acido 4-fenilantrachinon-1-carbossilico, ne dimostra completamente la costituzione di derivato del difenile sostituito soltanto in uno dei due nuclei benzenici. L'identità dei due acidi difenil-3,4-dicarbossil-2-gliossilici, provenienti l'uno dal 4-fenil-1,9-benzantrone-(10) e l'altro dall'acido 4-fenil-antrachinon-1-carbossilico venne dimostrata colla loro trasformazione in acido fluorennon-1,2-dicarbossilico, che fuse in entrambi i casi esattamente a 330°.

La costituzione dell'acido 4-fenilantrachinon-1-carbossilico venne confermata oltreché colla trasformazione, secondo Allen e Overbaugh⁽¹⁾ in fenilantrachinone per decarbossilazione, riducendolo con polvere di zinco in soluzione ammoniacale ad acido 4-fenilantranen-1-carbossilico, il quale decarbossilato si trasforma nel noto 1-fenilantracene:



L'introduzione del fenile nel benzantrone in posizione 4 stabilizza il sistema benzantronico nel nucleo antrachinonico indebolendo invece il nucleo Bz relativamente alla demolizione ossidativa con permanganato potassico in soluzione alcalina. Ne risulta in queste condizioni una costante demolizione del nucleo Bz contrariamente a quanto si verifica, come abbiamo dimostrato in Note precedenti⁽²⁾, coll'1, 9-benzantrone-(10), il quale ossidato con KMnO_4 in soluzione alcalina conserva il nucleo Bz inalterato.

La nostra comunicazione completa riguardante la demolizione ossidativa del 4-fenil-1, 9-benzantrone-(10), corredata dei dati sperimentali, comparirà prossimamente sui « Berichte der deutschen Chemischen Gesellschaft », inoltre ne verrà pubblicata una parte sul « Journal of the American Chemical Society ».

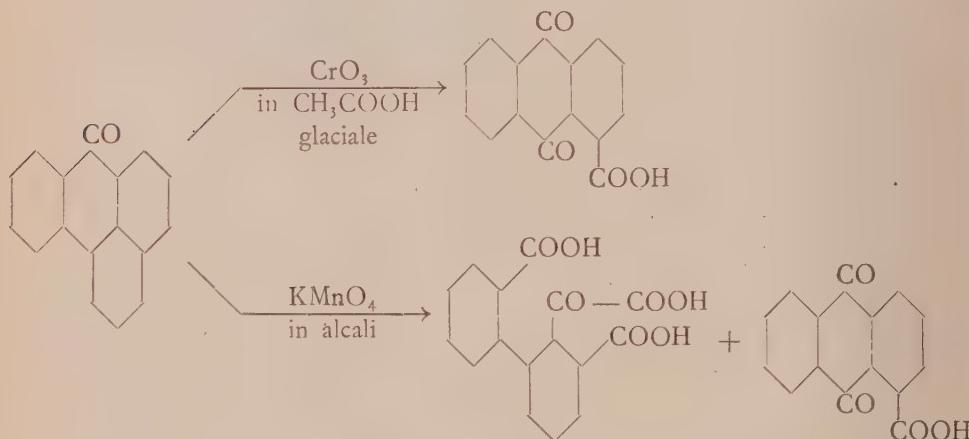
Conclusione. — Abbiamo messo in evidenza che, nella demolizione ossidativa del 4-fenil-1, 9-benzantrone-(10) con soluzione alcalina di permanganato potassico di determinata concentrazione, si ottengono, oltreché l'acido 4-fenilantrachinon-1-carbossilico, principalmente gli acidi difenil-3, 4-dicarbossil-2-gliossilico e ossalico.

(1) « Journ. Am. Chem. Soc. », 57, 740 (1935).

(2) « Gazz. Chim. Ital. », 63, 685 (1933).

Chimica. — *Demolizione dell' isodibenzantrone (isoviolantrone) per ossidazione con soluzione alcalina di permanganato potassico⁽¹⁾.* Nota⁽²⁾ di ELISA GHIGI, presentata dal Socio M. BETTI.

Mentre il comportamento dell' 1,9-benzantrone-(10) cogli agenti ossidanti è stato diligentemente studiato, tanto in soluzione acida⁽³⁾ che in soluzione alcalina⁽⁴⁾ formandosi in entrambi i casi l'acido antrachinon-1-carbossilico e nel caso dell'ossidazione alcalina anche l'acido difenil-2',3-dicarbossil-2-glossilico come prodotto principale:



i prodotti di condensazione del benzantrone, così importanti nella tecnica come coloranti da tinto, cioè il dibenzantrone e l'isodibenzantrone non erano ancora stati studiati da questo punto di vista sino a quest'anno, in cui è comparsa una memoria di Scholl⁽⁵⁾ sull'ossidazione con CrO_3 in acido acetico del dibenzantrone. Questo subisce l'ossidazione in modo perfettamente analogo a quello del benzantrone poichè dà luogo alla formazione dell'acido 2,2'-diantrachinonil-1,1'-dicarbossilico secondo lo schema:

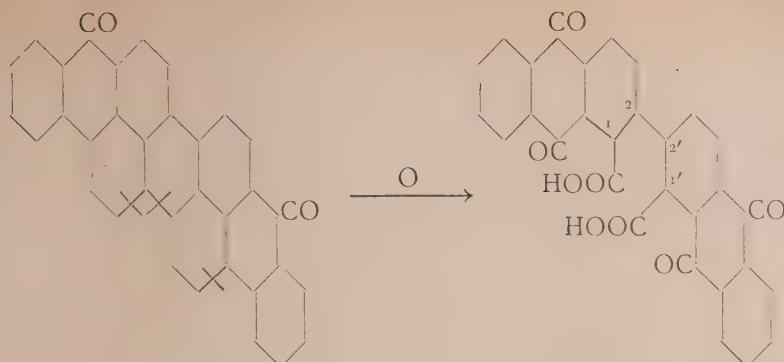
(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica e tossicologia della R. Università di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 24 luglio 1936.

(3) C. LIEBERMANN e K. ROKA, « Ber. », 41, 1423 (1908).

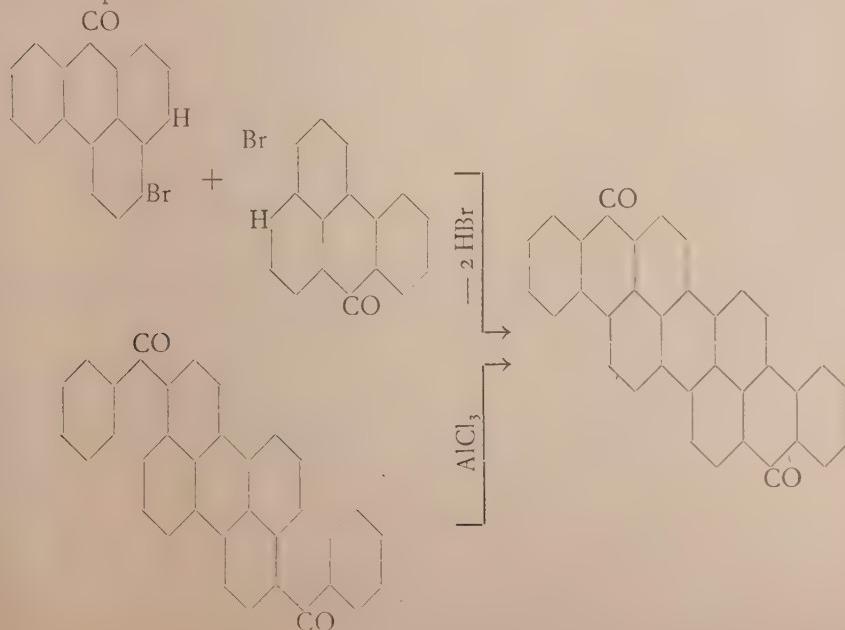
(4) G. CHARRIERE E E. GHIGI, « Gazz. chim. ital. », 63, 685 (1933).

(5) « Ber. », 68, 45 (1935).



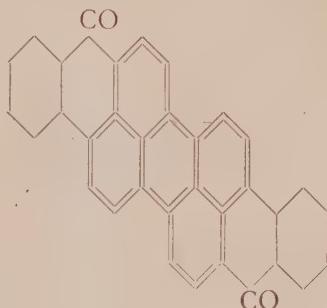
Da qualche tempo ho iniziato uno studio sistematico sui prodotti di condensazione del benzantrone che vengono impiegati come materie coloranti da tinto coi nomi Bleu oscuro antinolo BOR (Bleu scuro indantrene BO), Nero antinolo BB (Nero indantrene B), Verde antinolo brillante (verde giada caledon, verde brillante indantrene B), Violetto antinolo RN (Violetto indantrene R extra), Violetto antinolo 2R ecc. ritenendo che la demolizione ossidativa di questi prodotti possa presentare notevole interesse scientifico sia per confermare la loro costituzione, sia per stabilire il loro comportamento, se di veri derivati perilenici oppure di dibenzantronileni, rispettivamente di isodibenzantronileni, sia per i prodotti di scissione che se ne potrebbero ricavare.

È noto infatti, per limitarci in questa breve comunicazione preliminare al prodotto di cui ho dapprima ultimato lo studio, che l'isodibenzantrone può venir ottenuto sia dai Bz - 1 - alogenoderivati dell'1,9-benzantrone - (10) per fusione con KOH alcoolica, sia per fusione con cloruro di alluminio del dibenzoilperilene :

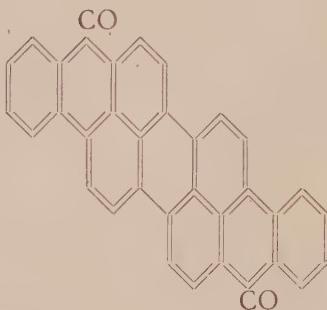


L'isodibenzantrone presenta dunque rapporti genetici per quanto riguarda la sua sintesi tanto col benzantrone, come col perilene.

Ho trovato che, contrariamente a quanto si poteva prevedere considerando la stabilità del sistema perilenico, l'isodibenzantrone alla demolizione ossidativa con soluzione alcalina di permanganato potassico si comporta come un vero derivato benzantronico, cioè come un isodibenzantronilene; quindi da questo punto di vista va considerato non secondo lo schema:

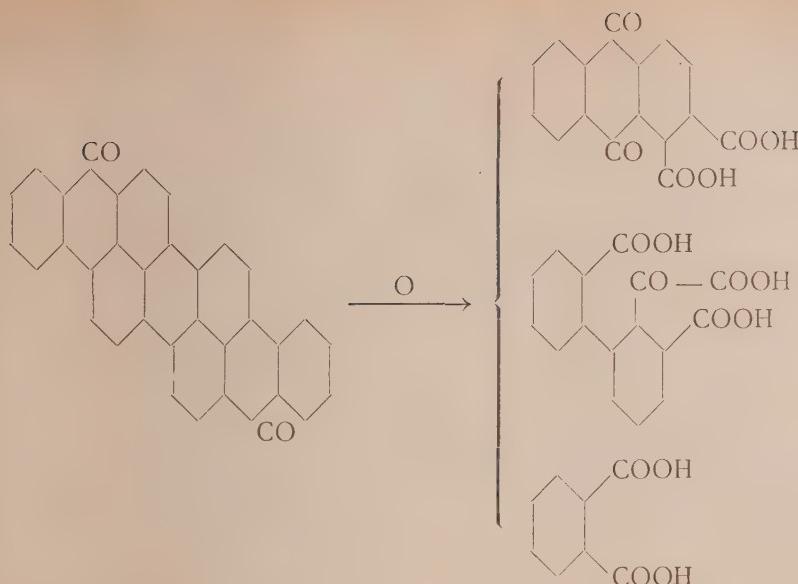


nel quale è messo in evidenza l'anello perilenico, ma invece secondo la formula:



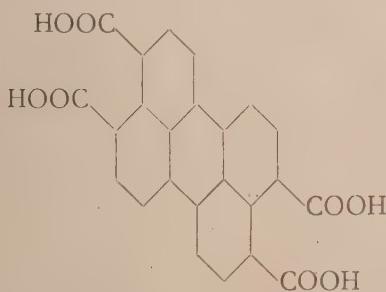
nella quale il sistema isodibenzantronico conserva ancora i due anelli benzantronici che con eliminazione di 4 H si sono condensati nella sua formazione.

Infatti la scissione dell'isodibenzantrone con soluzione alcalina di KMnO_4 procede secondo la seguente equazione:



si formano cioè gli acidi antrachinon-1,2-dicarbossilico, difenil-2',3'-dicarbossil-2-gliossilico e ftalico.

Ultimato questo lavoro, la cui parte sperimentale vedrà presto la luce sulla *Gazzetta Chimica Italiana*, rivolgerò la mia attenzione allo studio della demolizione ossidativa con soluzione alcalina di KMnO_4 del dibenzantrone nella speranza di ottenere da questo l'acido perilentetracarbossilico



che potrebbe avere anche notevole importanza tecnica.

Sarà poi interessante stabilire quale influenza può esercitare sul sistema di benzantronicco la presenza di sostituenti e specialmente rivolgerò l'attenzione al Bz.2-Bz.2' dimetossidibenzantrone (verde antinolo brillante, verde giada caledon, verde brillante indantrene B), il quale prossimamente verrà prodotto in Italia e perciò si potrà facilmente avere a disposizione per il mio studio.

Ringrazio sentitamente la Direzione tecnica della Società ACNA-Montecatini per la cortesia colla quale ha posto a mia disposizione l'isodibenzantrone che mi ha servito per questa ricerca.

Conclusione. — La demolizione ossidativa dell'isodibenzantrone con soluzione alcalina di $KMnO_4$ segue una via parallela a quella del benzantrone, poichè dà acido antrachinon - 1, 2 - dicarbossilico, acido difenil - 2', 3 - dicarbossil - 2 - gliossilico e acido ftalico.

L'isodibenzantrone si comporta cioè come un vero dibenzantronilene, anzichè come derivato perilenico.

Zoologia. — *Lo sviluppo della coda negli Anfibi.* — II. Alterazioni delle correlazioni fra i territori costituenti l'abbozzo caudale e comportamento dell'ectoderma della pinna caudale⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di H. BYTINSKI-SALZ, presentata dal Corrisp. F. Raffaele.

Con una Nota precedente ho potuto dimostrare, in base ai risultati di numerosi esperimenti, che i vari territori dell'abbozzo caudale nella neurula posseggono determinate potenze formative e di differenziamento, che si possono esplicare in via autonoma negli esperimenti di isolamento. Fu inoltre illustrato come si comportasse il bottone caudale in via di sviluppo, in seguito ad asportazioni localizzate dei vari abbozzi che lo costituiscono.

In questa Nota, ad integrazione dei risultati precedenti, viene chiarito il comportamento delle diverse parti della gemma caudale, artificialmente sottratte alle correlazioni dei territori adiacenti, o quando tali correlazioni vennero dall'esperimento modificate. Si trattava perciò di stabilire, in quale grado territori embrionali indifferenti potessero essere indotti a formare una coda influenzati da abbozzi adiacenti al territorio caudo-formativo, ed in quale grado l'abbozzo della coda, trapiantato, potesse inibire lo sviluppo di una coda.

Le esperienze eseguite fin qui, si riferivano all'asse della coda e soltanto occasionalmente (nelle possibilità di sviluppo dei cercini midollari) si trattò della formazione della lamina della pinna caudale. In un ultimo paragrafo si studierà più particolarmente il comportamento dell'ectoderma della lamina. Completate queste 4 serie di esperienze ci sarà possibile di dare un quadro sintetico della formazione della gemma caudale durante lo sviluppo normale.

(1) Dall'Istituto di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparate della R. Università di Padova.

(2) Pervenuta all'Accademia il 9 luglio 1936.

I. — ESPERIMENTI DI ROTAZIONE PER INDAGARE IL COMPORTAMENTO
DEGLI ABBOZZI ASPORTATI.

Gruppo A: Rotazione dei segmenti posteriori della piastra midollare. — In questi esperimenti i segmenti più caudali della piastra midollare ⁽¹⁾ oppure 1 + 2, con o senza substrato, il tetto archenterico sottostante (regione cordo-mesodermica), furono ruotati di 180° e nuovamente impiantati. Si eseguirono 4 serie di operazioni:

- α: rotazione della piastra midollare con substrato senza cercini;
- β: rotazione della piastra midollare con substrato con cercini;
- γ: rotazione della piastra midollare senza substrato senza cercini;
- δ: rotazione della piastra midollare senza substrato con cercini.

In tutt'i casi all'estremità cefalica del pezzo ruotato si potè sviluppare una coda secondaria in direzione dorsale, il cui asse, negli esperimenti α e β, comprendeva il tubo neurale e la corda (v. anche WOERDEMAN, 1928). Nelle serie γ e δ l'asse conteneva, solo raramente, soltanto il tubo neurale, come ci si doveva attendere. Nella maggioranza dei casi vi si riscontrò anche un segmento assile cordale che, originato dalla corda lasciata integra, penetrava più o meno profondamente nella coda secondaria. Se si ruotava soltanto il segmento 1 della piastra midollare (regione presuntiva del tubo neurale caudale), la coda primaria era sempre normale e conteneva tubo neurale, corda e somiti nella disposizione tipica. La coda secondaria era invece in questi casi costituita soltanto dal tubo neurale, circondato dal mesenchima. Ruotati invece contemporaneamente i segmenti 1 e 2 (regione presuntiva del tubo neurale e regione presuntiva dei somiti), si ottenne la inibizione della coda primaria, laddove la coda secondaria aveva nella sua parte assile il tubo neurale ed i somiti. Anche con la rotazione della sola piastra midollare (serie γ) si ebbe sempre nella coda secondaria la formazione di un lembo dorsale ed uno ventrale della pinna. In molti casi si verificò l'abbozzarsi di una gemma caudale secondaria, che col procedere dello sviluppo, poteva essere riassorbita. Talora fu ritrovato anche un tubo neurale secondario all'interno dell'embrione.

Gruppo B: Rotazione del tetto archenterico. — Già negli esperimenti del gruppo precedente avevo eseguito la rotazione del tetto dell'archenteron insieme con i segmenti più caudali della piastra midollare. Tentai allora di ruotare solamente la regione cordo-mesodermica, operazione che urta contro grandi difficoltà tecniche. Con un intervento doppio si ruotò dapprima la piastra midollare insieme con il substrato (esperienza α), e a cicatrizzazione

(1) Per la numerazione dei singoli territori vedi la fig. 2 della Nota precedente.

avvenuta, si ruotò la piastra midollare restituendola alla posizione primitiva (esperienza γ); in tal modo soltanto la corda col materiale mesodermico adiacente risultavano ruotati di 180° . Nei pochi casi, in cui tale operazione riuscì, non si verificò la formazione di una coda secondaria, e sembra perciò, che la corda non sia in grado di attraversare lo strato cellulare della piastra midollare.

II. — ESPERIMENTI PER LO STUDIO DEL COMPORTAMENTO DELL'ECTODERMA DEL LEMBO DELLA PINNA.

Questa serie ebbe per iscopo quello di studiare la partecipazione dell'ectoderma alla formazione del lembo della pinna codale. Dagli esperimenti di RAVEN (1931-34), è noto che il materiale mesenchimatico dei cercini midollari (*Neuralleiste*) ha un'importanza fondamentale nello sviluppo della pinna. Ciò risulta anche da ricerche di VOGT (1931), HOLTGRETER (1933, 1934), DU SHANE (1936) e da mie personali. TERNI (1934) in particolare giunge alla conclusione, che anche l'ectoderma presuntivo del lembo della pinna mantiene la facoltà pinno-formativa anche in assenza della cresta gangliare. Per esaminare tale questione si eseguirono i seguenti esperimenti:

1° In un embrione, al termine della neurulazione, si asportò il tubo neurale insieme coi cercini, lasciando *in situ* soltanto l'ectoderma pinno-formativo. L'ectoderma pinno-formativo viene disteso in direzione dorsale al di sopra della regione operata, e lasciato cicatrizzare. In uno stadio successivo gli embrioni sono privi del rispettivo segmento di tubo neurale e di un tratto della pinna corrispondente.

2° In una neurula avanzata si ruota di 180° da ambo le parti un grande lembo di ectoderma, il cui limite dorsale comprende il margine esterno dei cercini midollari e l'abbozzo dell'epidermide del lembo dorsale della pinna, in modo da trasferire l'epidermide presuntiva del fianco in sede dell'epidermide della lamina. Nel successivo sviluppo i due pezzi trapiantati si vengono a riunire dorsalmente sopra il tubo neurale e ivi formano una lamina caudale del tutto normale. L'ectoderma presuntivo del lembo della pinna, che con l'operazione è stato portato lateralmente, non è capace di produrre lembi di pinna nel fianco.

3° Fu anche eseguita un'esperienza analoga, ma eteroplasticamente, fra *Eurycea bislineata* Green e *Ambystoma maculatum*. Come è noto le larve di *Eurycea*, così come quelle di tutti i *Plethodontidae*, non hanno lamina della pinna sopra la parte posteriore del tronco. La pinna invece comincia appena alla base della coda e raggiunge la massima altezza in vicinanza dell'estremità della coda. Si asportò dunque da ambo le parti l'epidermide presuntiva del lembo della pinna nella regione del tronco in *Ambystoma*, sostituendola con frammenti di epidermide provenienti da un territorio analogo di *Eurycea*: un embrione soltanto si sviluppò abbastanza da mostrare

la formazione di una lamina della pinna, nella quale, tuttavia, l'ectoderma di *Eurycea* si era armonicamente incorporato ed era riconoscibile facilmente al suo colorito. Sebbene questo risultato debba essere convalidato da ulteriori esperimenti esso sembra tuttavia dimostrare, che anche in quelle specie di Urodeli, le quali normalmente non formano pinna nel territorio del corpo, l'epidermide del corpo è, lo stesso, in grado di formare epidermide di lamina.

4° Se si trapianta ectoderma della regione cardiaca o ventrale di una neurula medialmente in sede dell'epidermide dorsale del lembo caudale, su un embrione allo stadio di bottone codale iniziale, esso può partecipare più tardi alla formazione della lamina.

Questi risultati dimostrano che l'ectoderma presuntivo della pinna caudale non può formare la pinna in assenza della doccia neurale. Invece qualunque pezzo di ectoderma banale (del ventre o del fianco) di neurula, in presenza di materiale dei cercini midollari, può partecipare alla formazione di una lamina caudale.

Dagli esperimenti ora descritti si possono trarre le seguenti conclusioni:

La determinazione istologica degli abbozzi degli organi è già completa all'inizio della formazione del bottone codale (al termine della neurulazione). Tutti gli abbozzi presuntivi trapiantati si sviluppano secondo il loro valore prospettico. I diversi abbozzi per quanto riguarda la loro struttura istologica non possono essere sostituiti gli uni con gli altri. Anche il materiale della futura pinna è già determinato in epidermide, sebbene non specificamente in «epidermide della pinna».

Le potenze formative morfologiche dei singoli abbozzi sono anche già determinate in questo periodo, tuttavia in casi singoli si possono avere ancora delle forti regolazioni. Così se si impedisce un accrescimento rettilineo alla corda ed al tubo neurale, le forti tendenze a distendersi insite nei tessuti, portano a ripiegature e distorsioni. Oppure se si asporta una gran parte del materiale dei somiti, può lo stesso formarsi una serie di somiti completi armonicamente impiccoliti. Se si asporta solo un cercine midollare, dalla parte residua può svilupparsi una pinna completa (TERNI, 1924).

Regolazioni dal punto di vista morfologico possono verificarsi soltanto nel territorio dei medesimi abbozzi di organi. Materiali di abbozzi differenti non possono sostituirsi neppure nei riguardi del loro differenziamento istologico.

Per ciò che si riferisce alla partecipazione dei singoli abbozzi organoformativi allo sviluppo della coda, si può concludere quanto segue:

Il *tubo neurale* generalmente si accresce in direzione rettilinea per una tendenza spiccata a distendersi. Questo tipico accrescimento può essere ostacolato e impedito dall'epidermide ventrale del bottone stesso. In questi casi, il tubo neurale si piega o si contorce all'interno dell'embrione. Non

si giunge mai ad avere segmenti di tubo neurale sporgenti dalla superficie. La mancanza del tubo neurale nel bottone codale in via di accrescimento porta di conseguenza una forte ripiegatura dal lato ventrale.

I miotomi della coda mostrano tutti una notevole capacità a distendersi ed un alto potere a proliferare. Possono indurre l'ectoderma del bottone codale a formare un prolungamento della coda.

La corda mostra accentuatissime capacità a distendersi e le esplica anche attraverso l'epidermide ventrale di bottoni caudali avanzati. Se si impedisce il suo prolungamento all'esterno, essa penetra profondamente nell'embrione, spingendo davanti a sé gli organi adiacenti. Se incontra una resistenza troppo forte, si piega ad S. Apparentemente però non è più in grado di attraversare la piastra midollare sovrastante nelle parti anteriori dell'embrione. Essa fornisce alla coda in via di accrescimento la resistenza meccanica. Se la corda viene asportata, i segmenti posteriori del corpo non possono distendersi in tutta la loro lunghezza; l'estremo posteriore del corpo non può accrescere in senso rettilineo, risulta perciò piegato lateralmente.

Questi risultati sembrano allontanarsi in alcuni punti dalle osservazioni di HOLTGRETER (1933) sullo sviluppo di code indotte. Non bisogna però dimenticare che in quei casi si trattava di induzioni in quel territorio del corpo, in cui la tendenza ad indurre una coda può variare moltissimo nei singoli punti. Nei miei esperimenti si tratta tuttavia di processi che avvengono nel territorio proprio della coda, nel quale certamente la determinazione dei singoli abbozzi, per formare la coda, è massima. Le differenze di reazione sono dovute essenzialmente al fatto che il materiale di reazione che soggiace agli stimoli induttori era, nei vari casi, o materiale indeterminato (ectoderma presuntivo della gastrula), o ectoderma di bottone caudale già notevolmente differenziato oppure ancora abbozzi della neurula. Già da esperienze precedenti di MANGOLD e SPEMANN (1927-33) e mie personali (1931), risulta che i territori presuntivi organo-formativi possiedono ampie facoltà induttrici, che possono esplicare se hanno a disposizione materiale giovane da indurre. Nelle esperienze trattate nel presente lavoro però le azioni induttrici agiscono su tessuti già quasi determinati istologicamente, i quali (ad eccezione dell'epidermide e forse dell'endoderma della coda) non sono più accessibili a qualsiasi influenza induttrice. Invece a questi stadi può ancora intervenire una regolazione dinamica e meccanica fra i singoli abbozzi.

IL SIGNIFICATO DEI SINGOLI ABOZZI ORGANO-FORMATIVI PER LO SVILUPPO DELLA CODA.

Il materiale dei somiti è certamente il più importante durante il differenziamento del bottone codale in via di sviluppo. Asportando solamente i miotomi della coda, questa può assolutamente non svilupparsi. Ciò non

viene infirmato dal fatto, che altri abbozzi organo-formativi (p. es., tubo neurale, corda) possano indurre l'ectoderma soprastante a formare una sporgenza; perchè qui si tratta di induzioni (in stadi giovani) oppure di evocazioni (in stadi più avanzati). Se è diminuita la quantità di mesoderma, si forma una coda più o meno accorciata. In essa il tubo neurale e la corda esplicano le loro tendenze alla distensione, non possono però attraversare l'estremità mesodermica della coda e perciò si piegano al loro estremo.

Una coda normale sia internamente che esternamente, formata da tubo neurale, corda, somiti, intestino caudale, lamina della pinna dorsale e ventrale, nei loro tipici rapporti topografici, si può formare soltanto in presenza di tutti gli abbozzi presuntivi. L'asportazione completa di un territorio organo-formativo (ad eccezione del materiale presuntivo della lamina della pinna) porta sempre ad un difetto corrispondente nella formazione della coda.

Una coda esternamente completa, formata da un asse caudale difettoso e dei lembi della pinna, si può ottenere coll'estirpazione dell'abbozzo del tubo neurale o della corda. In questi casi però l'aspetto esterno della coda è influenzato dalla mancanza di queste parti (rattrappimento ventrale o laterale).

Una protuberanza caudale appuntita, formata da una parte assile completa o difettosa e priva di pinna, si forma asportando i territori presuntivi del lembo della pinna situati nella cresta neurale.

Lamine della pinna singole, ossia duplicate cutanee a forma di cresta con tipica disposizione trasversale delle cellule mesenchimali, si formano per l'isolamento delle due creste neurali in seguito a trapianto (TERNI, 1924) oppure per asportazione del territorio della placca midollare situato tra esse.

La formazione della coda nello sviluppo normale si può interpretare perciò come risultato di una cooperazione funzionale (« Kombinative Einheitsleistung » nel senso di LEHMANN; vedi anche HOLTFRETER, 1933) dei singoli abbozzi già precedentemente determinati della neurula, i quali vengono portati dai movimenti formativi in stretta relazione di contatto reciproco. Seguono processi di accrescimento, durante i quali le singole parti della porzione assile della coda (corda, tubo neurale, somiti) esplicano indipendentemente le loro tendenze all'accrescimento ed alla distensione. Le velocità con cui crescono i singoli abbozzi, sono determinate indipendentemente l'una dall'altra, per cui nel decorso dello sviluppo normale si forma una coda armonicamente segmentata. Se in stadi precoci le tendenze a crescere ed a differenziarsi della corda e del tubo neurale (e mesoderma?) sono in reciproca dipendenza di correlazione per induzione, ciò non pertanto nel bottone caudale in via di sviluppo esse sembrano esplicare autonomamente le loro tendenze formative.

La lunghezza della coda dipende dalla quantità del materiale mesodermico presente. Si può anche formare una coda esternamente normale con quantità non troppo piccole di mesoderma, tuttavia si riscontra che all'interno l'accorciamento rispettivo della corda non si è esteso anche agli altri organi assili, che hanno continuato a svilupparsi autonomamente. Soltanto il materiale del lembo della pinna (creste neurali + ectoderma della lamina) sembrano essere in rapporto armonico con la lunghezza della coda.

La direzione della coda in accrescimento dipende essenzialmente dallo equilibrio dinamico dei suoi organi assili. Tubo neurale da una parte e somiti + endoderma dall'altra, rappresentano una coppia di fattori ad azione reciprocamente antagonista, il cui equilibrio porta ad un accrescimento rettilineo all'indietro. Anche la distribuzione bilaterale simmetrica del mesoderma è importante per la estensione rettilinea della coda. Così pure la corda è un fattore altrettanto importante la cui presenza è essenziale per un accrescimento rettilineo in senso caudale.

Fisiologia (Chimica fisiologica). — *Il contenuto in vitamina B¹ del grano studiato in confronto col campione internazionale per la vitamina medesima*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di V. FAMIANI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

L'ultima conferenza internazionale di Londra (giugno 1934) per la standardizzazione delle vitamine, confermava, nei riguardi di quella anti-neuritica B¹, l'adozione dello «standard», già precedentemente stabilito, e rappresentato dal prodotto di adsorbimento, preparato (dal Laboratorio medico di Batavia-Giava) col processo Seidell, nel quale sostanza madre è la pula di riso e adsorbente la terra di fullone. L'unità di vitamina B¹ sarebbe pertanto rappresentata dalla quantità contenuta in 10 mg. di detto prodotto; e 2-3 unità corrisponderebbero alla dose curativa, capace di guarire la polineurite da dieta orizanica esclusiva in un piccione di 300 gr.

Avendo a disposizione, gentilmente fornитoci dall'Istituto di Sanità Pubblica — che ne è per l'Italia depositario, — un certo quantitativo di tale preparato-campione, e potendo valerci per il dosaggio della vitamina B¹ di un metodo biologico notevolmente esatto, quale è quello adottato presso questo Istituto, e fondato sull'applicazione del criterio del quoziente beriberico secondo G. Amantea⁽³⁾, abbiamo voluto approfittarne per comparare

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 27 luglio 1936.

(3) G. AMANTEA, *Sul fattore antineuritico (B) e sul concetto di «quoziente beri-berico»* (Q_B) «Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei», vol. XVIII, p. 317, 1933.

il contenuto in vitamina B¹ di un dato grano, con quello del campione internazionale.

Per la tecnica di dosaggio secondo il criterio accennato, ci siamo attenuti esattamente alle norme, proposte come più convenienti dallo stesso G. Amantea (1).

In 4 colombi adulti « pavoncelli » di razza pura, nati e allevati nella colombaia dell'Istituto e convenientemente preparati, abbiamo accertato il valore del quoziente beri-berico (Q_b) normale, alimentandoli con 30 gr. *pro die* di riso brillato e lavato, fornito per imbeccamento ed in una sola volta. Dopo ciò su ogni animale, in due prove consecutive, abbiamo studiato gli spostamenti indotti sul valore del Q_b dalla aggiunta alla dieta orizanica esclusiva, o di una determinata dose del campione internazionale (in una prova), o di una determinata quantità di grano « Villa Glori » Strampelli (nell'altra prova). Precisamente abbiamo confrontato l'effetto dell'aggiunta di 50, 100, 150 o 200 unità del campione internazionale, con l'effetto dell'aggiunta rispettivamente di 20, 30, 40 e 50 gr. del grano. Tali quantità sia di terra di fulloni, sia di grano vennero somministrate agli animali frazionatamente, in 10 eguali dosi, distribuite per ciascuna prova durante i primi 10 giorni dell'alimentazione orizanica; dallo 11° giorno in poi, fino alla comparsa dei segni iniziali netti di beri-beri, i colombi furono alimentati (sempre per imbeccamento) con soli 30 gr. di riso brillato e lavato.

Alla comparsa dei primi sintomi beri-berici netti, si interrompeva la esperienza, si curava l'animale, da guarirlo e utilizzarlo ancora per nuove prove, e si calcolava il Q_b secondo G. Amantea (loc. cit.).

Presentiamo i nostri risultati riuniti nella annessa tabella I.

Da essa appare come lo spostamento indotto nel valore del Q_b dalla aggiunta di 50 o 100 unità di fattore B¹ (e rispettivamente pari a 0.13 e 0.22) si è dimostrato eguale a quello indotto dall'aggiunta di 20 o 30 g. del grano adoperato (e rispettivamente pari a 0.13 e 0.21); il che equivarrebbe ad ammettere, che in un grammo del nostro grano fossero contenute all'incirca 2.5-3 unità di vitamina B¹. Per le maggiori dosi usate questa corrispondenza si perde; ma la precedente osservazione sembrerebbe confermata dal fatto che lo spostamento indotto da 40 gr. di grano (0.23) è anch'esso pressoché eguale – sebbene in questo caso le osservazioni siano state fatte su due diversi animali – a quello portato da 100 unità di fattore B¹ ($40 \times 2.5 = 100$), mentre lo scarto conseguente all'aggiunta di 150 unità (0.43) è soltanto di poco superiore al triplo (0.39) di quello notato per 50 unità « standard » (0.13). Così pure solo di poco inferiore a due volte e mezza quello dato da 2 gr. di grano, appare, quello (0.28) ottenuto per aggiunta di 50 gr. di grano.

Nè questa incorrispondenza tra valore del Q_b e aumento della dose giornaliera di grano deve destar meraviglia, dato che la quantità di vitamina

(1) G. AMANTEA, *La determinazione del « quoziente beri-berico » (Q_b). Notizie di tecnica*. « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XVIII, p. 399, 1933.

TABELLA I.

Valore e spostamenti del Q_b , ottenuti per aggiunta al riso brillato di:

| N. dello animale | Valore normale del Q_b | Valore e spostamenti del Q_b | | Q_b | Scarto | Scarto |
|---------------------|--------------------------------|--|--------|----------------------------------|--------|--------|
| | | Q_b | Scario | | | |
| Col. I | 0.68 | 50 unità standard di fattore B_1 | 0.81 | 20 gr. di grano «Villa Glori» | 0.81 | 0.13 |
| Col. II | 0.73 | 100 unità standard di fattore B_1 | 0.95 | 30 gr. di grano «Villa Glori» | 0.94 | 0.21 |
| Col. III | 0.73 | 150 unità standard di fattore B_1 | 1.16 | 40 gr. di grano «Villa Glori» | 0.96 | 0.23 |
| Col. IV | 0.77 | 200 unità standard di fattore B_1 | 1.15 | 50 gr. di grano «Villa Glori» | 1.05 | 0.28 |

antineuritica contenuta in 5 gr. di grano, e fornita insieme con l'alimento deficiente, rappresenta forse qualche cosa di più della dose di equilibrio, e l'animale che in tal momento ancora ha perfettamente integra la sua riserva di detto fattore, non ne ritiene l'eccesso, il quale può perdersi con gli escrementi; una conferma di tale possibilità ci viene fornita dal comportamento dell'aggiunta al riso di 200 unità di fattore B¹ (*20 pro die*), in cui lo scarto del valore del Q_b è nettamente inferiore (0.38) a quello ottenuto per aggiunta di sole 150 unità (0.43). Del resto G. Amantea ha insistito sul fatto che è necessario pel dosaggio somministrare giornalmente quantità di materiali, che contengano la vitamina B¹ in dose inferiore a quella giornaliera di equilibrio.

Potremmo pertanto ritenerci autorizzati a pensare che nel grano da noi adoperato (« Villa Glori »), e che, sia detto per inciso, non è tra quelli a più alto contenuto in fattore antineuritico⁽¹⁾, sia contenuto detto fattore in quantità di circa 2.5 unità per grammo: non lo faremo, avendo avuto in queste ricerche il precipuo scopo di confrontare il comportamento del nostro grano con quello dello « standard » per il fattore B¹. Tuttavia, due cose non possiamo a meno di considerare e fare presenti: la egualanza degli spostamenti del valore del Q_b nel caso del confronto tra 50 e 100 unità « standard » e 20 e 30 gr. di grano, ed il comportamento molto più regolare nel caso delle maggiori quantità di grano, che non in quello delle quantità crescenti dello « standard ».

Ci si obietterà però che 3 unità-campione di fattore B¹ guariscono dalla polineurite un piccione di 300 gr.; cosa che non fanno, ad es., 3 gr. di grano; ma (a parte le numerose critiche che potrebbero muoversi al metodo curativo, e che esorbiterebbero peraltro dai limiti di questa Nota), non è risultato a noi esatto, in ricerche all'uopo istituite, che la dose proposta (3 unità) sia sufficiente a guarire i piccioni in beri-beri. Ci sono state necessarie invece, per ottenere la completa guarigione, da 15 a 20 unità, come risulta dalla unita tabella II, nella quale sono riportati alcuni casi di trattamento curativo con dosi diverse del campione internazionale, e dalla quale abbiamo omesso, per brevità, i casi riferentisi alle dosi inferiori a 10 ctgr., e che naturalmente si sono rivelate affatto negative.

Più opportuno pertanto ci sembra seguire nei dosaggi il metodo da noi adoperato, della determinazione del Q_b.

E perchè, d'altronde, non si potrebbe, opportunamente modificandolo, abbinare lo studio del campione internazionale al metodo della determinazione del Q_b? Si potrebbe, ad es., valendosi della tecnica da noi seguita in questi tentativi di dosaggio, stabilire una volta tanto in un sufficiente numero di animali — magari precedentemente selezionati, — gli scarti del

(1) V. FAMIANI, *Sul contenuto in vitamina antineuritica (B¹) di alcune varietà di grano italiano*. « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XXII, p. 93, 1935.

TABELLA II.

| Colombo N. | giorno di comparsa dei sintomi beri-berici | Quadro sintomatologico | Trattamento | Osservazioni |
|------------------------------|---|---|-------------------------------------|---|
| 1 bianco «pavoncello» | 4-8-1933 | netta sindrome beri-berica con sintomatologia a carico degli arti | 30 ctgr. di campione internazionale | 5-8-1933. Completamente guarito. |
| 2 bianco «pavoncello» | 6-8-1933 | netta sindrome beri-berica con sintomatologia a carico degli arti e tendenza a fenomeni a tipo cerebellare | 20 ctgr. di campione internazionale | 7-8-1933. Completamente guarito. |
| 3 bianco «pavoncello» | 27-9-1933 | netta sindrome beri-berica con sintomatologia a carico degli arti | 15 ctgr. di campione internazionale | 28-9-1933. Molto migliorato: permane lieve dismetria, accompagnata da barcollamento di tanto in tanto. Si somministra lievito di birra. 29-9-1933. Condizioni immutate. |
| 4 bianco «pavoncello» | 28-9-1933 | netta sindrome beri-berica con sintomatologia a carico degli arti e tendenza a fenomeni a tipo cerebellare. | 15 ctgr. di campione internazionale | 29-9-1933. Condizioni pressoché stazionarie: riflessi plantari di nuovo presenti, sebbene poco vivaci; sintomatologia a tipo cerebellare immutata. Si somministra lievito di birra. 30-9-1933. Animale guarito del tutto. |
| 5 grigio «viaggiatore» | 13-4-1934 | netta sindrome a tipo cerebellare | 15 ctgr. di campione internazionale | 14-4-1934. Guarito quasi completamente: rimane solo una lievissima dismetria. |
| 6 grigio «viaggiatore» | 11-4-1934 | netta sindrome a tipo cerebellare | 10 ctgr. di campione internazionale | 12-4-1934. Migliorato: sono scomparsi i sintomi a tipo cerebellare; rimane però chiara dismetria e «steppage», che si accentuano dopo affaticamento, anche lievissimo, dell'animale. |

valore del Q_b corrispondenti a determinate dosi, crescenti o decrescenti, del campione internazionale, e a tali spostamenti poi riportare quelli ottenuti per la somministrazione delle sostanze o alimenti in esame, rendendo così facile il calcolo delle unità di vitamina B₁ ivi contenute.

Riteniamo che risultati non privi di interesse pratico potrebbero in tal modo ottersi.

Fisiologia (Chimica fisiologica). — *Sul contenuto in Cloro del ratto albino in rapporto all'età*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di A. SALVATORI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

In altro nostro lavoro⁽³⁾, occupandoci dell'ipocloremia post-operatoria nell'uomo, abbiamo messo in evidenza le difficoltà, che si incontrano nel dare all'ipocloremia osservata una spiegazione, che sia in armonia con tutto il quadro clinico del decorso post-operatorio. Fin da allora pensammo, che lo studio della questione sarebbe grandemente facilitato, se essa venisse trasportata dall'uomo all'animale, facendole contemporaneamente perdere il carattere originario, spiccatamente clinico, e avviandola su un ampio binario biochimico.

Entrati in quest'ordine di idee, noi abbiamo infatti incominciato a sperimentare, scegliendo come animale da esperimento il ratto albino, per molte ragioni, ma soprattutto perchè, nella previsione che il nostro studio dovesse portarci all'uso di alimentazioni speciali, non ci trovassimo in difficoltà a questo riguardo, essendo ben nota la adattabilità del ratto albino alle più svariate diete sperimentali.

Iniziando il nostro lavoro, abbiamo sentito il bisogno di possedere alcuni dati di indole generale, come per es. il contenuto in cloro del ratto in rapporto all'età, la sua distribuzione in organi e tessuti pure in varie età, le variazioni del cloro sanguigno col variare dell'alimentazione, ecc. Tutti questi dati naturalmente li abbiamo prima accuratamente cercati nella letteratura, così generale che speciale, e soprattutto nella monografia *The Rat* del Donaldson⁽⁴⁾, nella quale si trovaano numerose tabelle di dati costitutivi normali e patologici del ratto in rapporto all'età, e anche un'abbondantissima letteratura sul ratto come animale da esperimento. La nostra ricerca però non ci ha dato risultati soddisfacenti, e allora, per ognuno dei

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisiologica della R. Università di Roma, diretto dal prof. G. Amantea.

(2) Pervenuta all'Accademia il 27 luglio 1936.

(3) A. SALVATORI e V. PALUMBO, *Contributo allo studio dell'ipocloremia post-operatoria*. «Fisiol. e Med.», vol. VIII, 1936.

(4) H. H. DONALDSON, *The Rat*. Philadelphia, 1924.

dati sopra elencati, abbiamo istituita una serie di esperienze su un numero di ratti, sufficiente per un sicuro orientamento.

In questa Nota diamo conto delle ricerche sul contenuto in cloro del ratto in rapporto all'età. Per le nostre esperienze siamo partiti da 8 ratte gravide, tenute ad alimentazione mista sia prima che dopo il parto, e per tutto il periodo dell'allattamento. Anche i piccoli, dallo slattamento in poi, hanno ricevuto un alimento misto. I ratti vennero sacrificati costantemente per mezzo di etere in ambiente chiuso. In genere li abbiamo sacrificati subito dopo la nascita, poi dopo lo slattamento, e poi ad intervalli irregolari di 10-30 giorni, talvolta anche ad intervalli maggiori, a seconda dell'andamento della curva del peso. La tecnica sperimentale usata, si è basata su due operazioni distinte, e cioè:

- 1) Incenerimento dell'animale in presenza di alcali.
- 2) Estrazione delle ceneri con acqua bollente, concentrazione della soluzione così ottenuta, neutralizzazione con acido nitrico, dosaggio del cloro col metodo di Volhard.

Per quanto riguarda l'incenerimento, occorreva decidere, se esso doveva farsi o no in presenza di alcali, perchè è noto che, se la grandissima parte del cloro contenuto nei tessuti, è allo stato di cloruro, pure si discute ancora oggi, se, specialmente nel sangue, in piccola parte si trovi anche sotto forma organica. Noi abbiamo stimato che, ad eliminare ogni dubbio anche di piccole perdite, l'incenerimento doveva farsi in presenza di alcali, pur rendendoci conto che questo ci avrebbe reso l'operazione molto laboriosa, specialmente quando avremmo dovuto lavorare con ratti adulti. In un primo tempo abbiamo perciò aggiunto piccole quantità di idrato sodico; ma poi questa questione è passata in seconda linea, perchè già con ratti di circa un mese abbiamo dovuto eseguire l'incenerimento in presenza di notevoli quantità di alcali, specialmente quando il ratto era di peso superiore ai 30-40 grammi, e ciò perchè la carbonizzazione procedesse in modo regolare e rapido. Con poco alcali, detta operazione riusciva oltremodo penosa, perchè l'abbondante grasso che man mano si liberava dai tessuti, raccogliendosi sul fondo della capsula, dava luogo a continue proiezioni, che non potevano evitarsi, se non col tenere bassa la fiamma e con l'agitare di continuo la massa bollente. Ma anche se si fosse voluto spiegare tutta la pazienza occorrente per bruciare in queste condizioni un ratto, per es., di 150-200 grammi, non si sarebbe raggiunto lo scopo voluto, perchè ad un certo punto, con fiamma bassa, la carbonizzazione praticamente si arrestava. Invece in presenza di discrete quantità di alcali, il grasso non si separava, la massa diventava fluida e la carbonizzazione procedeva regolarmente e celermemente, perchè anche a fiamma diretta non si avevano proiezioni. Ciò premesso, ecco come noi abbiamo in particolare proceduto.

Il ratto veniva sacrificato facendogli aspirare dell'etere in ambiente ristretto e chiuso. Si apriva poi l'addome, si asportava lo stomaco, che

veniva svuotato, lavato con acqua distillata e poi asciugato con carta da filtrò. A rigore avremmo dovuto svuotare anche l'intestino, ma a ciò abbiamo rinunciato, considerando che la quantità di cloro che si elimina per le feci è piccolissima. Tutto l'animale allora veniva tagliuzzato e sistemato in una capsula di nichel di adeguata capacità. Si aggiungevano poi da 5 a 20 cc. di idrato sodico al 30 %, a seconda del peso del ratto, e si metteva a riscaldare a modica fiamma su reticella di amianto, agitando di tanto in tanto. Quando si era ottenuta una massa alquanto fluida, si riscaldava a fiamma diretta, regolando il riscaldamento in modo da avere una tranquilla ebollizione. In ultimo si riscaldava a tutta fiamma onde ottenere una completa carbonizzazione. Ottenuta così una massa carboniosa, questa si tritava finemente, e poi si aggiungevano pochi cc. di acqua distillata e si portava a secco di nuovo, continuando il riscaldamento per circa mezza ora a fiamma diretta. In questa maniera tutta la sostanza organica era certamente bruciata. Ciò ottenuto, si sarebbe dovuto continuare il riscaldamento fino a completa combustione del carbone. Ma per la presenza dei sali provenienti dal ratto, e più che più dell'idrato sodico aggiunto, detta combustione si sarebbe prolungata per un tempo notevolissimo. Per ovviare a questo inconveniente, alla massa carboniosa, finemente tritata, si aggiungeva acqua distillata bollente, si agitava e si filtrava. Questa operazione veniva ripetuta fino a portare tutta la massa sul filtro. Una volta così raccolta, la massa stessa veniva ancora lavata con acqua distillata bollente. Dopo ciò il filtro veniva bruciato in capsula di Nichel. Ora la combustione procedeva rapida e veniva spinta fino ad ottenere una massa di colore grigio-ardesia. Allora si ripeteva l'estrazione e il lavaggio nell'identica maniera prima descritta, unendo il filtrato a quello precedentemente ottenuto.

La soluzione così risultante, veniva concentrata fino a piccolo volume e poi acidificata con acido nitrico. Ciò fatto si procedeva alla titolazione del cloro. Per detta titolazione abbiamo usato Nitrato di argento N/40 per le soluzioni provenienti da ratti piccoli, e N/4 per quelle provenienti da ratti adulti. La precipitazione del cloruro di argento venne fatta all'ebollizione onde ottenerlo ben coagulato, e dopo raffreddamento si titolò con solfocianato, indicatore l'allume ferrico.

In tutte le determinazioni eseguite non abbiamo mai notato alcun disturbo nell'andamento della titolazione.

Diamo ora in una tabella i risultati ottenuti:

| N. delle madri | N. dei figli | Età giorni | Peso g. | Cl come NaCl mg. | % Cl come NaCl |
|-------------------|-----------------|---------------|------------|------------------------|-------------------|
| 1 | 1 | 4 | 6.284 | 22.16 | 0.35 |
| | 2 | 4 | 6.110 | 22.00 | 0.36 |
| | 3 | 18 | 28.180 | 64.83 | 0.23 |
| | 4 | 18 | 28.778 | 72.67 | 0.25 |
| | 5 | 55 | 98.640 | 214.10 | 0.21 |
| | 6 | 62 | 120.790 | 266.77 | 0.22 |
| | 7 | 116 | 195.000 | 447.06 | 0.22 |
| 2 | 1 | 1 | 5.706 | 20.52 | 0.35 |
| | 2 | 30 | 25.548 | 68.81 | 0.26 |
| | 3 | 30 | 26.590 | 71.58 | 0.26 |
| | 4 | 70 | 99.930 | 235.07 | 0.23 |
| | 5 | 77 | 114.20 | 234.92 | 0.20 |
| | 6 | 100 | 188.00 | 405.93 | 0.21 |
| 3 | 1 | 5 | 4.96 | 18.61 | 0.37 |
| | 2 | 30 | 23.620 | 60.42 | 0.25 |
| | 3 | 30 | 23.770 | 66.25 | 0.27 |
| | 4 | 60 | 64.52 | 153.77 | 0.23 |
| | 5 | 80 | 98.50 | 176.00 | 0.22 |
| 4 | 1 | 1 | 4.120 | 15.01 | 0.36 |
| | 2 | 26 | 24.380 | 72.75 | 0.29 |
| | 3 | 47 | 73.950 | 156.32 | 0.21 |
| | 4 | 64 | 87.26 | 179.41 | 0.20 |
| | 5 | 70 | 98.670 | 197.90 | 0.20 |
| | 6 | 70 | 100.15 | 210.31 | 0.21 |
| | 7 | 90 | 127.57 | 255.24 | 0.20 |
| 5 | 1 | 24 | 17.27 | 55.95 | 0.32 |
| | 2 | 36 | 39.57 | 96.57 | 0.24 |
| | 3 | 46 | 49.04 | 113.10 | 0.23 |
| | 4 | 51 | 60.33 | 121.10 | 0.20 |
| | 5 | 69 | 77.81 | 184.22 | 0.23 |
| 6 | 1 | 2 | 6.31 | 22.70 | 0.35 |
| | 2 | 30 | 39.30 | 96.42 | 0.24 |
| | 3 | 36 | 46.02 | 111.15 | 0.24 |
| | 4 | 48 | 48.67 | 137.23 | 0.27 |
| | 5 | 65 | 70.15 | 162.10 | 0.23 |
| | 6 | 80 | 101.14 | 233.22 | 0.23 |
| | 7 | 115 | 162.40 | 358.20 | 0.22 |
| 7 | 1 | 1 | 5.600 | 20.15 | 0.35 |
| | 2 | 26 | 31.000 | 76.30 | 0.24 |
| | 3 | 46 | 60.400 | 139.71 | 0.23 |
| | 4 | 64 | 112.000 | 262.15 | 0.23 |
| | 5 | 92 | 137.10 | 295.21 | 0.21 |
| | 6 | 161 | 196.80 | 414.30 | 0.20 |
| 8 | 1 | 1 | 4.7 | 17.01 | 0.36 |
| | 2 | 25 | 26.15 | 66.81 | 0.25 |
| | 3 | 50 | 58.60 | 142.02 | 0.24 |
| | 4 | 70 | 95.12 | 210.20 | 0.22 |
| | 5 | 90 | 128.20 | 295.23 | 0.23 |
| | 6 | 120 | 172.00 | 345.80 | 0.21 |
| | 7 | 140 | 195.00 | 428.51 | 0.21 |

Osservando i dati riportati nella tabella, si può notare che le percentuali di cloro riscontrate nei ratti in rapporto all'età, per tutte le figliate da noi prese in esame, seguono sensibilmente la stessa legge. Col crescere dell'età si è avuta una diminuzione di cloro non graduale, ma a salti. Infatti, mentre al termine del 1° mese di vita il cloro (espresso in NaCl) è passato da 0.35 a 0.25 % del peso, dopo il 2° mese esso è sceso a 0.23 % e dopo il 3° mese a 0.21-0.20 %.

Le nostre esperienze si riferiscono ad un periodo medio di vita di 100 giorni, e cioè dalla nascita al pieno stato adulto. In un secondo tempo ci proponiamo di estendere le nostre ricerche al periodo, che va dallo stato adulto alla vecchiaia più avanzata.

Ci si può ora chiedere: come spiegare la diminuzione di cloro osservata? Riteniamo ardua la risposta; solo possiamo dire, che in nostre altre ricerche, ancora inedite, sulla distribuzione del cloro nei vari organi e tessuti del ratto in rapporto all'età, abbiamo osservato che in alcuni organi il cloro rimane costante (per es. nel cervello), in altri invece diminuisce col crescere dell'età (per es. polmone, fegato). Sembra dunque che la diminuzione di cloro osservata debba essere collegata con l'evoluzione di determinati organi. Ma giudichiamo prematuro insistere su qualunque spiegazione, e perciò per ora ci contentiamo di affermare, a conclusione della presente nota:

- I) Che nel ratto albino il cloro diminuisce col crescere dell'età.
- II) Che questa diminuzione è notevole dopo il primo mese di vita, piccola invece dopo tale periodo.
- III) Che come dato normale del cloro (espresso in NaCl) del ratto giovane, si può assumere il valore 0.20-0.23 % del suo peso.

N. P.

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1936 (Anno XIV).

(Ogni Memoria e Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo)

Geofisica. — *Lavori geofisici eseguiti dall'Istituto di Geodesia della R. Università di Padova nella regione vesuviana nel 1934-35. Nota⁽¹⁾ del Socio E. SOLER.*

La regione vesuviana presenta, come è ben noto, vasti argomenti di studio geofisici, tra i quali quelli riguardanti la costituzione del sottosuolo.

Specialmente, su tale argomento, due questioni hanno attratto l'attenzione dei geologi e dei vulcanologi: l'andamento del condotto interno vesuviano, e la costituzione attuale interna dei Campi Flegrei, antico distretto vulcanico.

I metodi moderni d'indagine gravimetrica danno mezzo di pervenire ad induzioni attendibili su quelle due questioni: giacchè la Bilancia di Torsione Eötvös permette una indagine di dettaglio del sottosuolo, mentre i metodi di determinazione gravimetrica pendolare possono condurre alla conoscenza più generale della costituzione interna di una regione.

Dobbiamo aggiungere che la opportunità di ricerche gravimetriche nella regione vesuviana era stata sin dal 1923 posta in evidenza dal Comitato Vulcanologico Universitario di Napoli, e che il ch.mo prof. Malladra aveva ripetuto questa opportunità nella riunione della Associazione internazionale di Vulcanologia, tenuta a Lisbona nel 1933.

Pertanto l'Istituto di Geodesia di Padova, cogli apparati da esso posseduti, cioè una *Bilancia Fotografica Eötvös-Schweydar*, grande modello, già

(1) Presentata nella seduta del 5 giugno 1936.

adoperata nelle ricerche geofisiche condotte dallo stesso Istituto nella regione Carsica nel 1931-32⁽¹⁾, ed una *Mensola Bipendolare Mioni*, adesso corredata di copertura pneumatica, assunse lo incarico di eseguire una serie di ricerche gravimetriche eötvössiane e pendolari nella citata regione.

Prima di dare delle notizie riassuntive dei lavori eseguiti, ci corre il gradito dovere di ringraziare il ch.mo prof. Malladra per il contributo finanziario dato per conto della detta Associazione internazionale di Vulcanologia e per la cortese ospitalità nell'Osservatorio Vesuviano, ed il prof. Signore, Assistente al detto Osservatorio nel periodo delle nostre ricerche, per la infaticabile attività mostrata nel facilitarle.

Contributi finanziari furono pure concessi dal Ministero dell'Educazione Nazionale, dal Consiglio Nazionale delle Ricerche, e dalla R. Commissione Goedetica Italiana, ai quali Enti porgiamo pure dei ringraziamenti.

Alla campagna pigliarono parte il prof. Boaga, Docente di Topografia e Geodesia nella R. Scuola d'Ingegneria di Pisa, ed il dott. Marcantonio, Assistente all'Istituto di Geodesia della R. Università di Padova.

Le operazioni sul terreno vennero eseguite nel 1934 dal 1º agosto al 15 settembre, e nel 1935 pure nei mesi di agosto e settembre.

Nel primo periodo (1934) vennero fatte n. 42 stazioni eötvössiane nella zona che da Portici prosegue per Torre del Greco, Torre Annunziata, e circonda il cono vesuviano verso Est e N-E, cioè verso Boscoreale, Terzigno ed Ottaviano. La detta zona è la più indicata per le operazioni colla Bilancia, perchè pianeggiante ed a discreta distanza dal massiccio vesuviano. I due limiti della rete eötvössiana furono i dintorni di Portici e quelli di Ottaviano, nelle quali località il prof. Boaga eseguì due stazioni pendolari colla citata *Mensola Bipendolare Mioni*, ed i cui risultati sono pubblicati negli Atti dello Istituto Veneto⁽²⁾.

Dette stazioni furono stabilite per avere dei valori gravimetrici di controllo alla rete eötvössiana, e per servire come base di confronto con altre stazioni pendolari, che sarebbero state fatte in altro periodo nella regione, per un più completo studio gravimetrico della stessa.

Dai calcoli eseguiti nell'Istituto di Geodesia di Padova sulle 42 stazioni del 1934, venne chiara la necessità di infittire la rete di dette stazioni per ottenere un tracciamento più sicuro delle linee *isoanomale*. Perciò, nel 1935 vennero stabilite nella zona indicata altre 20 stazioni eötvössiane complementari (nn. 43-62).

(1) Ved. E. SOLER, *Campagna geofisica nella regione Carsica di Postumia*. (« Memorie dell'Istituto Italiano di Speleologia ». Trieste, 1934); Id., *Campagna geofisica eseguita dall'Istituto di Geodesia della R. Università di Padova nel 1932 nella zona S. Canziano-Trebiciano*. (« Bollettino della Soc. Adriatica di Scienze Naturali », vol. XXXIII, 1934).

(2) Ved. G. BOAGA, *Determinazioni di gravità relativa eseguite nel 1934 tra Padova, Portici ed Ottaviano - (Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, to. XCVI, parte seconda, 1935).

Contemporaneamente il prof. Boaga eseguiva n. 4 stazioni pendolari, cioè una a Somma Vesuviana nella regione settentrionale del Vesuvio, per constatare l'andamento delle *anomalie gravimetriche* rispetto a quelle di Portici e di Ottaviano: altre tre stazioni pendolari vennero stabilite nei Campi Flegrei, cioè a Bacoli, Pianura e Pozzuoli (Solfatara) per una prima indagine sulla costituzione interna della regione ⁽¹⁾.

La Tabella I annessa riporta, per le 62 stazioni, i valori dei *gradienti* in unità eötvössiane, con gli azimut relativi rispetto al meridiano astronomico, ed il valore delle *curvature* coi relativi azimut ⁽²⁾.

(1) Dette determinazioni sono in corso di pubblicazione presso il R. Istituto Veneto.

(2) Non riteniamo dover dilungarci sulla esposizione dei metodi di osservazione con la Bilancia e sulle formule relative, perché ciò risulta, oltre che dalle Memorie originali dell'Eötvös, da numerosissimi Trattati e Memorie.

Basterà accennare, per chiarimento della Tabella I e della Cartina, che, detto U il *potenziale terrestre delle forze*, le letture con la Bilancia permettono di ricavare in ogni stazione le *derivate seconde*:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial U}{\partial x^2}$$

riferite a tre assi ortogonali, supposti con l'origine nel centro di massa della Bilancia, e con quello dello z nella direzione della verticale del punto stazione, e quelli delle x e delle y nel piano tangente alla superficie di livello passante per detto punto; e precisamente quello delle x diretto verso il Nord magnetico e quello delle y ad esso normale.

Dopo avere introdotto in dette *Derivate* le correzioni *topografica* e *cartografica*, cioè dopo averle corrette con opportune formule per l'azione delle masse sovrastanti al geoido entro un raggio di 100 m. mediante livellazione, ed entro un raggio di 20 a 30 km. usando delle Carte topografiche, e dopo aver riferite le *derivate* al meridiano astronomico, si ricava il *gradiente gravimetrico colla formula*

$$g = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\right)^2}$$

ed il suo *azimut colla*

$$\tan \alpha = \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}}{\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}}$$

Il *gradiente* dà, nel piano orizzontale citato sopra, la direzione delle masse interne di maggiore densità, e dalla sua grandezza è possibile avere un criterio sullo spessore dei detti strati.

Viene poi ricavata colla formula

$$g \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)^2}$$

la *curvatura* in ogni stazione, e l'*azimut* della stessa colla

$$\tan 2\lambda = \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}}$$

La Tabella II dà i valori della *gravità* trovata nelle stazioni osservate col pendolo. In essa sono inscritti, oltre la posizione geografica e l'altezza di ogni stazione, il valore g della *gravità osservata*, il valore g_0 della detta gravità ridotta al livello del mare colla formula di Faye, quello $g' - g$ della *correzione topografica*, il valore g'' dedotto dal g_0 dopo introdotta la correzione topografica e quella del Bouguer; il valore γ_0 della *gravità normale*, calcolato colla formula internazionale (1930), e le due *anomalie* $g_0 - \gamma_0$, e $g'' - \gamma_0$. Sono pure inscritti gli *errori medi* delle determinazioni gravimetriche.

Nella Cartina annessa sono poi segnati con frecce rosse i *gradienti eötvössiani*, con segmenti rettilinei scuri le *curvature*; ed inoltre sono segnate con curve oscure le *linee isoanomale*, ricavate, come è noto, dalle differenze fra il *valore normale* teorico della gravità ed i valori osservati nelle singole stazioni e provenienti dalle misure eötvössiane.

Nella detta Cartina sono pure segnati il massiccio Vesuviano, e le colonne di lava nei vari periodi⁽¹⁾.

La ispezione della detta Cartina permette immediatamente le seguenti deduzioni:

I. — La direzione della maggior parte dei *gradienti* nella zona di Ottaviano mostra un addensamento di masse interne verso la regione N E vesuviana.

II. — La direzione della quasi totalità dei *gradienti* nella zona costiera, dove essi risultano generalmente rivolti verso l'interno, mostra una deficienza di densità sotterranea dalla parte del mare. Soltanto in un tratto di zona costiera, verso Torre Annunziata, alcuni gradienti diretti verso il mare dimostrano l'esistenza di addensamenti sottomarini; e ciò è spiegabile con la massa della grande colata di lava del 1750 che (v. Cartina) si protende verso la costa con probabile ingente massa interna.

La direzione e la grandezza dei *gradienti* fra Trecase e Boscoreale induce a ritenere che in quella zona, nella direzione S E, cioè verso il mare, sia la massima deficienza.

L'addensamento di masse nella zona sotterranea verso Ottaviano è posta pure in evidenza dall'andamento delle *anomalie gravimetriche* positive, che sono crescenti da + 0.005 a + 0.019 gal.

La *curvatura* dà nozione dello scostamento della superficie di livello passante per la stazione rispetto ad una figura fondamentale, generalmente la sferica.

Ancora, detto θ l'azimut della congiungente due stazioni A, B e d la loro distanza, si ha il valore della differenza fra le *componenti verticali* della *gravità* nelle due stazioni colla

$$\Delta g = \frac{d}{2} \left\{ \left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right)_A + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right)_B \right] \cos \theta + \left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \right)_A + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \right)_B \right] \sin \theta \right\}.$$

(1) La carta del Vesuvio è stata disegnata su quella 1:25000 pubblicata dallo I. G. M. nel 1930.

La deficienza sotterranea nella zona di Boscoreale è comprovata dai valori delle *anomalie gravimetriche*, le quali, da positive e decrescenti verso Terzigno (da + 0.005 a 0.000 gal), diventano negative sino a raggiungere — 0.019 gal sotto Boscoreale.

Come fenomeno speciale, va segnalata la decrescenza delle anomalie ad E di Torre del Greco, sino a raggiungere in una curva chiusa la anomalia di — 0.007 gal. Ciò dimostra l'esistenza di una deficienza locale di densità in quel tratto.

Queste deduzioni sono comprovate dai valori gravimetrici pendolari. L'*anomalia* (v. Tabella II) che è di — 0.002 gal a Portici, diventa positiva con un valore di + 0.022 gal ad Ottaviano, ed acquista il forte valore di + 0.081 gal a Somma Vesuviana, mostrando che il fenomeno della deficienza non va oltre la zona costiera, ed un forte addensamento avviene verso la parte settentrionale del Vesuvio.

Queste varie constatazioni indurrebbero a ritenerre la zona fra Trecase e Boscoreale come la più probabile per la direzione del condotto sotterraneo vesuviano.

L'attendibilità dei rilievi con la Bilancia è poi confermata dal fatto che, seguendo varie poligonali tra le stazioni eötvössiane fra Portici ed Ottaviano, la somma algebrica dei valori delle Δg , ricavate tra le stazioni successive, differisce dalla *differenza gravimetrica pendolare* Portici–Ottaviano di quantità che entrano nell'ambito degli *errori di osservazione*.

Le *anomalie gravimetriche* pendolari di Bacoli, Pianura e Pozzuoli, per le quali nella Tabella II risultano dei forti valori positivi poco diversi tra loro, mostrano una uniformità di addensamento sotterraneo nella regione dei Campi Flegrei. Questo risultato concorda con quello trovato per altri antichi distretti vulcanici, in cui delle masse pesanti sono penetrate negli antichi focolari, e da noi constatato nella regione dei Colli Euganei, con le operazioni geofisiche eseguite nel 1913-14.

TABELLA I.

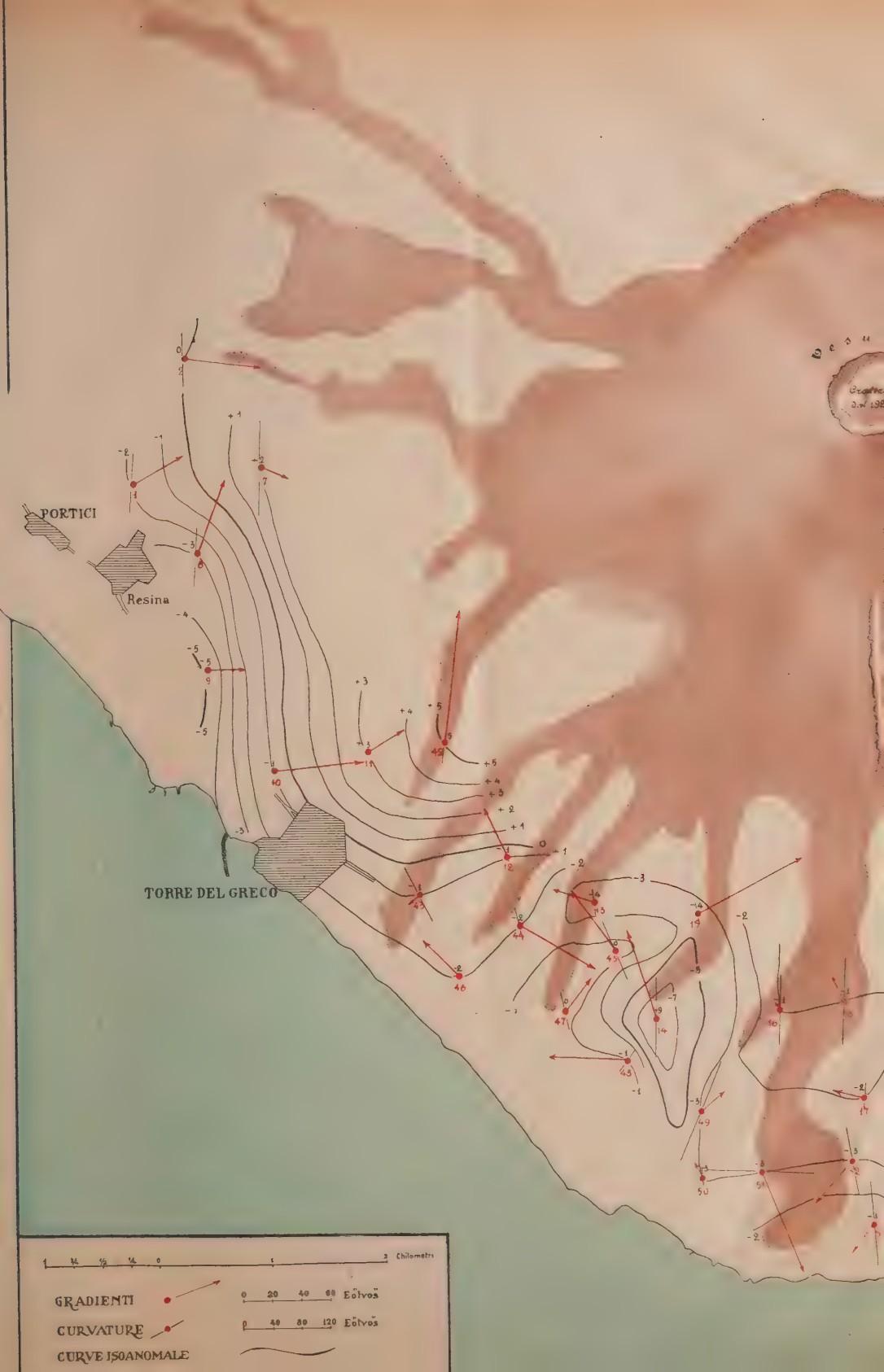
| Sta- zioni | Gradienti | | Curvature | | Ubicazione | Anno |
|---------------|-----------|----------|--|------------|------------------------------------|------|
| | G | ω | $g \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)$ | 2λ | | |
| 1 | 40.2 | 57°10' | 100.5 | + 13°30' | Nord di Portici | 1934 |
| 2 | 54.2 | 98 0 | 87.4 | + 6 10 | id. | " |
| 3 | 100.8 | 201 0 | 251.6 | + 4 40 | Ottaiano | " |
| 4 | 52.6 | 232 5 | 118.6 | + 15 20 | id. | " |
| 5 | 87.0 | 237 20 | 87.3 | + 26 0 | id. | " |
| 6 | 80.0 | 301 5 | 72.1 | + 14 40 | id. | " |
| 7 | 42.9 | 101 10 | 141.4 | + 7 10 | Portici | " |
| 8 | 59.2 | 20 30 | 106.0 | + 12 0 | Resina | " |
| 9 | 28.4 | 91 15 | 18.9 | + 63 20 | Tra Resina e Torre del Greco | " |
| 10 | 65.9 | 84 50 | 14.4 | + 44 50 | Torre del Greco | " |
| 11 | 29.4 | 52 30 | 19.8 | - 34 0 | id. | " |
| 12 | 28.9 | 337 20 | 42.1 | - 25 20 | id. | " |
| 13 | 23.2 | 302 55 | 40.4 | - 6 50 | Torre del Greco - Torre Ann. (a N) | " |
| 14 | 66.2 | 341 55 | 127.9 | + 2 30 | id. | " |
| 15 | 66 2 | 61 40 | 34.4 | - 16 50 | id. | " |
| 16 | 6.5 | 327 30 | 109.5 | + 9 30 | id. | " |
| 17 | 22.3 | 282 25 | 44.6 | + 5 50 | id. | " |
| 18 | 21.6 | 334 15 | 137.7 | + 6 10 | Fra Torre Annunziata e Trecase | " |
| 19 | 11.6 | 262 35 | 132.2 | + 6 0 | id. | " |
| 20 | 68.6 | 308 40 | 58.4 | + 9 40 | id. | " |
| 21 | 110.9 | 311 50 | 131.9 | + 9 30 | Trecase | " |
| 22 | 75.0 | 335 35 | 53.3 | + 13 30 | Tra Ottaiano e Terzigno | " |
| 23 | 74.3 | 235 30 | 56.4 | + 4 20 | id. | " |
| 24 | 34.7 | 302 20 | 145.4 | + 6 50 | id. | " |
| 25 | 33.9 | 200 50 | 128.0 | + 29 20 | Terzigno | " |
| 26 | 57.7 | 321 05 | 27.6 | + 16 50 | id. | " |
| 27 | 29 8 | 37 45 | 175.7 | + 9 10 | id. | " |
| 28 | 47.4 | 41 45 | 16.3 | - 42 30 | Tra Terzigno e Boscoreale | " |
| 29 | 47.5 | 353 25 | 14.0 | - 19 40 | id. | " |
| 30 | 87.0 | 180 0 | 17.7 | - 30 0 | id. | " |
| 31 | 58.5 | 18 45 | 18.7 | + 49 50 | Nord di Boscoreale | " |
| 32 | 77.0 | 325 35 | 26.5 | + 36 0 | Tra Boscoreale e Trecase (a N) | " |

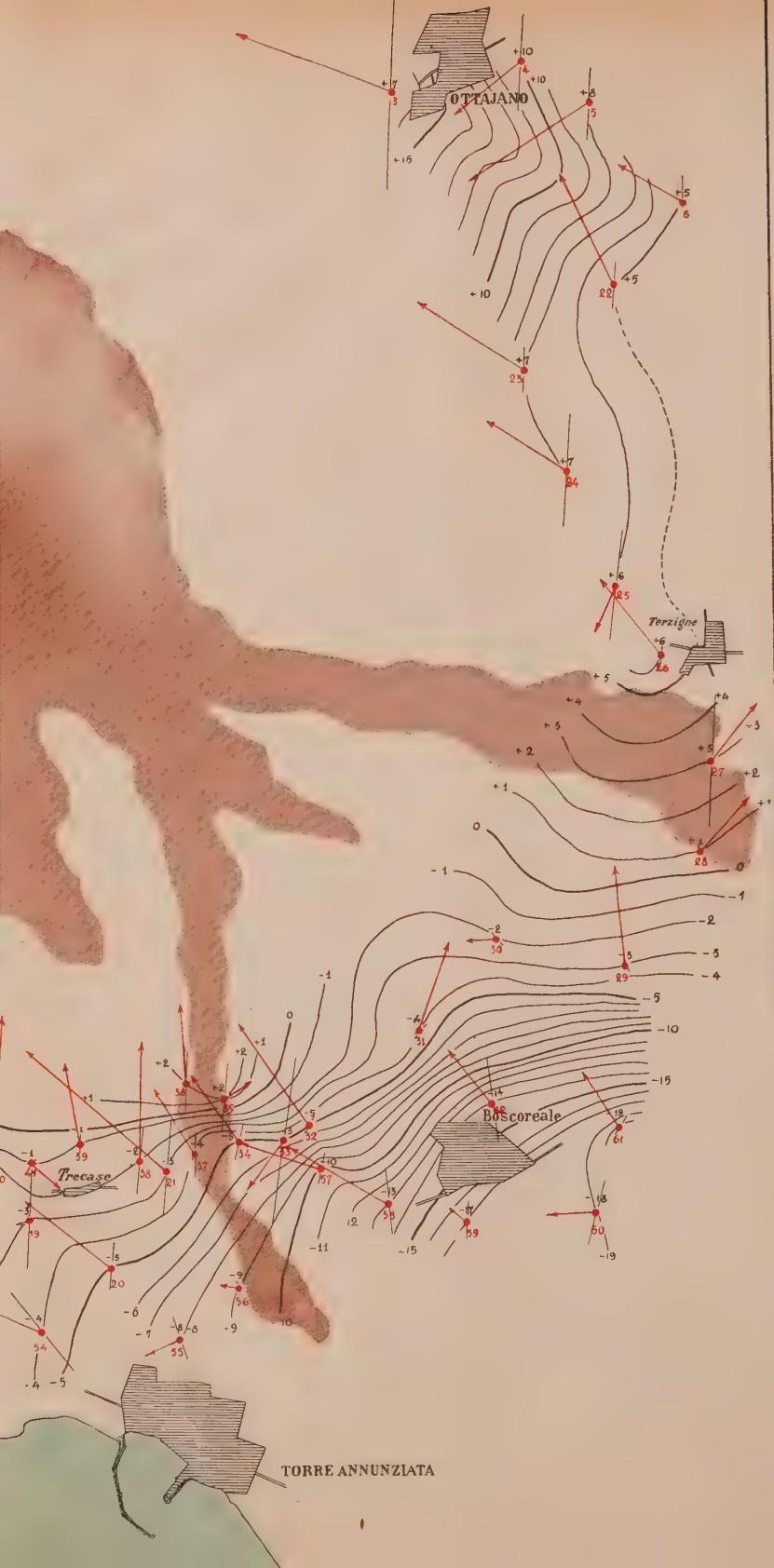
Segue TABELLA I.

| Stazioni | Gradienti | | Curvature | | Ubicazione | Anno |
|----------|-----------|----------|--|------------|---|------|
| | G | ω | $\varrho \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)$ | 2λ | | |
| 33 | 36.7 | 218° 0' | 221.2 | + 16° 50' | Tra Boscoreale e Trecase (a N) | 1934 |
| 34 | 50.6 | 325 35 | 24.3 | + 24 50 | id. | " |
| 35 | 19.0 | 69 15 | 92.2 | + 19 0 | id. | " |
| 36 | 50.6 | 358 40 | 56.0 | + 8 40 | id. | " |
| 37 | 48.6 | 330 15 | 73.1 | + 6 30 | id. | " |
| 38 | 75.2 | 1 35 | 98.5 | + 9 10 | id. | " |
| 39 | 67.5 | 349 45 | 27.3 | + 3 10 | Nord di Trecase | " |
| 40 | 90.4 | 4 30 | 65.8 | + 11 20 | id. | " |
| 41 | 25.4 | 129 55 | 8.1 | + 55 30 | id. | " |
| 42 | 95.2 | 6 35 | 65.8 | + 11 20 | N. di Torre del Greco | " |
| 43 | 10.3 | 212 46 | 97.3 | - 41 47 | Torre del Greco | 1935 |
| 44 | 62.6 | 331 35 | 61.0 | - 25 10 | Tra Torre del Greco e Torre Annunziata verso mare | " |
| 45 | 52.1 | 126 54 | 108.0 | - 33 24 | id. | " |
| 46 | 36.0 | 134 36 | 12.6 | + 72 26 | id. | " |
| 47 | 32.3 | 49 24 | 69.9 | - 19 5 | id. | " |
| 48 | 58.9 | 184 56 | 89.6 | + 54 35 | id. | " |
| 49 | 21.0 | 44 25 | 157.2 | + 38 59 | id. | " |
| 50 | 14.6 | 115 10 | 67 5 | - 1 27 | id. | " |
| 51 | 78.8 | 293 29 | 104.1 | - 82 30 | id. | " |
| 52 | 39.7 | 225 42 | 109.3 | 14 14 | id. | " |
| 53 | 25.4 | 225 38 | 133.7 | - 15 54 | id. | " |
| 54 | 59.4 | 156 35 | 128.8 | - 36 0 | Intorno a Torre Annunziata | " |
| 55 | 22.5 | 209 17 | 60.6 | - 14 41 | id. | " |
| 56 | 12.8 | 22 58 | 13.1 | - 18 43 | id. | " |
| 57 | 59.1 | 158 35 | 43.3 | + 3 3 | Intorno a Boscoreale | " |
| 58 | 75.1 | 149 0 | 94.9 | - 3 54 | id. | " |
| 59 | 17.4 | 134 30 | 55.6 | + 10 30 | id. | " |
| 60 | 30.2 | 181 8 | 81.3 | + 23 38 | id. | " |
| 61 | 42.3 | 120 23 | 48.2 | + 58 46 | id. | " |
| 62 | 43.2 | 126 43 | 114.4 | - 1 42 | id. | " |

TABELLA II.

| Stato e Stazioni | Latitudine N | Longitu- dine E Gr. | Altezza m. | Densità | Gravità osservata ξ | Errore medio Mg | Anno | ξ_o | $\xi' - \xi$ | ξ'' | Formula internaz. (1930) |
|------------------------|-----------------|---------------------------|---------------|---------|-------------------------------|-------------------------|------|------------|--------------|------------|--------------------------|
| | | | | | | | | ξ_{al} | ξ_{al} | ξ_{al} | |
| ITALIA | | | | | | | | | | | |
| Portici | 40° 48', 9 | 14° 21', 1 | 92 | 1,8 | 980,228 | ± 0,0014 | 1934 | 980,256 | ± 0,001 | 980,253 | — 0,002 + 0,033 |
| Ottaiano | 40 50,9 | 14 28,6 | 195 | 1,8 | 980,230 | ± 0,0014 | 1934 | 980,290 | ± 0,003 | 980,256 | + 0,022 + 0,034 |
| Somma Vesuviana . | 40 52,4 | 14 26,2 | 153 | 1,8 | 980,301 | ± 0,0020 | 1935 | 980,348 | ± 0,002 | 980,339 | + 0,081 + 0,090 |
| Bacoli | 40 47,8 | 14 48 | 16 | 1,8 | 980,324 | ± 0,0020 | 1935 | 980,329 | 0,000 | 980,328 | + 0,077 + 0,078 |
| Pianura | 40 51,8 | 14 10,6 | 158 | 1,8 | 980,286 | ± 0,0020 | 1935 | 980,335 | ± 0,002 | 980,325 | + 0,068 + 0,078 |
| Pozzuoli | 40 49,6 | 14 8,2 | 101 | 1,8 | 980,291 | ± 0,0020 | 1935 | 980,325 | 0,000 | 980,318 | + 0,064 + 0,071 |





Biologia. — *Incremento del condrioma ed attivazione del metabolismo.* Nota⁽¹⁾ del Socio A. Russo.

Con l'aumento dei granuli condriosomici, come fu esposto nella Nota precedente⁽²⁾, si è ottenuto un aumento delle interfacie degli elementi della fase dispersa con maggiore sviluppo di *energia di superficie*⁽³⁾.

Con la presente Nota si vuole dimostrare che, all'aumento dei granuli, corrisponde un aumento dell'attività metabolica, nell'oocite della Coniglia⁽⁴⁾. Ritengo che l'aumento di attività costituisca un altro dato per la documentazione del fatto che i granuli, aumentati con il trattamento lecitinico, non sono elementi inerti, ma che essi stessi prendano parte attiva alla vita cellulare. Tale documentazione si è raggiunta più tosto agevolmente perché, mentre, nelle cellule di vari tessuti, durante il ciclo vitale, non è sempre possibile seguire le variazioni del metabolismo per mancanza di prodotti metabolici bene apprezzabili, nell'oocite della Coniglia, lo sviluppo delle riserve di deutolecite ha permesso di seguirne i diversi gradi. Si è potuto, infatti, rilevare che, nelle Coniglie lecinate ed in quelle normali di controllo, la prima comparsa e l'ulteriore evoluzione dell'elemento specifico dell'attività metabolica non coincidono, in quanto nelle prime, oltre una

(1) Pervenuta all'Accademia il 7 agosto 1936.

(2) A Russo, *Natura chimica, incremento, reversibilità del condrioma*. «Rend. R. Acc. Lincei», vol. XXIII, ser. 6^a, 1936.

(3) La presenza del glutatione nel condrioma, dimostrata microscopicamente nel 1927, da JOYET-LAVERGNE, influendo sui processi ossido-riduttivi, che si svolgono nel citoplasma, aumenterebbe gli scambi tra la fase liquida e quella dispersa.

JOYET-LAVERGNE, *Sur le rôle du chondriome dans le métabolisme cellulaire*. «Compt.-Rend. Soc. Biol.», to. XCVII, 1927; *Sur les rapports entre le glutation et le chondriome*. «Compt.-Rend. Acc. des Sciences», to. 184, 1927; *La respiration intracellulaire et le problème cytologique du glutation*. «Rev. Gen. Sc. pures et appliquées», vol. 40, 1929.

Nel 1928, P. Di Mattei e Dulzetto migliorarono la tecnica per la ricerca del glutatione ed osservarono che, nel Ratto albino, l'ovario presenta un diverso contenuto in glutatione fra i suoi costituenti, essendo la reazione intensa negli oociti, scarsissima nello stroma.

P. DI MATTEI e F. DULZETTO, *Dimostrazione istochimica del glutatione e sua distribuzione in alcuni organi*. «Rend. R. Acc. Naz. Lincei», vol. VIII, ser. 6^a, Roma, 1928.

(4) JOYET-LAVERGNE nel 1927 («Compt.-Rend. Soc. Biol.», to. XCVII) mise in rapporto l'elemento granulare al metabolismo cellulare, ma occorre dire che il Bottazzi, nel 1923, già aveva affermato che una cellula, dotata di alto potenziale funzionale, è sempre ricca di granulazioni.

precoce formazione dei *globuli di vitello*, si ha un aumento della massa totale del *deutolecite*.

Per avere gli elementi della comparazione dei due gruppi, fin dal 1909⁽¹⁾, ho distinto i diversi gradi dello sviluppo dell'oocite, tenendo presente, come appresso è riportato, il differente stato del follicolo:

| | |
|-----------------|---|
| <i>Stadio I</i> | oocite, con follicolo monostratificato a cellule piatte. |
| » <i>II</i> | » » » » » cubiche. |
| » <i>III</i> | bistratificato. |
| » <i>IV</i> | di più strati di cellule e con spazi follicolari. |
| » <i>V</i> | distinto in granulosa ovulare e granulosa parietale e con larga cavità follicolare. |
| » <i>VI</i> | maturo. |

Tali dati servirono di punti di riferimento per stabilire il momento in cui i *globuli di vitello*, di natura lipoidea, fanno la loro prima comparsa, nei due gruppi in esperimento, e le variazioni, che essi subiscono, durante il ciclo vitale dell'oocite, come fu più ampiamente illustrato nel 1918⁽²⁾.

Nella Memoria del 1909 fu rilevato che, nel normale, allo stadio I, il *condrioma* è localizzato alla periferia dell'ooplasma e che, allo stadio II e III esso forma una rete a larghe maglie, su cui ancora non è apparso alcun *globulo vitellino*. Nelle Coniglie lecitinate, invece, mentre il *condrioma*, allo stadio I, occupa gran parte dell'ooplasma ed allo stadio II e III, forma una rete a piccole maglie, ricca di granuli, che si estende dalla periferia dell'oocite alla membrana limitante la vescicola germinativa, quando ancora il follicolo non è tutto bistratificato e quindi non ha raggiunto lo stadio III, si osservano i primi *globuli di vitello*, sparsi, in piccolo numero, fra le maglie della rete condriosomica.

Tali globuli, facendo la loro prima comparsa, nel normale, allo stadio IV, farebbero ritenere che, nella Coniglia lecitinata, per l'incremento dato sperimentalmente al *condrioma* ed al *metabolismo cellulare*, si sia prodotto una accelerazione del processo formativo del *deutolecite*.

L'influenza del trattamento lecitinico si rileva, inoltre, negli stadi IV e V, in cui i prodotti del metabolismo dell'ovo, *vacuoli nutritizi* e *globuli di vitello*, sono più piccoli e più numerosi che nel normale, il che importa

(1) A. Russo, *I mitocondri e i globuli vitellini dell'oocite di Coniglia allo stato normale ed in condizioni sperimentali*. «Atti Acc. Gioenia», vol. II, ser. 5^a. Catania, 1909.

(2) A. Russo, *La funzione di assorbimento e di secrezione interna delle cellule della granulosa del follicolo di Graaf della Coniglia, la degenerazione grassa ed il ciclo vitale dell'ovo*. «Atti Acc. Gioenia», vol. XI, ser. 5^a. Catania, 1918.

un aumento della massa totale delle riserve nutritizie dell'oocite. In questi stadi, la *zona radiata* delle Coniglie lecinate presenta qualche cellula ancora in mitosi e le cellule stesse con protoplasma ricco di granuli condriosomici, mentre esse, in stadio più avanzato, si presentano allungate più del normale e ricche di filamenti con reazione analoga al condrioma.

L'aumento di numero ed il minor volume, in confronto del normale, dei *vacuoli nutritizi* e dei *globuli lipoidei* mi ha fatto ritenere che, nell'oocite della Coniglia lecinitata, il consumo di tali materiali plastici avvenga in un tempo maggiore dei controlli e che quindi il primo periodo del ciclo dell'ovo abbia più lunga durata e si conservi tale nella maggior parte delle ova mature (cfr. Mem., 1909, p. 11).

L'avere osservato nelle ovaie delle Coniglie, trattate con Lecitina, pronte al coito, un maggior numero di *follicoli di Graaf*, sporgenti alla superficie⁽¹⁾, e l'avere ottenuto da tali soggetti un maggiore numero di nati, di fronte ai controlli⁽²⁾, convaliderebbe che il trattamento lecinitico, migliorando il metabolismo, aumenti nell'ovaia il *processo di ovulazione*.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Geometria delle distanze). — *Courbure dans les espaces métriques*. Nota⁽³⁾ di CHR. PAUC, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Soit H un espace métrique où $\delta(ab)$ désigne la distance de deux points a et b . p, q, r étant trois points distincts deux à deux, M. Menger⁽⁴⁾ appelle courbure du triplet (p, q, r) et la représente par $\kappa(pqr)$ l'inverse du rayon du cercle passant par les trois points d'un triplet euclidien (p', q', r') congruent, c'est à dire tel que:

$$\delta(pq) = p'q' \quad , \quad \delta(qr) = q'r' \quad , \quad \delta(rp) = r'p'.$$

Un ensemble M de H est dit posséder en un de ses points d'accumulation m_o une courbure de Menger $K(m_o)$ — $K(m_o)$ étant un nombre ≥ 0 fini — lorsque pour tous les triplets (p, q, r) de points de M convergeant vers m_o , $\kappa(pqr)$ converge vers $K(m_o)$ ⁽⁴⁾. M est dit posséder en m_o une

(1) A. Russo, *Modificazioni sperimentali dell'elemento epiteliale dell'ovaia dei Mammiferi*. «Atti R. Acc. dei Lincei», Roma, 1907, tav. V, fotogr. 17 e 18.

(2) A. Russo, *Osservazioni intorno all'influenza della Lecitina sulla prolificità di alcuni Mammiferi*. «Atti Acc. Gioenia», vol. IV, ser. 5^a, Catania, 1911.

(In questa Memoria, oltre la maggior natalità nelle Coniglie, trattate con Lecitina, fu riferito che nelle Pecore, con lo stesso trattamento, aumentarono i *parti gemellari*).

(3) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1936.

(4) «Mathematische Annalen», 103, 1930, p. 479 et 480.

courbure de Alt $k(m_0) - k(m_0)$ étant un nombre ≥ 0 fini — lorsque pour tous les couples (q, r) de points de M convergeant vers m_0 , $\kappa(m_0 qr)$ converge vers $k(m_0)$ ⁽¹⁾.

Une question qui se posait naturellement et que j'avais résolue affirmativement dans le cas euclidien en utilisant les lemmes d'univocité de M. Bouligand était la suivante: *Lorsqu'un continu K d'un espace métrique H possède en un point m_0 une courbure de Alt ou une courbure de Menger, K dans un voisinage de m_0 est-il un arc?*

Un exemple simple montre que la courbure de Alt ne permet pas cette affirmation. Considérons dans le plan trois segments AX, AY, AZ n'ayant deux à deux en commun que l'origine A ; K sera constitué par la réunion de ces segments et l'on prendra comme définition de la distance de deux points P et Q , la suivante:

1) Si P et Q se trouvent sur le même segment, $\delta(PQ)$ représentera la distance euclidienne PQ

$$\delta(PQ) = PQ.$$

2) Si P et Q se trouvent sur deux segments différents

$$\delta(PQ) = AP + AQ.$$

Il est clair que cette définition de la distance satisfait aux axiomes de Fréchet; or tous les triangles de sommet A ont une courbure nulle; K aura en A une courbure de Alt $k(A) = 0$. Cependant K dans un voisinage de A ne sera pas un arc comme on le voit en remarquant que ce point est pour le continu un point d'ordre trois. Notons que K n'admet pas en A de courbure de Menger.

Un exemple un peu plus compliqué est le suivant: l étant un nombre tel que $0 \leq l \leq 2$, AX, AY, AZ trois segments du plan n'ayant deux à deux en commun que l'origine A et de longueur $< \frac{1}{2}$, K sera constitué par la réunion de ces trois segments que l'on métrisera en conservant la première partie de la définition précédente et en remplaçant 2 par

$$(2') \quad \delta(PQ) = (AP + AQ)(1 - l \cdot AP \cdot AQ).$$

Un calcul montre que δ satisfait aux axiomes de Fréchet et que K jouit en A d'une courbure de Alt $k(A) = \sqrt{2l}$. Cependant aucun voisinage de A sur K n'est un arc. On remarque encore que K ne possède pas en A de courbure de Menger. Le premier exemple donné est un cas particulier du second pour $l = 0$.

Cherchons d'une façon générale ce que l'on peut affirmer d'un continu K qui a en un point m_0 une courbure de Alt, propriété que dans une Note

(1) ALT, *Dissertation*, Vienne, 1932.

précédente⁽¹⁾ j'avais appelée la *propriété III*; j'avais montré que dans le cas euclidien elle entraîne la suivante: K possède en m_0 une paratangente unique (*propriété II*), qui me suffisait pour affirmer qu'un voisinage de m_0 sur K était un arc. Ici encore c'est d'une conséquence de la propriété III dont nous allons tirer des conclusions.

Soit (p, q, r) un triangle d'un espace métrique, c'est à dire un triplet de ses points; par angles de ce triangle nous entendrons les angles d'un triangle euclidien congruent, par *aplatissement* $\varepsilon(pqr)$ l'excès de π sur son plus grand angle ou encore la somme de ses deux plus petits angles.

L'existence de la courbure de Alt pour K en m_0 permet d'affirmer que: *Les triangles constitués par des points de K voisins de m_0 et qui ont un sommet en m_0 sont aplatis.* Disons sous une forme précise qu'un continu K jouit en un de ses points m_0 de la PROPRIÉTÉ II' lorsque, quelque soit le nombre $\varepsilon_0 > 0$ donné à l'avance, on peut trouver un autre nombre $\rho_0 > 0$, tel que r et q étant deux points de K dont la distance à m_0 est $\leq \rho_0$, l'aplatissement du triangle $m_0 qr$ soit $< \varepsilon_0$:

$$(1) \quad \rho \leq \rho_0 \rightarrow \varepsilon(m_0 qr) < \varepsilon_0.$$

Notre affirmation revient à la suivante: La propriété III dans un espace métrique entraîne la propriété II'. Alors que la propriété II dans l'espace euclidien permettait l'utilisation immédiate des lemmes d'univocité de M. Bouligand, la propriété II' conduit à utiliser une méthode générale due à M. Menger: Etudier l'intersection de K avec la surface S_ρ de sphères suffisamment petites centrées sur m_0 ; elle fournit le lemme suivant qui constitue le noyau de la démonstration de notre premier théorème.

Lemme. — Si K est un continu de l'espace métrique H jouissant en un de ses points m_0 de la propriété II', il existe un nombre $\rho_0 > 0$, tel que pour $\rho \leq \rho_0$ la surface S_ρ d'une sphère de centre m_0 et de rayon ρ coupe K en un nombre fini de points dont les distances mutuelles sont $> \rho\sqrt{2}$.

Prenons pour ρ_0 celui défini par la formule (1) lorsque $\varepsilon_0 = \frac{\pi}{2}$. Soit $\rho \leq \rho_0$; démontrons que K a un nombre fini de points sur S_ρ .

Si $K \cdot S_\rho$ contient moins de deux points l'affirmation est vérifiée; supposons que $K \cdot S_\rho$ contienne au moins deux points, soient m_1 et m_2 deux d'entre eux. Considérons le triangle isocèle $m_0 m_1 m_2 : m_0 m_1 = m_0 m_2 = \rho$. D'après le choix de ρ_0 l'aplatissement de ce triangle est $< \frac{\pi}{2}$; il possède donc un angle obtus, ce sera nécessairement l'angle $\widehat{m_1 m_0 m_2}$, donc

$$m_1 m_2 = 2\rho \sin \frac{\widehat{m_1 m_0 m_2}}{2} > \rho\sqrt{2}.$$

(1) « Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris », to. 203, p. 29, 1936.

Les points de l'intersection $K \cdot S_\varepsilon$ sont deux à deux à une distance supérieure à une valeur fixe; mais K est compact et S_ε fermé; $K \cdot S_\varepsilon$ sera compacte et ne pourra par suite comprendre une infinité de points.

THÉORÈME I. — K étant un continu d'un espace métrique jouissant en un de ses points m_o de la propriété II', un voisinage de m_o sur K est constitué par la réunion d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'arcs rectifiables d'extrémité commune m_o , n'ayant que ce point en commun et tels qu'il n'y en ait qu'un nombre fini dont le diamètre dépasse un nombre positif arbitrairement fixé.

Avec la terminologie de M. Menger⁽¹⁾ nous pouvons nous exprimer plus brièvement et dire: Un continu qui jouit en un point m_o de la propriété II' est en ce point un *n-Bein* ou un *ω -Bein à branches rectifiables*.

Bien que l'existence d'une courbure de Alt soit une propriété plus restrictive que la propriété II', elle ne permet pas de préciser davantage la structure de K au voisinage de m_o ; nous avons donné l'exemple d'un continu formé par la jonction de trois arcs et admettant cependant au point de jonction une courbure de Alt. Si nous étions partis d'une infinité dénombrable de segments du plan: $AX_1, AX_2, \dots, AX_n, \dots$ n'ayant deux à deux en commun que l'origine A, et de longueurs convergeant vers 0, le même procédé de métrisation nous aurait fourni un « ω -Bein » jouissant en A d'une courbure de Alt.

Au contraire, en examinant la démonstration du lemme, on rencontre une propriété plus faible que II' et qui peut se substituer à elle dans l'énoncé du théorème I, à savoir là

Propriété II**. — Nous dirons qu'un continu K d'un espace métrique jouit en un de ses points m_o de la propriété II**, lorsque les triangles constitués par des points de K ayant un sommet en m_o ont un angle obtus dès que leurs cotés sont suffisamment petits⁽²⁾.

Cas de l'espace euclidien. — Dans l'espace euclidien le théorème I se simplifie beaucoup; nous pouvons préciser l'affirmation du lemme par la suivante: Pour ρ suffisamment petit, l'intersection $K \cdot S_\varepsilon$ comprend au plus deux points.

Prenons cette fois pour ρ_o celui défini par la formule (1) et correspondant à $\varepsilon_o = \frac{\pi}{3}$. Si $K \cdot S_\varepsilon$ comprenait plus de deux points, soient $m_1 m_2 m_3$ trois d'entre eux, nous aurions simultanément :

$$\widehat{m_1 m_o m_2} > \frac{2\pi}{3} \quad \widehat{m_2 m_o m_3} > \frac{2\pi}{3} \quad \widehat{m_3 m_o m_1} > \frac{2\pi}{3}.$$

Ceci est impossible dans un espace euclidien, où la somme des faces d'un trièdre est au plus égale à 2π .

(1) *Kurventheorie*, p. 214.

(2) Voir BOULIGAND, *Essai sur les Méthodes Directes*, p. 63, note 1.

$K \cdot S_o$ comprenant au plus deux points, un voisinage de m_o sur K sera soit un arc ayant une extrémité en m_o , soit la réunion de deux arcs terminés en m_o et n'ayant que ce point en commun, c'est à dire encore un arc. Nous retrouvons un théorème déjà établi par les méthodes de M. Bouligand.

Ce que nous venons de dire pour un espace euclidien s'applique à un espace tétraédral de M. Blumenthal, c'est à dire à un espace métrique où tout quadruplet de points est congruent à un quadruplet euclidien.

Cherchons maintenant ce que l'on peut affirmer d'un continu K qui possède en un point m_o une courbure de Menger, propriété que dans une Note précédente⁽¹⁾ j'avais appelée la propriété IV.

L'existence de cette courbure de Menger permet d'affirmer que: Les triangles constitués par des points de K voisins de m_o sont aplatis. Disons sous une forme précise qu'un continu K d'un espace métrique jouit en un de ses points m_o de la PROPRIÉTÉ II lorsque, quelque soit le nombre $\varepsilon_o > 0$ donné à l'avance, on peut trouver un $\rho_o > 0$, tel que p, q, r étant trois points de K dont la distance à m_o est $\leq \rho_o$, l'aplatissement du triangle pqr soit $< \varepsilon_o$.

$$\rho \leq \rho_o \rightarrow \varepsilon(pqr) < \varepsilon_o.$$

Notre affirmation revient à la suivante: La propriété IV dans un espace métrique entraîne la propriété II.

La structure d'un continu K jouissant au point m_o de la propriété II, s'obtient en recherchant l'ordre des points voisins de m_o sur K et en montrant que cet ordre est au plus égal à deux. D'où le théorème

THÉORÈME II. — Si un continu K d'un espace métrique jouit en un de ses points m_o de la propriété II, un voisinage de ce point sur K est un arc rectifiable.

Ce théorème subsiste évidemment si l'on y substitue à la propriété II la propriété plus forte IV, mais aussi si on y remplace II par une plus faible II*.

Propriété II*. — Nous dirons qu'un continu K d'un espace métrique jouit en un de ses points m_o de la propriété II* lorsque les triangles formés de points de K suffisamment voisins de m_o ont toujours un angle obtus⁽²⁾.

INTERPRÉTATION DES PROPRIÉTÉS II ET II' DANS LE CAS EUCLIDIEN.

Nous avons introduit deux propriétés relatives aux espaces métriques dont l'une la propriété II avait déjà une signification dans les espaces euclidiens. Nous avons fait cela intentionnellement et nous le justifions par le théorème suivant.

(1) « Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris », to. 203, p. 29, 1936.

(2) Voir BOULIGAND, *Essai sur les Méthodes Directes*, p. 63, note 1.

THEORÈME III. — *La condition nécessaire et suffisante pour que, dans un espace euclidien un continu K possède en un point m_o une paratingente unique, c'est que les triangles constitués par des points de K suffisamment voisins de m_o , aient un aplatissement arbitrairement petit.*

Ce théorème correspond exactement à l'exercice 11 de M. Bouligand, p. 220 de son *Introduction à la Géométrie différentielle directe* (Paris, Vuibert 1932) il correspond à l'interprétation métrique de l'importante propriété II des espaces euclidiens.

THEORÈME IV. — *Dans les espaces euclidiens et plus généralement dans les espaces tétraédraux les propriétés II et II' sont équivalentes.*

Ce théorème est une conséquence du lemme suivant:

Lemme. — Dans un espace euclidien ou tétraédral, lorsque trois triangles $m_o m_1 m_2$, $m_o m_2 m_3$, $m_o m_3 m_1$ de sommet commun m_o , ont respectivement comme aplatissement ε_3 , ε_1 et ε_2 , l'aplatissement du triangle $m_1 m_2 m_3$ est inférieur à $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$.

La démonstration de ce lemme est basée sur la propriété suivante: Etant donnés quatre points A, B, C, D d'un espace euclidien, chacun des angles \widehat{BAC} , \widehat{CAD} , \widehat{DAB} est inférieur à la somme des deux autres. C'est l'inégalité du trièdre. Il est intéressant de remarquer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace métrique soit tétraédral, c'est que pour quatre points quelconques de cet espace, l'inégalité du trièdre soit vérifiée. Il est aisé en effet de voir qu'avec les distances mutuelles des quatre points entre eux, on pourra grâce à cette condition, toujours construire un tétraèdre euclidien.

Propriétés II et II**.*

La propriété II* mérite aussi d'être examinée dans le cas d'un espace euclidien.

Si l'on considère, pour fixer les idées, l'espace ordinaire à trois dimensions, en se reportant à l'exercice 11 de l'*Introduction à la Géométrie différentielle directe* de M. Bouligand, on voit qu'en un point m_o où un continu K jouit de la propriété II*, le paratingent laisse échapper toutes les directions d'un plan.

Le théorème relatif aux espaces métriques à savoir que si un continu K jouit en un point m_o de la propriété II*, un voisinage de m_o sur K est un arc rectifiable, fournit une bonne interprétation métrique des lemmes d'universalité de M. Bouligand relatifs à la sélection des arcs.

Les propriétés II* et II** ne sont pas équivalentes dans les espaces euclidiens; il suffit pour le voir de prendre pour K un système de trois segments de même origine m_o et faisant entre eux des angles de $\frac{2\pi}{3}$.

Cependant on peut préciser le théorème I: Si, dans un espace euclidien plus généralement tétraédral, un continu K jouit en un de ses points m_0 de II**, un voisinage de m_0 sur K est constitué par la réunion d'un nombre fini n d'arcs rectifiables n'ayant en commun que l'extrémité m_0 .

Dans le cas du plan il y en aura au plus trois: $n \leq 3$.

On peut dans la définition de II** remplacer: ... ont un angle obtus ... par ... ont un angle $> \alpha \geq \frac{\pi}{3}$... α étant un angle fixe.

Si alors $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, dans tous les espaces euclidiens $n \leq 2$; un voisinage de m_0 sur K sera un arc.

Si $\alpha = \frac{\pi}{3}$, dans le cas du plan $n \leq 5$.

Tous ces résultats sont des conséquences faciles à tirer de la méthode générale de recherche de l'ordre de K en m_0 .

Meccanica (Aeronautica). — *Trave continua inflessa e sollecitata assialmente, con flessiorigidezza variabile linearmente lungo ogni campata.* Nota⁽¹⁾ di C. MINELLI, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Il calcolo qui descritto è stato suggerito dall'esistenza di ali nelle quali i longaroni hanno flessiorigidezze EI fortemente variabili fra due attacchi consecutivi (appoggi della trave continua), e spesso variabili con una legge assimilabile a una retta. Qui si segue lo stesso ragionamento fatto dal prof. Albenga nello stabilire la classica equazione che porta il suo nome⁽²⁾.

I. — TRAVE INFLESSA E TESA.

Si consideri dunque, dapprima, una trave continua in cui ogni campata sia tesa e inflessa, e si studi l'equilibrio di una campata qualunque s_d , immaginando che: nell'estremo destro (d) nulla sia alterato, e nell'estremo sinistro (s) sia stato eseguito un taglio applicando poi alla sezione libera le forze interne esistenti prima del taglio (e cioè: un momento flettente M_s , una forza tagliante R_s , uno sforzo assiale di trazione P).

Si assumano le notazioni in fig. 1, immaginando: positivo il carico flettente p se diretto verso il basso, positivo il momento flettente se tale da

(1) Pervenuta all'Accademia il 14 agosto 1936.

(2) « Bollettino tecnico », n. 12. Direzione Sperimentale dell'Aviazione. Nota del prof. G. ALBENGA; *Sulla trave continua inflessa e sollecitata assialmente.* Montecelio, febbraio, 1920.

comprimere le fibre superiori e tendere le inferiori, positivo lo sforzo tangente se tale da far crescere il momento flettente nel senso positivo dell'asse x . Questo si orienta parallelamente al primitivo asse della campata (cioè all'asse della campata scarica e senza dislivelli); lo sforzo assiale P è parallelo a tale asse.

Fig. 1

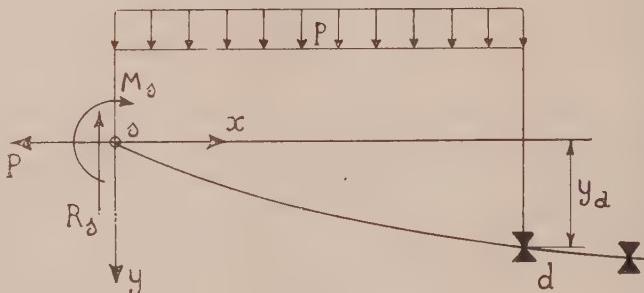
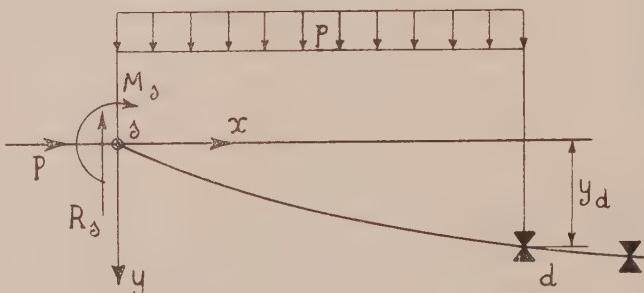


Fig. 2



Con queste convenzioni il momento flettente in una sezione della campata è:

$$(1) \quad M_x = -EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M_s + R_s x - \frac{Px^2}{2} - Py.$$

Derivando due volte e ordinando:

$$(2) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) - P \frac{d^2 y}{dx^2} = p.$$

Posto

$$(3) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = z$$

la (2) diviene:

$$(2') \quad \frac{d^2 (EIz)}{dx^2} - Pz = p.$$

Detti EI_s, EI_d i valori di EI in s e in d rispettivamente, sarà (a causa della linearità di EI):

$$(4) \quad EI = EI_s \left\{ 1 + \left(\frac{EI_d}{EI_s} - 1 \right) \frac{x}{l} \right\} = EI_s (1 + \alpha x)$$

con

$$(4') \quad \alpha = \frac{1}{l} \left(\frac{EI_d}{EI_s} - 1 \right)$$

onde la (2') diviene:

$$(2'') \quad \frac{d^2}{dx^2} \{ (1 + \alpha x) z \} - \frac{P}{EI_s} z = \frac{p}{EI_s}.$$

Le condizioni ai limiti per questa equazione differenziale del secondo ordine sono:

$$(5) \quad \begin{cases} \text{per } x = 0 & M_x = -EIz = -EI_s (1 + \alpha x) z = M_s \\ \text{per } x = l & M_x = -EIz = -EI_s (1 + \alpha x) z = M_d \end{cases}$$

ossia:

$$(5') \quad \begin{cases} \text{per } x = 0 & M_x = -EI_s z = M_s \\ \text{per } x = l & M_x = -EI_s (1 + \alpha l) z = -EI_d z = M_d \end{cases}$$

per cui il problema costituito dall'equazione differenziale e dalle sue condizioni ai limiti può scriversi:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \{ (1 + \alpha x) z \} - \frac{P}{EI_s} z = \frac{p}{EI_s} \\ z(0) = -\frac{M_s}{EI_s} \quad z(l) = -\frac{M_d}{EI_d} \end{cases}$$

Con

$$(7) \quad \xi = 1 + \alpha x$$

l'equazione differenziale diviene:

$$(6') \quad \frac{d^2(\xi z)}{d\xi^2} - \frac{I}{\alpha^2} \cdot \frac{P}{EI_s} z = \frac{p}{\alpha^2 EI_s}$$

cioè, con

$$(8) \quad \lambda^2 = \frac{I}{\alpha^2} \cdot \frac{P}{EI_s},$$

$$(6'') \quad \frac{d^2(\xi z)}{d\xi^2} - \lambda^2 z = \frac{p}{\alpha^2 EI_s}.$$

Si trova⁽¹⁾ che questa ha come integrale generale:

$$(9) \quad z = A \frac{J_1(2i\lambda\sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}} + B \frac{Y_1(2i\lambda\sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}} - \frac{p}{P}$$

ove J_1 e Y_1 sono le funzioni cilindriche, rispettivamente di Bessel e di Neumann, di ordine 1. E ancora, per la (7):

$$(9') \quad z = A \frac{J_1(2i\lambda\sqrt{I_1 + \alpha x})}{\sqrt{I_1 + \alpha x}} + B \frac{Y_1(2i\lambda\sqrt{I_1 + \alpha x})}{\sqrt{I_1 + \alpha x}} - \frac{p}{P}$$

alla quale bisogna aggiungere:

$$(10) \quad z(0) = -\frac{M_s}{EI_s} \quad z(l) = -\frac{M_d}{EI_d}.$$

Colle (10) si possono calcolare le costanti A e B; all'uopo introduciamo le abbreviazioni seguenti:

$$(11) \quad T(x) = \frac{J_1(2i\lambda\sqrt{I_1 + \alpha x})}{\sqrt{I_1 + \alpha x}} \quad V(x) = \frac{Y_1(2i\lambda\sqrt{I_1 + \alpha x})}{\sqrt{I_1 + \alpha x}}.$$

Con ciò:

$$(11') \quad z = AT(x) + BV(x) - \frac{p}{P}$$

e con questa, dalle (10):

$$(12) \quad \begin{cases} AT(0) + BV(0) - \frac{p}{P} = -\frac{M_s}{EI_s} \\ AT(l) + BV(l) - \frac{p}{P} = -\frac{M_d}{EI_d}. \end{cases}$$

(1) Vedi E. JAHNKE e F. EMDE, *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven*, Lipsia, Teubner, 1933.

E di qui:

$$(12') \quad \begin{cases} A = \frac{\left(\frac{M_d}{EI_d} - \frac{p}{P}\right)V(0) - \left(\frac{M_s}{EI_s} - \frac{p}{P}\right)V(l)}{\Delta} \\ B = \frac{\left(\frac{M_s}{EI_s} - \frac{p}{P}\right)T(l) - \left(\frac{M_d}{EI_d} - \frac{p}{P}\right)T(0)}{\Delta} \end{cases}$$

con

$$(12'') \quad \Delta = \begin{vmatrix} T(0) & V(0) \\ T(l) & V(l) \end{vmatrix}.$$

Dalla (11') e dalla (3) si ha:

$$(13) \quad z = \frac{d^2y}{dx^2} = AT(x) + BV(x) - \frac{p}{P}$$

da cui integrando una volta:

$$(13') \quad \frac{dy}{dx} = A \int_0^x T(\bar{x}) d\bar{x} + B \int_0^x V(\bar{x}) d\bar{x} - \frac{p}{P} x + C$$

e integrando ancora una volta:

$$(13'') \quad y = A \int_0^x d\bar{x} \int_0^{\bar{x}} T(\bar{x}) d\bar{x} + B \int_0^x d\bar{x} \int_0^{\bar{x}} V(\bar{x}) d\bar{x} - \frac{p}{P} \cdot \frac{x^2}{2} + Cx + D.$$

Le nuove costanti C e D si calcolano riflettendo che

$$(14) \quad \begin{cases} \text{per } x = 0 & y = 0 \\ \text{per } x = l & y = y_d. \end{cases}$$

La prima delle (14) fornisce D = 0.

La seconda:

$$C = \frac{y_d}{l} + \frac{pl}{2P} - \frac{1}{l} \left(A \int_0^l dx \int_0^x T(\bar{x}) d\bar{x} + B \int_0^l dx \int_0^x V(\bar{x}) d\bar{x} \right)$$

per cui la (13') fornisce, per $\frac{dy}{dx}$ in un punto generico della campata, la espressione:

$$(15) \quad \begin{aligned} \frac{dy}{dx} = & A \int_0^x T(\bar{x}) d\bar{x} + B \int_0^x V(\bar{x}) d\bar{x} - \frac{p}{P} x + \frac{y_d}{l} + \\ & + \frac{pl}{2P} - \frac{1}{l} \left(A \int_0^l dx \int_0^x T(\bar{x}) d\bar{x} + B \int_0^l dx \int_0^x V(\bar{x}) d\bar{x} \right). \end{aligned}$$

Ora possiamo calcolare le tangenti alla curva elastica negli estremi s e d della campata.

E precisamente :

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{dy}{dx} \right)_s = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \frac{y_d}{l} + \frac{pl}{2P} - \frac{I}{l} \left(A \int_0^l dx \int_s^x T(\bar{x}) d\bar{x} + \right. \\ \quad \left. + B \int_0^l dx \int_0^s V(\bar{x}) d\bar{x} \right) \\ \left(\frac{dy}{dx} \right)_d = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = A \left(\int_0^l T(x) dx - \frac{I}{l} \int_0^l dx \int_0^x T(\bar{x}) d\bar{x} \right) + \\ \quad + B \left(\int_0^l V(x) dx - \frac{I}{l} \int_0^l dx \int_0^x V(\bar{x}) d\bar{x} \right) + \frac{y_d}{l} - \frac{pl}{2P}. \end{array} \right.$$

Ora introduciamo le nuove abbreviazioni seguenti :

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^l T(x) dx - \frac{I}{l} \int_0^l dx \int_0^x T(\bar{x}) d\bar{x} = \frac{H}{l} \\ \int_0^l V(x) dx - \frac{I}{l} \int_0^l dx \int_0^x V(\bar{x}) d\bar{x} = \frac{K}{l} \\ \int_0^l dx \int_0^x T(\bar{x}) d\bar{x} = R \quad \int_0^l dx \int_0^x V(\bar{x}) d\bar{x} = S. \end{array} \right.$$

Con le (17) le (16) divengono

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{dy}{dx} \right)_s = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \frac{y_d}{l} + \frac{pl}{2P} - \frac{I}{l} (AR + BS) \\ \left(\frac{dy}{dx} \right)_d = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = \frac{I}{l} (AH + BK) + \frac{y_d}{l} - \frac{pl}{2P}. \end{array} \right.$$

Ora, mediante le (18), si scriva l'equazione di continuità fra due campate vicine (1) e (2), comprese fra tre appoggi i cui momenti si chiamano M_0, M_1, M_2 . Tale equazione è :

$$(19) \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)_{d,(1)} = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{s,(2)}$$

e mediante le (18) diviene (chiamando y_1 il dislivello fra gli appoggi 0 e 1, e y_2 il dislivello fra gli appoggi 1 e 2) :

$$(19') \quad \frac{I}{l_1} (AH + BK)_1 + \frac{y_1}{l_1} - \left(\frac{pl}{2P} \right)_1 = \frac{y_2}{l_2} + \left(\frac{pl}{2P} \right)_2 - \frac{I}{l_2} (AR + BS)_2.$$

Sostituendo nella (19') le espressioni (12') di A e di B, ordinando e riducendo, si ottiene:

$$(20) \quad \begin{aligned} & \frac{M_o}{(l\Delta EI_s)_1} \{ HV(l) - KT(l) \}_1 + \\ & + M_1 \left[\frac{I}{(l\Delta EI_d)_1} \{ KT(o) - HV(o) \}_1 + \frac{I}{(l\Delta EI_s)_2} \{ RV(l) - ST(l) \}_2 \right] + \\ & + \frac{M_2}{(l\Delta EI_d)_2} \{ ST(o) - RV(o) \}_2 = \left(\frac{y_1}{l_1} - \frac{y_2}{l_2} \right) - \frac{I}{2} \left\{ \left(\frac{pl}{P} \right)_1 + \left(\frac{pl}{P} \right)_2 \right\} + \\ & + \left(\frac{p}{P} \cdot \frac{I}{l\Delta} \right)_1 [H \{ V(l) - V(o) \} - K \{ T(l) - T(o) \}]_1 + \\ & + \left(\frac{p}{P} \cdot \frac{I}{l\Delta} \right)_2 [R \{ V(l) - V(o) \} - S \{ T(l) - T(o) \}]_2. \end{aligned}$$

In questa, $T(x)$ e $V(x)$ sono le funzioni espresse dalle (11); H, K, R, S , sono le grandezze espresse dalle (17); Δ è espressa dalla (12''). La (20) è la cercata «equazione dei tre momenti per la trave continua inflessa e sollecitata assialmente, con prodotto EI variabile linearmente lungo ogni campata».

Tale equazione permette, al solito, di eliminare l'indeterminazione statica, calcolando i momenti su tutti gli appoggi. Dopo di ciò, conoscendosi i due momenti M_s e M_d agli estremi di una campata qualunque, si potrà calcolare M_x in un punto generico di essa campata, riflettendo che:

$$(21) \quad M_x = -EI \frac{d^2y}{dx^2} = -EI_s(1 + \alpha x)\zeta$$

ove $\zeta(x)$ è noto dalla (9').

Pertanto è completamente risolto il problema relativo alla trave inflessa e tesa.

II. — TRAVE INFLESSA E COMPRESSA.

Passiamo a risolvere quello per la trave inflessa e compressa. Colle notazioni in fig. 2, ripetiamo succintamente il ragionamento già fatto:

$$(22) \quad M_x = -EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_s + R_s x - \frac{px^2}{2} + Py$$

da cui derivando due volte, adottando la (3), e ordinando, si ottiene:

$$(23) \quad \frac{d^2(EI\ddot{\zeta})}{dx^2} + P\ddot{\zeta} = p.$$

Questa, con la (4), diviene:

$$(24) \quad \frac{d^2}{dx^2} \{ (1 + \alpha x) \zeta \} + \frac{P}{EI_s} \zeta = \frac{p}{EI_s}.$$

Le condizioni ai limiti sono le stesse che nel caso della trave inflessa e tesa, per cui in definitiva il problema da risolvere è il seguente:

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \{ (1 + \alpha x) \zeta \} + \frac{P}{EI_s} \zeta = \frac{p}{EI_s} \\ \zeta(0) = -\frac{M_s}{EI_s} \quad \zeta(l) = -\frac{M_d}{EI_d}. \end{cases}$$

Con la (7) e con la (8), l'equazione differenziale (25) diviene:

$$(26) \quad \frac{d^2(\xi \zeta)}{d\xi^2} + \lambda^2 \zeta = \frac{p}{\alpha^2 EI_s}.$$

E questa ha per integrale generale:

$$(27) \quad \zeta = A \frac{J_1(2\lambda\sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}} + B \frac{Y_1(2\lambda\sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}} + \frac{p}{P}$$

cosicchè

$$(28) \quad \begin{cases} \zeta = A \frac{J_1(2\lambda\sqrt{1+\alpha x})}{\sqrt{1+\alpha x}} + B \frac{Y_1(2\lambda\sqrt{1+\alpha x})}{\sqrt{1+\alpha x}} + \frac{p}{P} \\ \zeta(0) = -\frac{M_s}{EI_s} \quad \zeta(l) = -\frac{M_d}{EI_d}. \end{cases}$$

Scriviamo anche stavolta, abbreviando:

$$(29) \quad T(x) = \frac{J_1(2\lambda\sqrt{1+\alpha x})}{\sqrt{1+\alpha x}} \quad V(x) = \frac{Y_1(2\lambda\sqrt{1+\alpha x})}{\sqrt{1+\alpha x}}.$$

Nelle $T(x)$ e $V(x)$ che qui si presentano, le J_1 e Y_1 che vi compaiono sono ad argomento reale, mentre nel caso della trave inflessa e tesa le J_1 e Y_1 che comparivano in $T(x)$ e $V(x)$ erano ad argomento immaginario.

Avremo dunque:

$$(28') \quad \begin{cases} \zeta = AT(x) + BV(x) + \frac{p}{P} \\ \zeta(0) = -\frac{M_s}{EI_s} \quad \zeta(l) = -\frac{M_d}{EI_d} \end{cases}$$

da cui :

$$(28'')$$

$$\left| \begin{array}{l} A = \frac{\left(M_d + \frac{p}{P} \right) V(o) - \left(M_s + \frac{p}{P} \right) V(l)}{\Delta} \\ B = \frac{\left(M_s + \frac{p}{P} \right) T(l) - \left(M_d + \frac{p}{P} \right) T(o)}{\Delta} \\ \Delta = \begin{vmatrix} T(o) & V(o) \\ T(l) & V(l) \end{vmatrix}. \end{array} \right.$$

Integrando due volte la (28') e ricordando che $y(o) = o$, $y(l) = y_d$, si riesce ad avere anche qui l'espressione completa di (dy/dx) in un punto qualunque della campata.

Specializzando tale espressione per i punti s e d , ed esprimendo la condizione di continuità fra due campate adiacenti sopra l'appoggio intermedio, si ottiene infine l'equazione dei tre momenti per la trave inflessa e compressa. Tale equazione è :

$$(30) \quad \frac{M_o}{(l \Delta EI_s)_1} \{ HV(l) - KT(l) \}_1 +$$

$$+ M_1 \left[\frac{l}{(l \Delta EI_s)_1} \{ KT(o) - HV(o) \}_1 + \frac{l}{(l \Delta EI_s)_2} \{ RV(l) - ST(l) \}_2 \right] +$$

$$+ \frac{M_2}{(l \Delta EI_s)_2} \{ ST(o) - RV(o) \}_2 = \left(\frac{y_1}{l_1} - \frac{y_2}{l_2} \right) + \frac{l}{2} \left\{ \left(\frac{pl}{P} \right)_1 + \left(\frac{pl}{P} \right)_2 \right\} +$$

$$- \left(\frac{p}{P} \cdot \frac{l}{l \Delta} \right)_1 [H \{ V(l) - V(o) \} - K \{ T(l) - T(o) \}]_1 +$$

$$- \left(\frac{p}{P} \cdot \frac{l}{l \Delta} \right)_2 [R \{ V(l) - V(o) \} - S \{ T(l) - T(o) \}]_2.$$

Nella (30), H, K, R, S sono ancora i simboli definiti dalle (17) ove però le funzioni $T(x)$ e $V(x)$ (i cui integrali entrano appunto nelle (17)) sono quelle espresse dalle (29).

Anche qui M_x si lascia subito calcolare lungo una campata, nello stesso modo indicato per la trave inflessa e tesa.

Si deve osservare che la (20) e la (30), per il caso di EI costante lungo le due campate vicine (ossia per $\alpha = 0$ in ambo le campate), dovrebbero ridursi all'equazione di Albenga, rispettivamente per la trave tesa e per la trave compressa.

La dimostrazione di ciò è tuttavia molto difficile, perchè per $\alpha = 0$ i coefficienti della (20) e della (30) assumono espressioni indeterminate e

l'applicazione del teorema di l'Hopital cogli integrali di funzioni cilindriche è molto sgradevole.

L'applicazione numerica della (20) e della (30) non è attualmente possibile, non esistendo tabelle delle varie grandezze che vi compaiono.

La tabellazione di dette grandezze è in corso presso l'Istituto per le Applicazioni del Calcolo del Consiglio Nazionale delle Ricerche; quando sarà eseguita si potrà, fra l'altro, provare numericamente che per α tendente a zero, le (20) (30) tendono alle equazioni di Albenga.

Meccanica. — *Sulle traiettorie dei problemi variazionali.*
Nota⁽¹⁾ di E. GUGINO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ 1. OGGETTO DELLA RICERCA.

Sia $L(x|\dot{x})$ una funzione qualsivoglia di $2n$ argomenti x^i e \dot{x}^i ($i = 1, 2, \dots, n$). Se le x^i si considerano funzioni di un parametro t e le \dot{x}^i come loro derivate, l'integrale :

$$(1) \quad S = \int_{t_0}^{t_1} L dt$$

dove t_0 e t_1 sono limiti fissi, ha un valore numerico ben determinato. Se lo si sottopone a variazione riguardando $\delta t = 0$ e le δx^i arbitrarie, ma nulle agli estremi, si sa che, sotto condizioni di comportamento ben noto, l'equazione variazionale :

$$(2) \quad \delta S = 0$$

equivale al sistema lagrangiano generale :

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Le traiettorie di questo sistema sono definite come l'insieme delle relazioni fra le x^i , che si ottengono dall'integrale generale eliminando la variabile indipendente t , che, volendo, si può interpretare come tempo.

Appare però desiderabile una caratterizzazione differenziale di codeste traiettorie che eviti, anche nella forma, la preventiva integrazione del sistema differenziale (3). Tanto meglio se, come mostreremo essere sempre possibile, l'anzidetta caratterizzazione differenziale potrà a sua volta essere compendiata

(1) Pervenuta all'Accademia il 19 agosto 1936.

in una equazione variazionale. Nel caso particolare in cui $L(x|\dot{x})$ sia funzione omogenea di primo grado nelle \dot{x}^i , l'equazione variazionale che caratterizza le traiettorie si costruisce immediatamente per eliminazione, diremo così, spontanea della variabile temporale dalla (2); tale equazione, infatti, può mettersi, in tal caso, sotto la forma :

$$(2') \quad \delta S = \delta \int_{\gamma} L(x|dx) = 0$$

dove γ denota il tratto di traiettoria, relativa alla generica soluzione del sistema (3), corrispondente all'intervallo da t_0 a t_1 . Assumendo, lungo γ , come variabile indipendente una delle x , per es. la x^n , l'equazione variazionale (2'), attesa appunto la circostanza che $L(x|dx)$ è funzione omogenea di primo grado nei dx^i , è atta a definire le traiettorie del sistema (3), mediante $n - 1$ equazioni, pur esse lagrangiane, riguardando, per es., x^n come variabile indipendente.

Un altro caso, particolarmente notevole, è offerto da un qualsivoglia problema dinamico reversibile, tale, cioè, che la forza viva T del sistema materiale sia una forma quadratica delle \dot{x}^i :

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^n g_{\varrho\sigma} \dot{x}^\varrho \dot{x}^\sigma,$$

coi coefficienti $g_{\varrho\sigma}$ funzioni delle sole x^i , e le forze sollecitanti inoltre derivino dal potenziale $U = U(x)$. È, in tal caso, $L = T + U$. Denotando con E la costante che interviene nell'integrale delle forze vive $T - U = E$, le traiettorie del sistema sono notoriamente compendiate⁽¹⁾ nell'equazione variazionale:

$$\delta \int_{\gamma} \sqrt{2(U + E) \sum_{\varrho\sigma}^n g_{\varrho\sigma} dx^\varrho dx^\sigma} = 0,$$

il cui integrando risulta funzione omogenea di primo grado nei dx^i .

Più generalmente, vogliamo dimostrare che anche nel caso in cui $L(x|\dot{x})$ sia una qualunque funzione delle \dot{x}^i (purchè non risulti somma di due funzioni omogenee l'una di grado zero e l'altra di grado uno) le traiettorie del sistema lagrangiano (3) si possono sempre caratterizzare con una equazione variazionale del tipo (2'), nella quale interviene, però, sotto il segno integrale, come funzione lagrangiana una $L'(x|dx)$ univocamente determinata pel tramite della sola $L(x|\dot{x})$; tale $L'(x|dx)$ — come dimo-

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA ed U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*, vol. II, parte II, pp. 509-513.

streremo — risulta sempre, qualunque sia $L(x|\dot{x})$, funzione omogenea di primo grado nei $d\dot{x}^i$, sicchè l'equazione variazionale

$$(I) \quad \delta \int_{\gamma} L'(x|dx) = 0$$

rientra nel caso tipicamente contemplato nel calcolo delle variazioni.

Come applicazione del nostro risultato generale, indicheremo la espressione esplicita che assume $L'(x|dx)$ nel caso dinamico irreversibile, quando, cioè, la forza viva T , anzichè una forma quadratica, è, più generalmente, una funzione di secondo grado nelle \dot{x}^i , ossia somma di tre termini T_2 , T_1 , T_0 dei gradi, rispetto alle \dot{x}^i , rispettivamente accennati dall'indice.

Sarà allora agevole stabilire, anche per il caso irreversibile, un teorema di equivalenza che costituisce un'ovvia generalizzazione del noto teorema del Darboux⁽¹⁾.

§ 2. EQUAZIONE VARIAZIONALE DELLE TRAIETTORIE.

Per lo scopo che abbiamo in vista è essenziale ricordare⁽²⁾.

I) Un generico sistema lagrangiano (3), la cui funzione $L(x|\dot{x})$ non contenga esplicitamente t , ammette sempre l'integrale generalizzato della energia:

$$(4) \quad H(x|\dot{x}) = E \quad (\text{E costante})$$

dove:

$$(5) \quad H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \dot{x}^i - L.$$

La (4) costituisce un effettivo integrale primo, purchè H non si riduca ad una costante; ciò implica che non sia identicamente:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \dot{x}^i - L = \text{costante}$$

ossia che L non sia della forma: costante + L_1 , con L_1 funzione omogenea di primo grado nelle \dot{x}^i .

II) Le ∞^{2^n-1} soluzioni del sistema (3), che verificano la (4), con un prefissato valore della costante E (fascio di soluzioni), soddisfano, oltre

(1) Cfr. G. DARBOUX, *Remarque sur la communication précédente*, «Comptes Rendus», to. CVIII, p. 449.

(2) Cfr. T. LEVI-CIVITA ed U. AMALDI, loc. cit., vol. II, parte I, p. 369.

che alla equazione variazionale (2), anche alla

$$\delta \int_0^{t_1} (L + E) dt = 0$$

ritenendosi $\delta E = 0$, nonché δt subordinato al vincolo (4).

Essendo per le (4) e (5):

$$L + E = \sum_{i=0}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \dot{x}^i ,$$

ne consegue che, sotto le stesse ipotesi, il medesimo fascio di soluzioni può ritenersi individuato dall'equazione variazionale:

$$(6) \quad \delta A = 0$$

con

$$(7) \quad A = \int_0^{t_1} \sum_{i=0}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} dx^i .$$

Il che costituisce il principio (generalizzato) dell'azione stazionaria ⁽¹⁾.

Ciò premesso, se, in base alla (4), si elimina dall'espressione (7) dell'azione ogni traccia del tempo, si viene ad attribuire ad essa un aspetto puramente geometrico, atto, in conformità, a caratterizzare le traiettorie del corrispondente fascio di soluzioni.

A tale fine poniamo:

$$(8) \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = p_i(x|\dot{x}) \quad (\rho = 1, 2, \dots, n) .$$

Se il dt , che interviene nelle (8), si intende eliminato mediante la (4), nell'ipotesi che tale operazione sia eseguibile, ad eliminazione compiuta, le p_ρ risultano funzioni delle x^i e dei dx^i , oltre che della costante E:

$$(8') \quad p_\rho = p_\rho^*(x|dx|E) .$$

Si tratta sostanzialmente di dimostrare, che i secondi membri delle (8') risultano sempre *funzioni omogenee di grado zero nei dx^i* .

Tale proprietà caratteristica delle $p_\rho^*(x|dx|E)$ può dimostrarsi, per via puramente formale, introducendo, per es., un parametro ausiliario t' e ponendo:

$$x'^i = \frac{dx^i}{dt'} \quad ; \quad \frac{dt}{dt'} = \lambda(x|x')$$

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Fondamenti di Meccanica relativistica*, pp. 60-63.

con $\lambda(x/x')$ funzione dei $2n$ argomenti x^i ed x'^i , da determinarsi opportunamente.

Da qui risulta:

$$\dot{x}^i = \frac{x'^i}{\lambda}.$$

Se al posto delle \dot{x} , nelle (4) e (8), si sostituiscono le $\frac{x'}{\lambda}$ e si elimina λ dalle (8) mediante la (4), si verifica immediatamente, con la semplice applicazione del teorema di Eulero, che le corrispondenti $p^*(x|x'|E)$ risultano funzioni omogenee di grado zero nelle x'^i e quindi nei dx^i , qualora si moltiplichino tali argomenti per dt' .

Riesce, però, più espressivo pervenire al medesimo risultato per via sintetica.

Se scriviamo materialmente τ in luogo di dt , e ξ^i in luogo di dx^i , la (4) assume l'aspetto:

$$(4') \quad H\left(x \left| \frac{\xi^i}{\tau}\right.\right) = E.$$

Il primo membro contiene esplicitamente τ , purchè soltanto sia

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = -\frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x^i} \dot{x}^i = 0,$$

il che implica, che $H(x|\dot{x})$ non sia funzione omogenea di grado zero nelle x^i . In virtù della (5), tenuto conto che la più generale soluzione di una equazione alle derivate parziali, lineare ma non omogenea, si costruisce aggiungendo ad una soluzione particolare l'integrale generale della corrispondente equazione omogenea, si riconosce agevolmente, che $L(x|\dot{x})$ non dovrà risultare somma di due funzioni omogenee, l'una di grado zero e l'altra di grado uno.

Escluso quindi tale caso, la (4') definisce univocamente la funzione

$$(9) \quad \tau = \tau(x \xi | E);$$

e questa risulta omogenea, di primo grado nelle ξ^i . Infatti, se le ξ^i è τ si moltiplicano per un parametro arbitrario λ , l'equazione (4') rimane soddisfatta: il che manifestamente implica, per la unicità della (9), che τ è omogenea di primo grado nelle ξ^i .

Analogamente, le (8) possono scriversi:

$$(8'') \quad p_\varrho = p_\varrho\left(x \left| \frac{\xi^i}{\tau}\right.\right).$$

Essendo τ funzione omogenea di primo grado nelle ξ^i , a sostituzione eseguita, le $p_\varrho = p_\varrho^*(x|\xi|E)$ risultano manifestamente funzioni omogenee di grado zero nelle ξ^i , ossia nei dx^i .

Ove si ponga:

$$(10) \quad L'(x|dx|E) = \sum_{\varrho} p_\varrho^*(x|dx|E) dx^\varrho$$

risulta L' funzione omogenea di primo grado nei dx^i , e la corrispondente equazione (I) in base alla (6), con riguardo alle (7), (8) ed (8'), è atta a caratterizzare le traiettorie del fascio cui compete il prefissato valore E dell'energia, che, come è noto, sono ∞^{2n-2} ; poichè l'integrale generale dell'equivalente sistema lagrangiano dipende da $2n-2$ costanti arbitrarie.

OSSERVAZIONE I. — Poniamo l'equazione (I) sotto la forma:

$$(I') \quad \delta \int_{t_0}^{t'} L'(x/x') dt' = 0$$

ove t' è un parametro arbitrario.

L'equivalente sistema di n equazioni lagrangiane, nelle quali t' interviene come variabile indipendente, non è, come è noto, normale⁽¹⁾; anzi, essendo L' indipendente esplicitamente da t' , tali equazioni lagrangiane sono legate dalla identità:

$$\sum_b x'^b \left(\frac{\partial L'}{\partial x'^b} - \frac{\partial L'}{\partial x^b} \right) = 0$$

sicchè solo $n-1$, al più, sono fra loro indipendenti.

Si può allora associare ad un tale sistema una ulteriore equazione qualsivoglia nelle n funzioni incognite $x(t')$. È particolarmente notevole il caso in cui si assuma, come equazione addizionale, la $L'(x/x') = C$, con C costante.

Ora, se con $f(L')$ si denota una qualsiasi funzione prefissata del solo argomento L' , il sistema lagrangiano equivalente ad (I'), associato all'equazione $L' = C$, equivale al sistema:

$$\delta \int_{t_0}^{t'} f(L') dt' = 0 \quad \text{con} \quad L' = C.$$

Risultano, in conseguenza, identiche le relazioni, tra le sole x^i , ossia le equazioni delle traiettorie, che si deducono dai due sistemi anzidetti; è, con

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA ed U. AMALDI, loc. cit., vol. II, parte I, p. 300.

cioè, indicato un procedimento generale per caratterizzare le traiettorie del sistema originario (3).

OSSERVAZIONE II. — Poniamo:

$$ds = L'(x \, dx)$$

ed assegniamo alla varietà astratta delle x^i la precedente determinazione metrica.

Lo spazio delle x^i è allora uno spazio del Finsler⁽¹⁾. È allora possibile associare, in generale, alla funzione $L'(x|dx)$, in maniera univoca, con opportune convenzioni di carattere intrinseco, uno spazio di elementi lineari a connessione euclidea. Si può quindi affermare, che il problema della determinazione delle traiettorie dei sistemi a funzione lagrangiana qualsivoglia, purchè, soltanto, indipendente da t , si può ricondurre al problema della determinazione delle geodetiche di un opportuno spazio del Finsler, che, in particolare, può naturalmente ridursi, come nei problemi dinamici reversibili, ad uno spazio del Riemann.

§ 3. CASO DINAMICO IRREVERSIBILE. TEOREMA DI EQUIVALENZA.

Supponiamo che la forza viva T del sistema materiale, sollecitato da forze derivanti dal potenziale $U(x)$, sia della forma: $T = T_2 + T_i + T_o$ con:

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{\sigma}^n g_{\rho\sigma} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma \quad ; \quad T_i = \sum_{\rho}^n g_{\rho\sigma} \dot{x}^\rho$$

ove $g_{\rho\sigma}$ e $g_{\rho\sigma}$ sono funzioni delle sole x^i .

Si ha, pertanto, $L = T + U$. In virtù della (5), l'integrale generalizzato dell'energia (4) assume la forma:

$$\sum_{\rho\sigma}^n g_{\rho\sigma} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma = 2(U + T_o + E)$$

da cui si ottiene:

$$(11) \quad dt = \sqrt{\frac{\sum_{\rho\sigma}^n g_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma}{2(U + T_o + E)}}.$$

A norma della (8), risulta:

$$p_\rho = \sum_{\sigma}^n g_{\rho\sigma} \dot{x}^\sigma + g_{\rho\rho} \quad (\rho = 1, 2, \dots, n)$$

(1) Cfr., per es., E. CARTAN, *Les espaces de Finsler*. (« Actualités Scientifiques »), Paris, Hermann, 1934.

ed eliminando dt mediante la (11), la (10) fornisce:

$$L'(x|dx E) = \sqrt{2(U + T_0 + E) \sum_{\sigma}^n g_{\sigma\sigma} dx^\sigma dx^\sigma} + \sum_{\sigma}^n g_{\sigma 0} dx^\sigma.$$

L'equazione variazionale delle traiettorie assume, in conformità, l'aspetto:

$$(I'') \quad \delta \int_{\gamma} \left\{ \sqrt{2(U + T_0 + E) \sum_{\sigma}^n g_{\sigma\sigma} dx^\sigma dx^\sigma} + \sum_{\sigma}^n g_{\sigma 0} dx^\sigma \right\} = 0.$$

Se $\psi(x)$ designa una qualsiasi funzione delle coordinate, dalla (I'') si deduce immediatamente il teorema:

Il fascio di traiettorie dinamiche, che corrisponde ad un particolare valore di E, si identifica col fascio di traiettorie, con energia totale nulla, di un analogo problema dinamico conservativo caratterizzato dalla forza viva:

$$T^* = \psi(x) T_2 + T_1$$

e dal potenziale:

$$U^* = \frac{I}{\psi(x)} (U + T_0 + E).$$

Ponendo $\psi = U + T_0$ si ha il teorema del Darboux generalizzato:
l'anzidetto fascio di traiettorie dinamiche si identifica col fascio di traiettorie con energia totale $\frac{I}{E}$, del problema dinamico caratterizzato dalla forza viva:

$$T^* = (U + T_0) T_2 + T_1$$

e dal potenziale:

$$U^* = \frac{I}{U + T_0}.$$

Fisica. — *Sull'energia e l'intensità dei gruppi di neutroni emessi dal Po + Be. Nota II⁽¹⁾* di G. BERNARDINI e D. BOCCARELLI, presentata dal Corrisp. L. TIERI.

I. Nella Nota precedente (nel seguito indicata con I) sono stati da noi esposti i risultati ottenuti analizzando, con un sistema di contatori a moltiplicazione in coincidenza, lo spettro dei protoni secondari generati dai neutroni di un preparato di Po + Be.

Noi vogliamo adesso esporre, con qualche particolare, il procedimento di un facile calcolo che è stato fatto per avere qualche elemento che ci guidasse nell'analisi dei risultati medesimi.

Le ipotesi relative a questo calcolo sono le seguenti:

a) Data la notevole analogia esistente fra la curva differenziale di eccitazione dei neutroni in funzione della velocità delle particelle α incidenti, determinata da Chadwick⁽²⁾ con l'amplificatore proporzionale *contando* i protoni secondari, e quella ottenuta da uno di noi⁽³⁾ con l'uso di una camera di ionizzazione a pressione, misurando l'ionizzazione globale prodotta dai protoni secondari medesimi, si è ritenuto abbastanza probabile che l'andamento della curva di eccitazione sia pressochè lo stesso per ogni eventuale gruppo di neutroni liberatosi nella disintegrazione del Be.

Le curve di eccitazione di J. Chadwick e G. Bernardini non sono invero esattamente sovrapponibili, ma le differenze esistenti sembrano appunto potersi giustificare tenendo conto che l'una è una curva di conteggio, e l'altra una curva di ionizzazione. In particolare si può spiegare la lieve differenza esistente nella posizione dei massimi⁽⁴⁾ e la più rapida salita nella curva di G. Bernardini per i valori più elevati dell'energia delle particelle α incidenti.

Inoltre tale ipotesi sembra giustificata secondo le nuove idee sulla costituzione nucleare suggerite da N. Bohr⁽⁵⁾. Secondo queste infatti i due processi, quello della penetrazione della particella nella barriera di potenziale nucleare del Be, e quello dell'espulsione del neutrone, sono da considerarsi come due processi successivi e in un certo modo distinti.

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 agosto 1936.

(2) J. CHADWICK, « Proc. Roy. Soc. » (A), 142, I, 1933.

(3) G. BERNARDINI, « Z. S. f. Phys. », 85, 555, 1993.

(4) Nella curva di G. Bernardini il massimo è meno accentuato e spostato verso le energie più elevate delle particelle α , in ragione della maggiore energia dei protoni emessi.

(5) N. BOHR, « Nature », 137, 344, 1936.

La curva di Chadwick sarebbe quindi da interpretarsi come la curva che dà la probabilità di penetrazione della particella α incidente nella barriera nucleare del Be, l'emissione neutronica essendo invece poi determinata dal processo successivo caratteristico del sistema instabile di 6 protoni e 7 neutroni che si forma conseguentemente.

b) La sezione d'urto σ dei neutroni per i protoni, dalla quale si deduce il numero dei protoni secondari, che dai neutroni stessi vengono proiettati nello strato di paraffina, si è presa proporzionale all'espressione, in funzione all'energia E_0 dei neutroni, data da H. A. Bethe e R. Peierls⁽¹⁾. Tale formula si riferisce alla sezione d'urto totale, ma dato l'intervallo di energia nel quale si trovano i neutroni che ci interessano e la piccola apertura angolare del cono di proiezione, questo modo di procedere ci è sembrato lecito.

D'altra parte è bene dire che la precisa espressione di σ in funzione di E_0 ha un'importanza relativa in questo calcolo, perchè per ottenere da esso una curva che si differenzi in tre tratti pressochè rettilinei secondo l'andamento dei punti sperimentali, è sufficiente ammettere l'esistenza di tre gruppi di protoni secondari, più o meno uniformemente distribuiti, in intensità, su degli intervalli di un'ampiezza di circa 3-4 milioni di volt.

Per convincersi di questo basta considerare le curve calcolate riportate nelle note preliminari prima citate, nelle quali in modo più semplicista una volta si è supposto σ indipendente da E_0 , e l'altra σ inversamente proporzionale alla velocità dei neutroni, ossia proporzionale alla lunghezza d'onda di De Broglie a loro corrispondente. Sarà forse opportuno specificare che i vari intervalli energetici da 2 a 4 m.e.V. sui quali vengono necessariamente a distribuirsi i gruppi dei protoni secondari, corrispondono all'intervallo energetico nel quale le particelle α sono capaci di provocare la disintegrazione.

I neutroni infatti che si producono in questa disintegrazione hanno l'energia della particella α incidente aumentata dall'energia (tenuto conto del suo segno) dovuto alla tonalità della reazione, tonalità che dipende dallo stato di eccitazione nel quale la reazione medesima lascia il nucleo $^{12}_6C$.

Il calcolo è stato eseguito nel modo seguente. Ogni gruppo di neutroni ha, per le ipotesi fatte, una distribuzione d'intensità in funzione dell'energia che è quella data dalla curva di Chadwick. L'effetto dello spessore finito di paraffina (equivalente a 150 cm. d'aria) è facilmente valutato. In questo strato l'assorbimento dei neutroni è trascurabile, dato che il loro cammino medio libero nella paraffina è, per queste energie, di qualche centimetro. Per i protoni invece occorre tener conto delle perdite di energia che essi subiscono nell'attraversare lo strato medesimo, e questo è stato fatto valu-

(1) H. A. BETHE a. R. PEIERLS, « Proc. Roy. Soc. », 149, 176, 1935, formula (11).

tando dette perdite con i dati forniti da Duncanson estrapolando quelli di Blackett⁽¹⁾.

Ammettendo, data la piccola apertura angolare del cono di proiezione di protoni, che, nell'urto, tutta l'energia dei neutroni venga ceduta ai protoni, allora ai dN neutroni monocromatici compresi in un intervallo elementare di energia fra E e $E + dE$ viene a corrispondere un numero dN' di protoni proporzionale a $\sigma \cdot dN$ e uniformemente distribuito su un intervallo energetico fra E e $E - \Delta E$ dove ΔE è l'energia massima che viene a perdere un protone secondario quando, generato all'inizio dello strato di paraffina, lo deve attraversare tutto prima di uscire dal medesimo.

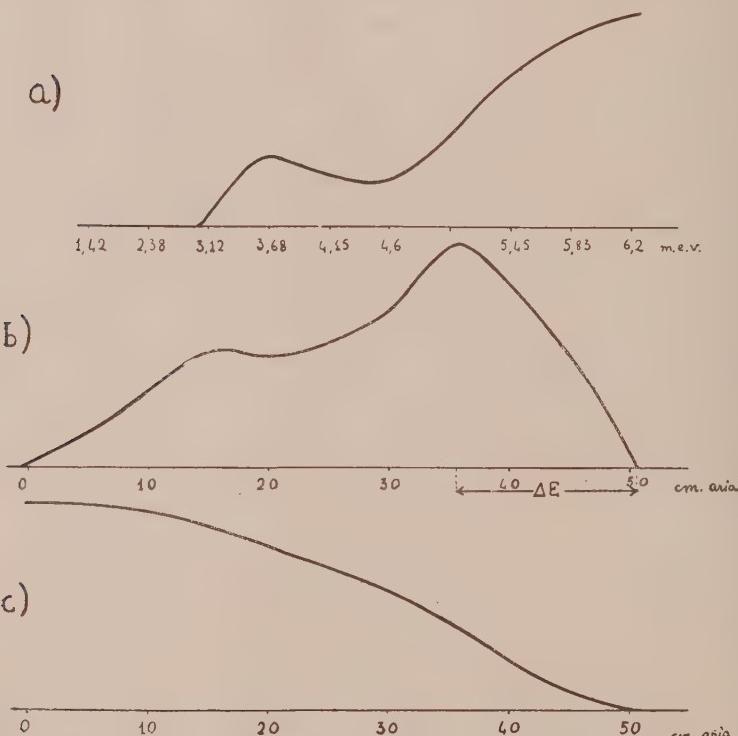


Fig. 1.

Un'integrazione grafica permette allora di dedurre, da ogni gruppo di neutroni, il corrispondente gruppo di protoni. L'azione di assorbimento degli schermi si calcola poi facilmente, con una successiva integrazione. La fig. 1 indica, come esempio, le varie fasi del calcolo relativo a un gruppo di neutroni avente un'energia massima di 6,2 m.e.v.

(1) « Proc. Camb. Phil. Soc. », 30, 102, 1934.

In *a*) è rappresentato il gruppo di neutroni in funzione dell'energia di questi espressa in m. e. v.; in *b*) il corrispondente gruppo di protoni in funzione della penetrazione in cm. d'aria; in *c*) la curva finale di assorbimento, cioè quella determinabile per via sperimentale. I punti sulle ascisse, di figure diverse, situati su una stessa verticale si corrispondono.

Il risultato finale del calcolo è dato nella fig. 3 della Nota I, dove sono riportati i punti sperimentali, ottenuti nelle due serie di misure. La linea, in tratto continuo, che si adatta così bene ai punti sperimentali, è la curva che si ottiene dalla sovrapposizione di tre gruppi di protoni, calcolati col procedimento ora detto, e aventi rispettivamente come massimo di penetrazione 25, 51, e 77 cm. d'aria.

I rapporti di intensità fra i vari gruppi, che permettono di ottenere, per sovrapposizione, la curva ora detta, sono stati valutati facendo una media dei coefficienti di proporzionalità (relativi alle tre curve parziali di assorbimento) che si ottengono raggruppando in vario modo, a tre a tre, i punti sperimentali, e risolvendo poi i sistemi lineari che così si possono facilmente scrivere.

A destra della figura l'ultima parte della curva e i relativi punti sono riportati su una scala più grande.

L'accordo non potrebbe essere migliore, e poichè se si assumono per i valori massimi delle energie dei valori diversi da quelli sopra indicati di qualche centinaio di migliaia di e. v. l'accordo fra i punti sperimentali e la curva calcolata non è più così buono, sembra molto probabile che effettivamente lo spettro energetico dei neutroni del Po + Be sia molto simile a quello che la curva calcolata suggerisce.

2. Come abbiamo indicato nella Nota I, tale spettro è stato anche precedentemente investigato da altri autori, ed è confortante vedere che i dati di questi generalmente si accordano con quelli da noi ottenuti con questo metodo diverso da quelli usati in precedenza. È in particolare soddisfacente l'accordo per quanto riguarda i gruppi di protoni aventi un'energia massima intorno ai 4 e agli 8 m. e. v. Per rendersi conto di ciò basta osservare la tabella seguente dove sono indicati i valori, per questi due gruppi, suggeriti dagli autori il cui nome è nella prima colonna, e confrontarli con quelli trovati da noi.

| | | |
|---|---------------|--------------|
| J. Chadwick ⁽¹⁾ | 4,1 | < 8 |
| I. Curie e F. Joliot ⁽²⁾ | < 4,5 | 7,8 |
| N. Feather ⁽³⁾ | < 4,5 | |
| L. Winand ⁽⁴⁾ | { 4,05 4,5 | { 7,5 8,4 |

(1) Loc. cit.

(2) «Journ. d. Phys.», 4, 21, 1933.

(3) «Proc. Roy. Soc.», 142, 689, 1933.

(4) «Journ. d. Phys.», 5, 597, 1934.

Non altrettanto possiamo dire del gruppo la cui energia massima sembra essere di circa 6 m. e. v. Effettivamente solo I. Curie e F. Joliot ammettono come possibile l'esistenza di un gruppo intermedio avente una penetrazione di circa 50 cm. d'aria, e Feather accenna⁽¹⁾ ad un limite superiore per l'energia dei neutroni di 6,4 m. e. v. È invece notevole il fatto che Dunning⁽²⁾ abbia trovato un gruppo che sembra coincidere con questo, ma poichè le esperienze di questo autore non sono direttamente confrontabili con le nostre, avendo egli usato un preparato di emanazione di Ra + Be, delle medesime ripareremo in seguito.

Pertanto a noi l'esistenza di questo gruppo intermedio sembra cosa certa, perchè altrimenti, come abbiamo già detto, difficilmente si possono conciliare i punti sperimentali con quella che dovrebbe essere la curva di assorbimento dei protoni secondari. Se infatti si tenta di calcolare la curva che dovrebbe attendersi nel caso di due soli gruppi di neutroni, anche cercando di far questo per due valori massimi delle energie che, discostandosi notevolmente da quelli anzidetti, permettano il migliore adattamento possibile ai punti sperimentali, si vede che nella parte centrale la curva calcolata si allontana sempre decisamente dai punti sperimentali medesimi.

L'argomentazione ha poi naturalmente maggior vigore quando si voglia pensare, secondo un'ipotesi che sarà discussa in una Nota successiva, che il gruppo di 7,8 m. e. v. sia un gruppo di risonanza, poichè in questo caso il gruppo non potrebbe avere, per quanto riguarda i neutroni, una larghezza superiore a 1,5 m. e. v. e quindi, per i protoni secondari, non potrebbe distendersi su un intervallo superiore ai 2,5 m. e. v.

Se poi si vuole obiettare che tutto quel che precede è subordinato al fatto che il calcolo è stato condotto con certe particolari ipotesi, si può subito osservare che di queste, la seconda, relativa alla sezione d'urto dei neutroni con protoni, non è essenziale ai fini del calcolo medesimo. Infatti, come abbiamo già rilevato in precedenza, altre curve calcolate con ipotesi diverse si accordano sempre soddisfacentemente ai punti sperimentali.

D'altra parte per quanto riguarda la prima ipotesi, se, indipendentemente da ogni altra considerazione, si prende la curva che a noi sembra meglio adattarsi ai punti sperimentali, si ottiene una banda di protoni corrispondente che ha presso a poco l'andamento indicato dalla curva della fig. 2, andamento che rivela, a nostro avviso, abbastanza distintamente due gruppi di protoni aventi giusto delle energie massime fra i 7,8 e gli 8 m. e. v. e fra i 6,2 e i 6,5 m. e. v.

La posizione del massimo di ogni gruppo, che dista dall'inizio del medesimo nel primo di $\sim 0,9$ m. e. v. e nel secondo di $\sim 1,2$ m. e. v., conferma questi dati, perchè sono giusto queste le perdite di energia che subiscono

(1) Loc. cit., p. 707.

(2) «Phys. Rev.», 45, 586, 1934.

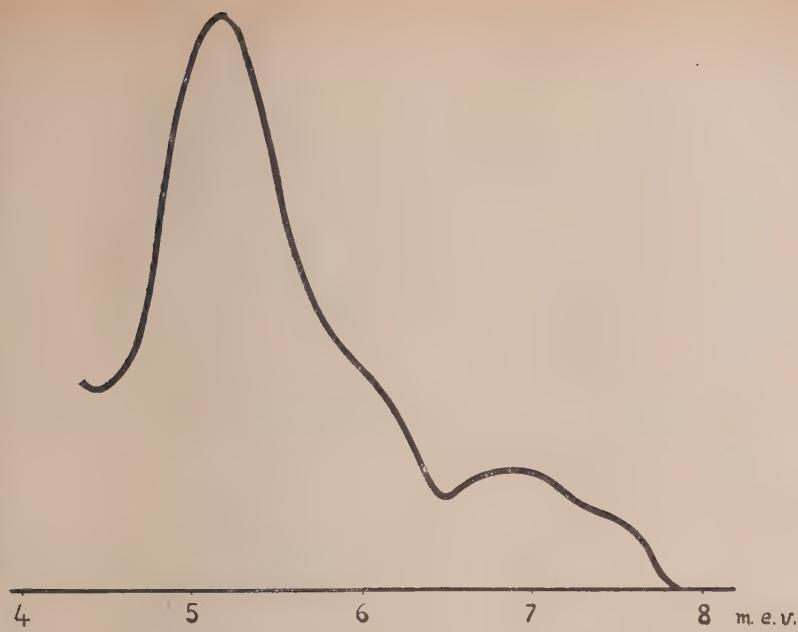


Fig. 2.

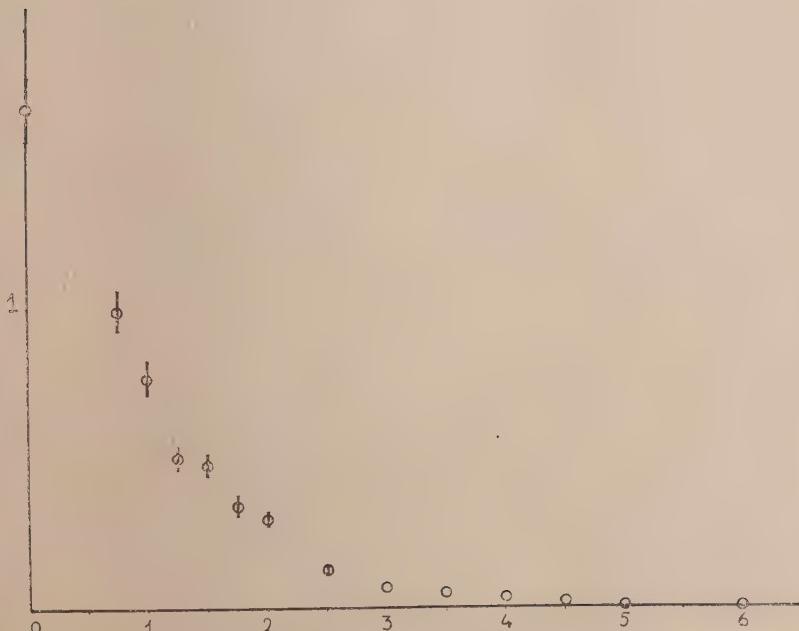


Fig. 3.

dei protoni di 7,8 e di 6,2 m. e. v. in 150 cm. d'aria, equivalenti allo spessore massimo della paraffina.

Concludendo noi pensiamo che sia lecito affermare che nello spettro dei neutroni del Po + Be, fra i 2 e gli 8 m. e. v. si distinguono tre gruppi di neutroni aventi rispettivamente delle energie massime di:

$$4,2 \pm 0,1 ; \quad 6,3 \pm 0,1 ; \quad 7,8 \pm 0,2 \text{ m. e. v.}$$

Gli scarti ora scritti sono naturalmente da ritenersi solo come una valutazione dei medesimi, ma l'insieme delle considerazioni ora svolte, il confronto con i dati forniti da altri ricercatori, e i vari calcoli eseguiti di cui anche nelle nostre precedenti pubblicazioni⁽¹⁾, ci fanno credere che essi non siano molto lontani dal vero.

Per quanto riguarda le intensità relative dei vari gruppi, se si accetta come una approssimazione sufficiente quella della formula per la sezione di urto di Bethe e Peierls⁽²⁾, dal calcolo si troverebbe che queste stanno tra loro come i numeri 1; 3,5; 10.

Noi ritorneremo in seguito su questa valutazione; per il momento vogliamo solo eliminare il sospetto che l'andamento della curva sperimentale, quantitativamente considerato, sia molto diverso da quello che si otterrebbe qualora tutti i protoni secondari che attraversano i due contatori venissero registrati.

La tabella seguente, e la fig. 3, che ne dà la corrispondente rappresentazione grafica, relative ai risultati di una serie di misure fatte sorvoltando i contatori a moltiplicazione di circa 200 volt sopra la loro normale tensione di esercizio, lo dimostrano sufficientemente.

| Spessore dello schermo di Al in mm. $\times 10^{-1}$ | 0 | 0,75 | 1 | 1,25 | 1,5 | 1,75 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 | 6 |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|------|------|
| Coincid. reg. al min. | 1,67 | 0,99 | 0,77 | 0,50 | 0,48 | 0,35 | 0,3 | 0,13 | 0,07 | 0,05 | 0,03 | 0,025 | 0,01 | 0,07 |
| Errore medio . . . | 0,12 | 0,07 | 0,06 | 0,04 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | — | — | — | — |

In tali condizioni infatti, i contatori funzionavano solo circa 50 volt al di sotto della tensione alla quale divenivano sensibili anche agli elettroni e quindi dovevano effettivamente essere sensibili a quasi tutti i protoni.

Ebbene, come la fig. 3 indica, i punti sperimentali non suggeriscono una curva molto diversa da quelle prima considerate.

Infine noi vogliamo esprimere la nostra gratitudine alla Società Elettrica del Valdarno che ha voluto aiutare finanziariamente il nostro Istituto, e al direttore di questo, prof. L. Tieri, per il suo costante benevolo interessamento a questa ricerca.

(1) «Ric. Sc.», ser. II, VII, 1, 128; «Ibid.», ser. II, VII, 2. 89.

(2) Loc. cit.

Chimica-Fisica. — *Sulle cause dello sviluppo di ossigeno dagli accumulatori a piombo in riposo⁽¹⁾.* Nota⁽²⁾ di G. TEDESCHI, presentata dal Corrisp. O. SCARPA.

1. Dagli accumulatori a piombo, anche in periodo di riposo, si sviluppano gas costituiti in massima parte da idrogeno e da piccole quantità di ossigeno. Sede dello sviluppo di quest'ultimo sono le placche positive, come hanno messo in evidenza le vecchie esperienze di G. H. Robertson⁽³⁾ e quelle recenti di O. Scarpa⁽⁴⁾ e di K. Arndt⁽⁵⁾.

Per spiegare questo fenomeno sono state fatte parecchie ipotesi. In generale si ammise che l'ossigeno sviluppato fosse dovuto alla decomposizione delle sostanze perossidate che si formano durante l'elettrolisi poichè si riteneva che l'acido solforico degli accumulatori non avesse alcuna azione sul biossido di piombo delle positive⁽⁶⁾.

Darrieus⁽⁷⁾ attribuì lo sviluppo di ossigeno alla decomposizione progressiva dell'acido persolforico presente, in maggiore o minore quantità, nell'elettrolita degli accumulatori. G. H. Robertson notò che l'acido persolforico dà origine ad acqua ossigenata (che può sussistere a lungo dopo la scomparsa dell'acido persolforico) in quantità variabile a seconda della densità della soluzione e che questa, in presenza di H_2SO_4 , reagisce col biossido di piombo con sviluppo di O_2 e formazione di $Pb SO_4$. Elbs e Schönherr⁽⁸⁾ dimostrarono che l'acido persolforico agisce direttamente su $Pb O_2$ trasformandolo in solfato e sviluppando ossigeno.

Più recentemente lo sviluppo di ossigeno dagli accumulatori in riposo, dopo la carica, è stato attribuito alla progressiva decomposizione di ipotetici perossidi di piombo formati per effetto dell'elettrolisi durante la sovraccarica⁽⁹⁾.

Per consiglio del prof. O. Scarpa ho esaminato più intimamente le cause del fenomeno.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrochimica e Chimica fisica del R. Istituto superiore d'Ingegneria di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 10 agosto 1936.

(3) Vedi L. JUMAU, *Les accumulateurs électriques*, p. 333, Paris, 1907.

(4) Queste esperienze furono eseguite nel 1932 ma per varie ragioni furono pubblicate soltanto nel 1936. Vedi O. SCARPA, «L'Energia Elettrica», XIII, 339, 1936.

(5) K. ARNDT, «ETZ», 122, 1935.

(6) L. JUMAU, op. cit., p. 332.

(7) Vedi L. JUMAU, op. cit., pp. 50 e 333.

(8) K. ELBS e O. SCHÖNHERR, «ZS. f. Elektrochem.», 473, 1895.

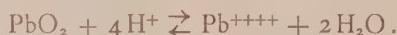
(9) O. SCARPA, loc. cit.

Prove di lunga durata⁽¹⁾ hanno mostrato che, se la temperatura si mantiene costante, la quantità di ossigeno che si sviluppa resta pressoché costante per parecchie settimane. Questo fatto ha indotto a pensare che lo sviluppo di ossigeno non può essere causato da composti presenti nell'elettrolita degli accumulatori in piccola quantità, ma da sostanze presenti in grande eccesso, rispetto all'ossigeno prodotto, in modo da mantenere praticamente invariata nel corso della reazione la loro concentrazione e da fornire così uno sviluppo gassoso costante. E siccome alla placca positiva è presenza in grande quantità soltanto di biossido di piombo e di acido solforico, ad essi direttamente deve attribuirsi la produzione di ossigeno.

2. È cosa certa⁽²⁾ che l'elettrolita a contatto col biossido di piombo ne contiene disiolto una quantità (piccolissima) determinata dalle condizioni di equilibrio⁽³⁾.

Nella soluzione vi è quindi presenza di ioni Pb^{++++} , PbO_2^{--} ⁽⁴⁾ oltre a ioni Pb^{++} che possono provenire da un po' di solfato di piombo presente oppure dalla riduzione di ioni Pb^{++++} .

Se l'attività dell'acido solforico non varia, l'attività degli ioni Pb^{++++} risulterà determinata, essendo questi in equilibrio con il biossido di piombo presente, secondo lo schema:



Anche l'attività degli ioni Pb^{++} sarà determinata se il solfato di piombo avrà raggiunto il prodotto di solubilità (cosa che in pratica tende a verificarsi sempre, data la sua piccola sulibilità).

Perciò si possono scrivere le seguenti espressioni:

$$(1) \quad a_{Pb^{++++}} = K' a_H^4 \quad \text{e} \quad a_{Pb^{++}} = \frac{K''}{a_{SO_4^-}}.$$

Fra il biossido di piombo e l'elettrolita aderente si stabilirà una differenza di potenziale che può essere espressa dalla seguente relazione⁽⁵⁾:

$$(2) \quad E = -\frac{RT}{2F} \log \frac{a_{Pb^{++}}}{a_{Pb^{++++}}} + E_0.$$

(1) O. SCARPA, loc. cit.

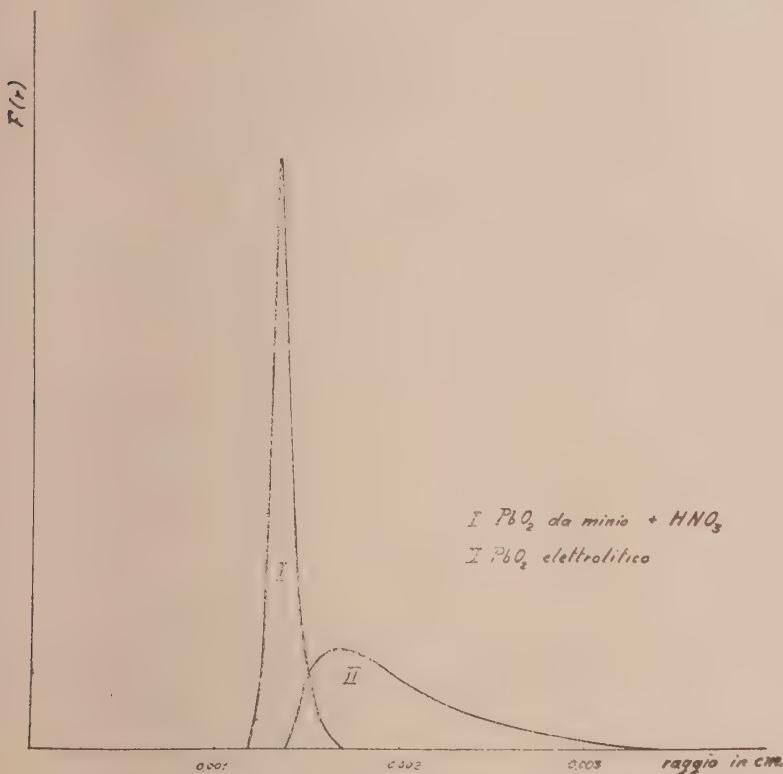
(2) F. DOLEZALEK e K. FINCKH, « ZS. f. Anorg. Chem. », 51, 320, 1906.

(3) Considero qui raggiunte le condizioni di equilibrio a una determinata temperatura e pressione.

(4) DENINA e FRATES (« Notiziario Chimico Industriale », n. 4, 1928) hanno messo in evidenza che i vari ioni che possono essere presenti nella soluzione a contatto col PbO_2 sono necessariamente in equilibrio fra loro, per cui le teorie di Le Blanc e di Liebenow si possono ridurre ad una unica teoria.

(5) E. DENINA e A. FRATES, loc. cit.

Il potenziale dell'elettrodo a biossido di piombo si presenta perciò sotto la forma di un potenziale di ossiriduzione. Il PbO_2 , una volta raggiunto l'equilibrio, si comporta come un elettrodo indifferente immerso in una soluzione di acido solforico satura contemporaneamente di ioni Pb^{++} e Pb^{++++} , e il suo potenziale si identifica quindi con quello di ossiriduzione del sistema Pb^{++}/Pb^{++++} presente nella soluzione a contatto col biossido.



È possibile quindi, tenendo conto del pH della soluzione calcolare l' rH_2 del sistema in base alla nota espressione⁽¹⁾

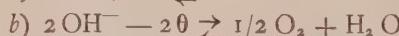
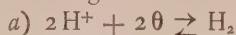
$$(3) \quad rH_2 = \frac{E}{RT} + 2\text{pH} - \frac{2F}{2F}$$

dove E è il potenziale di ossiriduzione.

Ora è noto che un sistema in soluzione acquosa, il quale, in condizioni normali di temperatura e pressione, abbia un rH_2 maggiore di 41 circa, tende spontaneamente a svolgere ossigeno gassoso.

(1) Vedi ad es. R. WURMSEY, *Oxidations et réductions*, p. 211, Paris, 1930.

Infatti tutte le reazioni di ossidazione e rispettivamente di riduzione possono immaginarsi ridotte allo schema:



dove gli elettroni θ sono quelli ceduti dalla sostanza che si ossida o assunti da quella che si riduce⁽¹⁾. In un sistema ossiriducente le reazioni suddette tendono ad un equilibrio per cui si ha

$$(4) \quad K_1 = \frac{[H_2]}{[H^+]^2 [\theta]^2}$$

e

$$(5) \quad K_2 = \frac{[\frac{1}{2}O_2]^{\frac{1}{2}} [\theta]^2}{[OH^-]^2}$$

Sapendo che $[H^+] \cdot [OH^-] = K_w$ e ponendo le concentrazioni dell'ossigeno e dell'idrogeno molecolare proporzionali alle loro pressioni parziali (P_{O_2} e P_{H_2}) in una eventuale atmosfera sovrastante la soluzione e in equilibrio con essa, si ha combinando la (4) con la (5):

$$(6) \quad P_{H_2} \sqrt{P_{O_2}} = \text{cost.}$$

Il valore della costante può facilmente dedursi ed è uguale, a 25°, a $10^{-41,62}$, e, dato che $rH_2 = \log \frac{I}{P_{H_2}}$, si ha

$$(7) \quad P_{O_2} = 10^{2(rH_2 - 41,62)}.$$

Dalla (7) si vede che da una soluzione sottoposta alla pressione di una atmosfera si può liberare ossigeno solo se l' rH_2 supera il valore di circa 41. Come si vedrà più avanti, la soluzione solforica a contatto col biossido di piombo soddisfa a questa condizione per cui essa costituisce un sistema instabile che tende spontaneamente a ridursi svolgendo ossigeno.

È da osservare inoltre che in conseguenza di ciò, solo la soluzione presente nelle immediate vicinanze del PbO_2 potrà assumere condizioni vicine a quelle dell'equilibrio.

3. Il potenziale dell'elettrodo a biossido di piombo in acido solforico è stato determinato da vari Autori e recentemente W. J. Hamer⁽²⁾ ha eseguito determinazioni molto esatte usando la pila:

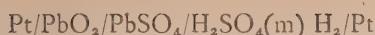
(1) Nel caso del sistema qui studiato si ha:



e



(2) W. J. HAMER, «J. Am. Chem. Soc.», LVII, 9, 1935.



la cui f. e. m. può essere espressa dalla seguente relazione:

$$(8) \quad E' = -\frac{RT}{2F} \log \frac{a_{\text{Pb}^{++}}}{a_{\text{Pb}^{+++}}} + E_0 - \frac{RT}{F} \log a_{\text{H}^+}.$$

Tenendo conto della (2) e della (3), la (8) diventa:

$$(9) \quad E' = E + \frac{RT}{F} pH = \frac{RT}{2F} rH_2.$$

Si può quindi ricavare il valore dell' rH_2 direttamente dalle misure della f. e. m. della pila costituita dall'elettrodo a PbO_2 contrapposto all'elettrodo a idrogeno (1).

La seguente tabella riporta i dati desunti dalle misure di Hamer e il corrispondente valore dell' rH_2 .

| m | E' a 25° in volt | rH_2 a 25° |
|-------|---------------------------|---------------------|
| 0.001 | 1.4292 | 48.36 |
| 0.005 | 1.4813 | 50.12 |
| 0.01 | 1.5018 | 50.82 |
| 0.05 | 1.5457 | 52.30 |
| 0.1 | 1.5630 | 52.89 |
| 0.5 | 1.6044 | 54.29 |
| 1 | 1.6250 | 54.99 |
| 1.5 | 1.6405 | 55.51 |
| 2 | 1.6515 | 55.88 |
| 3 | 1.6738 | 56.64 |
| 4 | 1.6945 | 57.34 |
| 5 | 1.7143 | 58.01 |
| 6 | 1.7328 | 58.63 |
| 7 | 1.7501 | 59.22 |

Dove m rappresenta la molarità dell'acido solforico cioè il numero di grammi-molecole sciolte in 1000 gr. di acqua.

(1) È stato riscontrato da vari Autori (E. DENINA e A. FRATES, loc. cit.; W. C. VOSBURG e D. N. CRAIG, « J. Am. Chem. Soc. », LI, 2009 (1929); W. J. HAMER, loc. cit.) che il potenziale dell'elettrodo a PbO_2 , preparato con le dovute precauzioni, non varia sensibilmente qualsiasi sia il modo con cui il biossido è stato ottenuto.

Risulta così determinato che l' rH_2 del sistema studiato è nettamente superiore al valore di 41,62; per cui deve necessariamente svilupparsi ossigeno gassoso.

Infatti ho verificato sperimentalmente che alcuni grammi di biossido di piombo immersi in acido solforico della densità di 1,235 a 15° ($m = 4,72$) sviluppano lentamente ossigeno, che raccoglievo in campane di vetro graduate.

Due prove eseguite una con 5 gr. di biossido ottenuto per via elettrolitica da nitrato di piombo, e l'altra con 5 gr. di biossido ottenuto da minio con acido nitrico hanno sviluppato, in 9 giorni, alla temperatura di circa 24°, rispettivamente cc. 3,5 e cc. 11.

Il PbO_2 elettrolitico che potrebbe contenere eventualmente dei perossidi sviluppa invece meno ossigeno di quello ottenuto per via chimica. Questo, peraltro, potrebbe essere attribuito, con le dovute riserve, al fatto che il biossido elettrolitico presentava una struttura più compatta ed era meno finemente suddiviso. Infatti dalla figura, in cui sono riportate le curve che rappresentano la distribuzione granulometrica delle due specie di biossido di piombo, determinata con un apparecchio ideato dal prof. Scarpa e fondato sul metodo indicato da Adaubert e Rabaté⁽¹⁾, risulta che il raggio medio delle particelle del PbO_2 ottenuto dal minio è di circa cm. 0,00135, mentre il PbO_2 elettrolitico è costituito da particelle di dimensioni meno uniformi il cui raggio è compreso fra i 0,003 cm. e i 0,0014 cm. circa⁽²⁾.

Da quanto ho esposto si può quindi concludere:

1° che lo sviluppo di ossigeno dagli accumulatori a piombo in riposo (fatto eccezione del periodo che segue immediatamente la fine della carica, in cui la decomposizione dei composti perossidati può avere un effetto sensibile) è dovuto alla reazione complessiva $PbO_2 + H_2SO_4 = PbSO_4 + H_2O + 1/2 O_2$ fra il biossido di piombo e l'acido solforico; infatti l' rH_2 dell'elettrolita a contatto con il PbO_2 supera notevolmente il valore corrispondente all'equilibrio per cui deve spontaneamente liberarsi ossigeno;

2° che a parità di altre condizioni la velocità dello sviluppo di ossigeno dipende dallo stato di suddivisione del PbO_2 .

Porgo i miei più vivi ringraziamenti al chiar.mo prof. O. Scarpa per il suo appoggio e il suo incoraggiamento in questo studio.

(1) R. AUDUBERT e H. RABATÉ, « C. R. », 186, 1663, 1925.

(2) Ho eseguito anche prove con PbO_2 ottenuto da minio e acido solforico ed ho notato anche in questo caso sviluppo di ossigeno.

Peraltro in prove eseguite con campioni di biossido ottenuto in volte diverse la velocità di sviluppo differiva notevolmente. Per chiarire questo punto e indagare in genere sulla cinetica di questa reazione sono in corso altre esperienze.

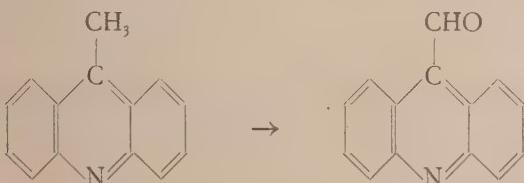
Chimica. — *Sull'azione ossidante del biossido di selenio⁽¹⁾.*
Nota II⁽²⁾ di LYDIA MONTI, presentata dal Corrisp. G. BARGELLINI.

In una Nota precedente pubblicata in questi « Rendiconti »⁽³⁾ ho mostrato come l'azione ossidante del biossido di selenio possa esercitarsi sui composti organici azotati, a nucleo eterociclico, contenenti nella loro molecola il gruppo $\text{—N}=\text{C—CH}_3$, in modo da trasformarlo nel gruppo $\text{—N}=\text{C—CHO}$. Le esperienze descritte erano state eseguite con l' α -chinaldina che, nelle condizioni allora indicate, facilmente si trasforma nella α -chinolin-aldeide.

Queste mie ricerche ebbero una immediata conferma dalle esperienze pubblicate qualche mese più tardi da Henze⁽⁴⁾ il quale studiò l'azione del biossido di selenio sugli omologhi della piridina e della chinolina aventi gruppi —CH_3 o $\text{—C}_2\text{H}_5$ in posizione α . o β all'atomo di N dell'anello eterociclico. L'A. citato constatò che di solito l'ossidazione di questi gruppi alchilici non si arresta allo stadio intermedio aldeidico o chetonico, ma si ha l'ossidazione completa e si ottengono gli acidi α o β carbossilici corrispondenti. Soltanto nel caso della α -picolina e della α -chinaldina egli ha potuto isolare rispettivamente l' α -piridin-aldeide e l' α -chinolin-aldeide, confermando quanto io avevo già osservato.

Nell'intento di estendere queste ricerche sui composti eterociclici azotati, ho pensato di fare agire il biossido di selenio anche sulla 9-metil-acridina nella quale gli atomi di idrogeno del gruppo —CH_3 , in posizione para all'N reagiscono generalmente con molta facilità, come è dimostrato per es. dalle reazioni di condensazione che la 9-metil-acridina dà con le aldeidi, comportandosi in modo del tutto analogo alle α -picoline e alle α -chinaldine.

Trattando la 9-metil-acridina col biossido di selenio nelle condizioni più avanti descritte ho potuto infatti ottenere la 9-acridin-aldeide.



(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 10 agosto 1936.

(3) «Rendiconti R. Acc. Lincei», vol. XVIII, ser. 6^a, 505 (1933).

(4) M. HENZE, «Ber.», 67, 750 (1934).

Ho così l'opportunità di indicare per questa sostanza un nuovo metodo di preparazione assai più semplice di quelli fino ad ora conosciuti, e mi propongo di metterlo a profitto per ottenere nuovi composti acridinici meso-sostituiti usando appunto la 9-acridin-aldeide come prodotto di partenza.

PARTE Sperimentale.

A gr. 2 di 9-metil-acridina⁽¹⁾ disciolti in cc. 50 di acido acetico glaciale si aggiungono gr. 1.2 di biossido di selenio finemente polverizzato e si riscalda moderatamente a fiamma diretta o su bagno di sabbia per 2-3 ore.

Dopo raffreddamento si filtra per separare il selenio che si è depositato. Il filtrato si diluisce con acqua e si neutralizza con carbonato sodico; si deposita così il prodotto grezzo della reazione che si presenta come una polvere giallo-bruna che fonde a 128-130°. Fatta cristallizzare prima da alcool e infine da etere di petrolio si ottiene sotto forma di cristallini gialli fusibili a 146-147° d'accordo con quanto è riportato nella letteratura⁽²⁾.

Questo composto che riduce a caldo la soluzione ammoniacale-alcalina di nitrato di argento, in tutti i suoi caratteri è identico alla 9-acridin-aldeide descritta per la prima volta da Bernthsen e Muhlert⁽³⁾.

Facendola reagire con l'anilina ho ottenuto lo stesso composto fusibile a 163° già ottenuto da Kaufmann e Vallette⁽⁴⁾.

Trattando alla temperatura del bagno-maria la sua soluzione acquosico-alcoolica con una soluzione di cloridrato di semicarbazide in presenza di acetato sodico, si separa un *semicarbazone* di color giallo-ocra che cristallizzato da acido acetico diluito fonde a 234-236°.

Su questo semi-carbazone seccato in stufa a 100° fino a peso costante è stato determinato l'azoto

| | | |
|---|---------------|--------|
| trovato | N % | 20.95 |
| per C ₁₅ H ₁₂ ON ₄ | calcolato N % | 21.21. |

(1) La 9-metil-acridina necessaria per queste esperienze è stata preparata da difenilammina e da acido acetico seguendo il procedimento di BERNTHSEN (« Ann. », 224, 34 (1884)).

(2) PORAI-KOSCHITZ, AUSCHKAP, AMSLER, « Journ. Russ. Phys. Chem. Ges. », 43, 524; KAUFMANN e VALLETTE, « Ber. », 45, 1740 (1912); MARSTON, TAYLOR, BOGERT, HIRSCHFELDER e LAUFFER, « Coll. Trav. Chim. Tchécoslovaquie », II, 394 (1930).

(3) BERNTHSEN e MUHLERT, « Ber. », 20, 1547 (1887).

(4) Loc. cit.

Chimica. — *Ricerche sul processo di stabilizzazione della nitrocellulosa⁽¹⁾.* Nota⁽²⁾ di G. CENTOLA, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

È noto che le polveri senza fumo a base di nitroglicerina e di nitrocellulosa ed in generale tutti gli esplosivi costituiti da esteri dell'acido nitrico vanno soggetti a fenomeni di decomposizione spontanea, i quali, anche quando non portano alle conseguenze disastrose dell'autoaccensione, cagionano sempre danni notevoli per il peggioramento che subiscono le proprietà della polvere.

In questi esplosivi la decomposizione può iniziarsi con l'idrolisi dei gruppi nitrici per opera di tracce di acidità, eventualmente rimaste nell'esplosivo, che reagiscono su l'estere nitrico saponificandolo e mettendo in libertà acido nitrico (e vapori nitrosi) e sostanza organica. L'acido nitrico, che a questo modo si viene accumulando nella polvere, fa aumentare la velocità di decomposizione, la quale assume l'andamento di una reazione autocatalitica.

Se gli esteri nitrici esplosivi sono chimicamente puri non subiscono nessuna alterazione e possono essere conservati a temperatura ambiente per tempo indefinito. Ciò dimostra che sono le eventuali impurezze a fornire l'acidità necessaria ad iniziare la decomposizione.

Sotto questo punto di vista, i saggi di stabilità, che normalmente si eseguono, possono considerarsi come saggi indiretti della purezza delle polveri.

Le impurezze dannose prendono origine nel processo di nitrazione: esse sono rappresentate da tracce di acido solforico rimaste assorbite nella fibra oppure combinate con la cellulosa o con le sostanze estranee eventualmente presenti.

Difatti se si nitra la cellulosa con miscele di acido nitrico – acido fosforico – anidride fosforica⁽³⁾, oppure di acido nitrico – acido acetico – anidride acetica⁽⁴⁾ si ottengono nitrocellulose che, dopo una semplice ebollizione con acqua, risultano completamente stabili.

Già dal 1901 Cross e Bevan⁽⁵⁾ avevano avanzato l'ipotesi della formazione di esteri misti solfo-nitrici e solfo-acetici rispettivamente nella nitrazione e nella acetilazione della cellulosa in presenza di acido solforico; e

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 12 agosto 1936.

(3) BERL. E RUEFF, «Ber.», 63, 3212, 1930.

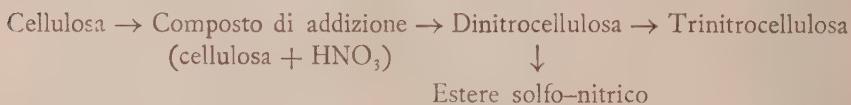
(4) TROGUS, «Ber.», 64, 405, 1931.

(5) «Ber.», 34, 2496, 1901; «Ber.», 38, 1859, 3531, 1905.

più tardi Hake, Lewis, Berl, Robertson⁽¹⁾ hanno messo in relazione la instabilità delle fibre nitrate con la presenza in esse di acido solforico.

Il processo di stabilizzazione tende ad eliminare dalle fibre le impurezze dannose contenutevi, e lo studio di esso è stato recentemente approfondito da Hess e collaboratori, i quali hanno confermato la grande importanza delle impurezze solforiche nei riguardi della stabilità⁽²⁾, ed hanno anche messo in evidenza che il processo di stabilizzazione è accompagnato dalla ricristallizzazione del prodotto⁽³⁾ e dall'estrazione di una sostanza contenente contemporaneamente azoto e zolfo⁽⁴⁾.

Secondo i suddetti autori, questa sostanza corrisponde ad un estere solfo-nitrico della cellulosa che si formerebbe, durante la nitrazione, secondo lo schema seguente⁽⁵⁾:



Per renderci conto dell'influenza che le caratteristiche dei vari tipi di fibre hanno sulla stabilità delle nitrocellulose che ne derivano, è necessario stabilire con sicurezza se le impurezze dannose sono contenute nelle micelle o negli spazi intermicellari e quindi se per stabilizzare occorre purificare l'interno delle micelle o basta limitarsi alla superficie ed agli spazi intermicellari.

Abbiamo preso in esame i processi di stabilizzazione più efficaci e precisamente quelli per ebollizione con alcool metilico o etilico, i quali penetrano certamente fino a quei punti delle fibre dove sono contenute le impurezze solforiche e le eliminano completamente, come è dimostrato dal fatto che le nitrocellulose sottoposte a tali trattamenti, anche non polpate, risultano più stabili di quelle stabilizzate mediante polpaggio e lavaggi con acqua.

Le esperienze sono state eseguite adoperando due tipi di nitrocellulosa (entrambe preparate da fibre di cotone): una al 13.5% di azoto e l'altra all'11.7%.

L'alcool metilico gelatinizza e scioglie parzialmente la nitrocellulosa all'11.7% di azoto e quindi questo caso non è stato preso in esame.

Nella stabilizzazione con alcool si osserva che le fibre nitrate si gonfiano alquanto a differenza di quanto avviene nell'acqua ed abbiamo cercato di determinare se il gonfiamento osservato è solo intermicellare o anche intramicellare.

(1) « Journ. Soc. Chem. Ind. », 24, 374, 914, 1905; « Id. », 25, 624, 1906; « Id. », 28, 457, 1909.

(2) « Z. angew. Chem. », 44, 825, 1931.

(3) « Z. physik. Chem. », B, 12, 268, 1931.

(4) « Z. angew. Chem. », 45, 99, 126, 1932.

(5) « Z. Elektrochemie », 40, 193, 1934.

Per decidere ciò era necessario esaminare le fibre nitrate ai raggi X sotto l'azione dell'alcool bollente, o sotto l'azione dei vapori di alcool metilico o etilico bollenti.

A questo scopo mi sono servito dell'apparecchio rappresentato in fotografia (fig. 1).

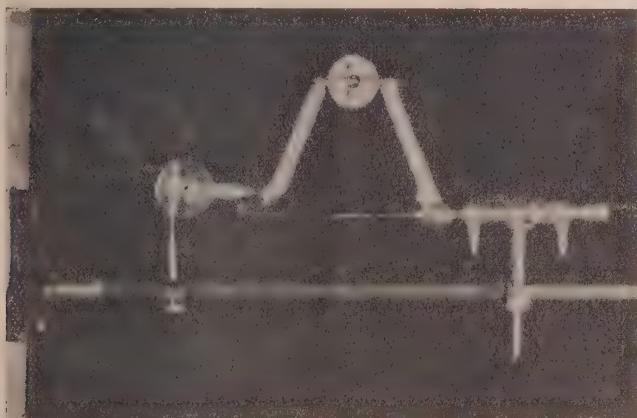


Fig. 1.

La fibra di nitrocotone è distesa in un tubo di vetro sistemato davanti alla fenditura, dalla quale arriva il fascetto di raggio X, ed attraversato dai vapori provenienti dal palloncino sottostante. Nel tubo di vetro, in corrispondenza della fenditura, sono state praticate due finestre chiuse con cellosane.

Lo spettrogramma di questo compare nelle fotografie sovrapposto a quello della sostanza in esame, e però, essendo costituito da un solo cerchio di interferenza, è ben distinguibile dalle macchie di interferenza appartenenti al diagramma fibroso del cotone nitrato.

In tutte le esperienze è stata fotografata prima la fibra allo stato secco e poi la stessa mentre nell'apparecchio circolava il vapore. Indi si sono confrontati i due spettrogrammi.

Nelle varie esperienze si è sempre osservato che gli spettrogrammi non subiscono nessuna variazione sotto l'azione dei vapori di alcool.

Si può quindi con sicurezza affermare che il liquido stabilizzante penetra solo negli spazi intermicellari ed estrae le impurezze ivi contenute, e che i cristalliti di nitrocellulosa non contengono impurezze solforiche nel loro interno.

Se il trinitrocotone, perfettamente stabilizzato mediante ebollizione con alcool metilico ed anche perfettamente cristallizzato, viene immerso in una miscela solfo-nitrica di composizione uguale a quella adoperata nella sua preparazione, si ottengono fibre che risultano di nuovo instabili.

Queste esaminate con i raggi X, mentre sono ancora umide di miscela nitrante, danno uno spettro cristallino identico a quello del composto stabile.

Risulta evidente perciò che la ricristallizzazione della nitrocellulosa e la sua stabilizzazione non sono legate da nessuna relazione e che esse sono fenomeni indipendenti che si verificano parallelamente.

Inoltre, quando la cellulosa è stata trasformata in trinitrato e da essa sono state estratte le eventuali sostanze estranee che potrebbero causarne l'instabilità, dovrebbe essere eliminata la possibilità per l'acido solforico di combinarsi con la fibra perchè lo schema di reazione descritto da Hess per la formazione degli esteri solfo-nitrici non è più possibile.

Si può dedurre quindi che le eventuali impurezze presenti inizialmente nella fibra non hanno una influenza molto forte sulla stabilità e che la caratteristica della fibra che ha la importanza predominante ai fini della stabilità è la struttura morfologica,

Difatti un liquido può purificare, e quindi stabilizzare, una nitrocellulosa tanto meglio quanto più facilmente riesce a farsi strada fra le micelle per penetrare nell'interno delle fibre, e la facilità di tale processo dipende non solo dalla natura del liquido adoperato, ma anche dalla struttura morfologica della fibra nitrata e, principalmente, dalle dimensioni degli spazi intermicellari.

Nei fili di cotone nitrato, dopo una preliminare ebollizione con acqua, le impurezze solforiche rimangono racchiuse nel canalicolo interno.

Anche non escludendo che vi siano altre impurezze solforiche combinate in qualche punto delle catene cellulosiche, data la estrema instabilità di questi esteri, si può ritenere che essi, dopo una preliminare ebollizione con acqua, vengano decomposti per azione del calore, e che l'acido solforico liberatosi, in parte viene allontanato dall'acqua, ed in parte rimane nella parte interna della fibra. In queste condizioni le micelle sono purificate e la nitrocellulosa risulta cristallizzata con notevole regolarità mentre la massa globale della fibra è ancora instabile.

A causa della elevata purezza iniziale del cotone, le micelle di cellulosa sono molto aderenti fra loro e l'acqua non riesce a penetrare fino al canalicolo attraversando gli strettissimi spazi intermicellari. Si rende perciò necessario il polpaggio che, tagliuzzando le fibre in tronchi microscopici, rende accessibile all'acqua l'interno del canalicolo.

I liquidi capaci di stabilizzare le fibre non polpate (per es., l'alcool etilico e metilico), a differenza dell'acqua, riescono a penetrare attraverso gli spazi intermicellari fino a raggiungere il canalicolo e gonfiare la fibra. Il fenomeno risulta molto evidente se si osservano al microscopio, allo stato umido, delle fibre di nitrocotone bollite con alcool metilico o etilico: in questo caso infatti si può vedere che la fibra, la quale normalmente si presenta come un nastro attorcigliato, assume forma cilindrica.

In tali condizioni il processo di purificazione è più facile ed anche più completo senza che vi sia bisogno di sminuzzare le fibre per renderne più accessibile l'interno.

Fisiologia vegetale. — *Appunti su talune manifestazioni del potere riduttore dei tessuti vegetali*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di R. SAVELLI, presentata dal Socio B. LONGO.

Francesco Selmi, fra il 1850 e il 1875, si applica a dimostrare che diversi corpi organici e organizzati, lieviti, muffe, e segnatamente l'oidio della vite e delle zucche, generano, a contatto di zolfo, H₂S, ciò che egli attribuisce a sviluppo di « idrogeno nascente » operato dalle muffe, forse per una « azione dissociante » da esse esercitata sull'acqua: estende le prove ad As e composti, ottenendo sviluppo di un composto arsenicale volatile, che non è idrogeno arsenicato, e di cui scrive: « sarà un'arsina ». Dumas (1874) ritrova che zolfo a contatto di lievito di birra dà H₂S; e Rey-Pailhade (1891) attribuisce tale attività ad una sostanza, isolabile dalle cellule, il *filotione*, che oggi generalmente si tenderebbe ad identificare col *glutatione* di Hopkins. Gosio (1892-1906) precisa che solo *talune muffe* (relativamente poche) operano la reazione sui composti arsenicali, e tende a riconoscere, nei prodotti, delle etilarsine, principalmente *dietilarsina*. Maassen (1902) mostra per i composti di Se e di Te bioreazioni paragonabili a quelle dell'arsenico, ma molto più estese, nel senso che appare difficile trovare microrganismi che non le dieno. Pollacci (1914) documenta esaurientemente la differenza di comportamento fra tessuto sano e vivo di radici di cavolo e tessuto invaso da *Plasmodiophora Brassicae*, rispetto a soluzione molto diluita di tellurito di sodio.

Quest'ultima esperienza viene ripresa nel 1931 dalla dott.ssa Ferrari con assoluta tendenza alla generalizzazione: sottolineando il contrasto tra parti vegetali sane e parti malate, cioè invase da miceti, si viene a ritenere che la capacità di reagire ai telluriti alcalini sia peculiare dei miceti e di altri organismi inferiori, e negata ai tessuti superiori, o quanto meno così lenta in questi ultimi da riuscire praticamente inapprezzabile; si da poter fondare su ciò un metodo generale di rivelazione di miceti parassiti o saprofitti, isolati o immersi nei tessuti, tale da rendere servigi pratici in patologia, come in biologia generale.

A dir vero l'ultima conclusione non mi parve molto in armonia con le esperienze stesse dell'A., che talvolta non ottiene reazione o perchè il micelio è poco, o perchè troppo immerso nei tessuti dell'ospite. E allora,

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico della Università di Catania.

(2) Pervenuta all'Accademia il 10 agosto 1936.

se la reazione richiede micelio abbondante e sfoggiato in superficie, essa rivela su per giù ciò che è di per sè manifesto. Ma le mie esperienze, cominciate nel 1932, mi convinsero di altre due cose, diversamente importanti: 1° la tecnica d'immersione, seguita dall'A., pone la maggior parte dei miceti parassiti in condizione di disagio fisiologico, sfavorevole al manifestarsi evidente della reazione, in gran parte legata appunto alla loro rigogliosa e libera attività; 2° che tessuti di piante superiori, specialmente a clorofillici, danno di per sè una loro bioreazione talvolta rapida e vistosissima. Non ritenni eccessivamente urgente fare obiezioni al lavoro della dott.ssa Ferrari, ma poichè lo Hasegawa ha quest'anno pubblicato un breve interessante lavoro⁽¹⁾ che interferisce col mio, e perciò ormai la questione è già posta, riassumerò brevemente i miei appunti, notando che lo Hasegawa, ispirato da intenti esclusivamente pratici, non ricorda nessuno degli autori che si occuparono delle bioreazioni del selenio e tellurio, ciò che giustifica l'aver tenuto a premettere, da parte mia, brevi linee storiche sull'argomento.

Hasegawa è un forestale, e vuol risolvere il problema di saggiare rapidamente la vitalità — quindi il valore tecnico e commerciale — di partite di semi che, come quelli forestali, essendo lenti a germinare danno il desiderio di prove rapide indirette: rammollisce i semi in acqua, asporta parte del tegumento, se è duro, e parte dell'albume o dell'endosperma in semi che ne sieno ricchi, in modo da scoprire l'embrione, oppure usa embrioni isolati, che vengon posti a contatto, in scatola Petri, di soluzione di tellurato di sodio, Na_2TeO_4 , all'1 %, o con carta bibula precedentemente imbevuta del reattivo. La riduzione a tellurio elemento, che conferisce colorazione dal bruno al nero assoluto, attesta la vitalità del seme, e manca nel seme morto. Interessanti ed esatte le constatazioni sulla temperatura il cui incremento accelera la reazione. Hasegawa si occupa esclusivamente di semi; io invece m'ero occupato assai poco di semi, e più di bulbi e del fiore: ad eccezione del grano, nessuno dei semi su cui Hasegawa ha lavorato erano stati presi in esame da me.

Un punto di divergenza sta nella preferenza di Hasegawa pel tellurato, quando anche in via semplicemente teorica si sarebbe dovuto preferire il grado di ossidazione inferiore; l'uso di una concentrazione così alta (1 %) si spiega appunto come conseguenza della scelta poco razionale del tellurato. Ma trattandosi di sali piuttosto costosi è tanto più utile ricorrere invece ai telluriti di Na o di K, che si possono usare in concentrazioni minori. Praticamente soluzioni dall'1 al 5 per mille di tellurito corrispondono bene; debbono escludersi invece le soluzioni diluitissime 1 : 5000 — 1 : 25000 usabili per i microrganismi.

Allium Cepa è il materiale che ho trovato preferibile: nessun altro tessuto animale o vegetale mi ha dato finora reazioni di maggiore intensità.

(1) «Jap. Journ. of Bot.», VIII, 1.

Un pezzo di bulbo fresco in piena attività fisiologica (meglio se di pianta proveniente da seme e in età di 4-6 mesi) può mostrare in capo a cinque minuti una ben sensibile reazione, che procede assai visibilmente per 5-6 ore (temp. del laboratorio, circa 18°), e poi lentamente, avviandosi al termine in 16-48 ore: il pezzo è diventato tutto nero a causa di un deposito di Te elementare formatosi nello spessore dei tessuti, e che traspare attraverso la superficie lucente dell'epidermide. La deposizione si inizia sulla superficie di sezione del pezzo, donde gradatamente procede nell'interno. Con i seleniti la reazione è di un bel rosso (tendente al rosso mattone) dovuto a selenio amorfo: dopo molti giorni, tuttavia, sui pezzi di cipolla verosimilmente già morti, il colore del precipitato tende a passare dal rosso al nero o grigio-nero: o che trattisi di mutamento di stato allotropico, o di formazione di composti, ciò che sarà da vedere, io ritengo tale cambiamento come effetto secondario di attività microbiche.

Nella cipolla la velocità di reazione è massima a livello del tessuto del girello del bulbo, cioè nella parte assile; per le squame è minore, ma tanto più intensa quanto più il loro tessuto è lontano dallo stato di riposo: ossia, in una vecchia cipolla che abbia appena cominciato a rivegetare, l'attività di reazione cresce dalla periferia al centro. Nelle parti verdi della foglia si ha pure reazione piuttosto intensa benchè l'effetto cromatico ne sia un po' mascherato dal colore del tessuto. I bulbi dell'aglio hanno capacità reattiva di poco inferiore a quella della cipolla. Mi riservo di vedere qual parte prendano nella reazione i composti volatili presenti in questi tessuti; ma è appena utile avvertire che la reazione avviene intensissima anche in tessuti del tutto sprovvisti di questi composti speciali, e che inoltre, per la reattività dei tessuti, non è affatto necessario che essi abbiano un carattere meristematico, come si sarebbe potuto sospettare in base ai soli esperimenti di Hasegawa. Si avrebbe ugualmente torto di generalizzare, perchè in molti tessuti la reazione è così debole da essere praticamente nulla: insomma si tratta di un argomento aperto allo studio.

Per certi materiali è opportuno usare un tagliente di vetro, ed evitare confusione con imbrunimenti d'altra origine. Reagiscono pochissimo: rizomi di *Canna*, apici radicali di *Cattleya*, giovani germogli di Patata, le basi degli scapi fioriferi di *Muscari*, placente ed ovuli di Papavero e di Tabacco, petali di *Nymphaea*, l'alume del Ricino, le teche anteriche del Tropeolo, gli ovari e gli ovuli di *Fritillaria messanensis* ecc. Reagiscono mediocremente: il turione dell'Asparago ed il tessuto carnoso dei grossi germogli di Orobanche, gli apici radicali di *Laelia*, le radici di *Monstera deliciosa*, l'embrione del Ricino, i petali, i filamenti staminali, gli ovarì e gli ovuli di *Pittosporum Tobira* ecc. Reagiscono intensamente, tra gli altri, i giovani embrioni, tratti dal frutto immaturo, di *Anagyris foetida* e di Fava, gli embrioni maturi di Pisello, Fagiolo, Senape, Bietola, *Pinus Pinea*, le radici di grano germinante ecc. Reagiscono intensamente i muscoli di certi pesci e mollu-

schi, un po' meno il cervello degli stessi pesci e il muscolo di vitello. Era naturale che volessi sperimentare su tessuti nei quali notoriamente si svolge un intenso processo respiratorio. Per esempio, nelle infiorescenze d'*Arum italicum*, esaminate qualche tempo dopo avvenuta la fecondazione, la reazione prende inizio a livello della parte femminile, precisamente negli ovuli; segue, subito dopo, a livello della parte maschile, ma non riguarda gli organi sessuali, bensì i fasci vascolari che sono così numerosi in quel tratto: questi fasci vascolari ben presto spiccano nettamente in nero sul fondo giallo del parenchima che non ha ancora reagito, e la preparazione in tal momento assume un bellissimo aspetto; segue poi la reazione nei due tratti dei fiori sterili; e segue in ultimo nella parte clavata dell'asse, anche qui riguardando in primo luogo i fasci vascolari. Anche con l'ovario di *Cucurbita maxima* ho ottenuto preparazioni in cui il tellurio tracciava netti disegni di un bel-l'effetto: la reazione comincia negli ovuli, segue immediatamente nel tessuto conduttore⁽¹⁾ e nelle papille stimmatiche; mentre invece nei fiori maschili reagiscono prima di tutto i fasci vascolari. Quest'ordine di successione, questi gradi di velocità di reazione, appunto perchè legati a speciali condizioni fisiologiche, si trovano diversi ripetendo l'esame in età e in condizioni diverse degli stessi organi: p. es. prima della fecondazione, oppure molto dopo. Tuttavia una speciale reattività dei fasci vascolari — o, per essere più esatti, di alcune loro cellule — si avverte in ogni tempo anche nella cipolla, e per foglie e petali di molte specie. Queste osservazioni, ancora grossolanamente anatomiche, ebbero lo scopo di orientarmi nella ricerca di un eventuale parallelismo tra la reagibilità al tellurito e la distribuzione del glutatione nei tessuti esaminati; ma io finora non ho potuto comprovare un tale parallelismo, e credo ormai che non esista.

Un primo problema di notevole interesse scientifico può intanto esser posto. Il Gosio, a proposito della sua bioreazione dell'arsenico, scriveva molto opportunamente⁽²⁾ « dagli autori il meccanismo della reazione fu quasi « sempre interpretato come un fenomeno di riduzione. Senonchè bisogna « distinguere la riduzione semplice, che consiste in una semplice eliminazione di ossigeno dalla molecola dei composti (l'aldeide disossida il nitrato « d'argento riducendolo in Ag metallico), da una riduzione cui tien dietro « una idrogenazione ». Questa osservazione del Gosio è di ovvia importanza: nel caso della bioreazione dell'arsenico, sviluppandosi etilarsine, la reazione non è globalmente qualificabile come una semplice riduzione. Anzi i fatti di sintesi hanno al nostro occhio, in questo caso, una importanza premi-

(1) Conduttore dei tubetti pollinici: la terminologia, purtroppo, spesso favorisce le confusioni. Ma io evito sempre l'uso del termine « conduttore » per i tessuti lungo i quali avvengono i movimenti di trasporto dei succhi, e serbo a questo termine il senso antico, sessuologico.

(2) « Rivista d'Igiene e Sanità pubblica », anno III, 1892, p. 228.

nente⁽¹⁾. Nel caso del tellurio, le muffe che reagiscono sui tellurati e sui telluriti sviluppano probabilmente dei gas analoghi ai gas di Gosio, o quanto meno sviluppano idrogeno tellurato. Io ho sperimentato con molti miceti della mia collezione, ed ho sempre notato insieme con la manifestazione dell'annerimento, dovuto a precipitazione di tellurio elementare, una molto più sensibile, e direi più propriamente talvolta insopportabile, manifestazione olfattiva dovuta allo sviluppo di composti gassosi di tellurio (che del resto, almeno a prima impressione, mi son parsi di un odore interamente corrispondente a quello dell'idrogeno tellurato ottenuto con mezzi chimici). Mi è indifferente, pel momento, sapere se le mie muffe abbiano sviluppato composti di sintesi organica, oppure — in tutto od in parte — idrogeno tellurato. Il fatto è che nel caso di tessuti superiori (cioè tessuti di spermatofite) non mi è mai riuscito di poter dimostrare in maniera veramente sicura uno sviluppo di combinazioni gassose del tellurio. Vale a dire che i tessuti superiori sembrano operare — a quanto mi consta finora — veramente una semplice riduzione.

Tuttavia è troppo presto per tracciare su questa base una opposizione di comportamento tra microrganismi e tessuti superiori: poichè già nel confronto tra le diverse muffe si hanno diversissimi rapporti tra la quantità di tellurio precipitato come elemento e la quantità trasformata in composti volatili, si potrà sempre credere che uno studio più esteso debba mostrare in seguito che solo differenze di grado distinguono le attività chimiche dei microrganismi da quelle dei tessuti superiori. Ma io voglio aggiungere immediatamente un fatto: che finora da nessun tessuto superiore io non ho mai potuto ottenere nessuna azione sugli arseniati o sugli arseniti: la bioreazione di Gosio resta una specialità di poche muffe (diversamente da quanto il Selmi ritenne a prima vista), mentre la reazione di Maassen subisce — come ho mostrato — interessanti estensioni.

(1) Vale forse la pena di rilevare gli errori ed i malintesi che spesso avvengono intorno alla parola ed al concetto di «organizzazione»? La reazione di Gosio è una organizzazione dell'arsenico, operata da alcune muffe; e non si può dire che il prodotto serva poi ad un processo di «organizzazione», esso viene eliminato. La sola organizzazione che meriti veramente la importanza basilare che a tale concetto si è voluta dare, è la organizzazione del carbonio.

Citologia vegetale. — *Sviluppo e adattamento di alcuni plastidi⁽¹⁾.* Nota⁽²⁾ di R. SAVELLI presentata dal Socio B. LONGO.

Mi occupo di quei plastidi che chiamai « Eleocloroplasti », termine che con piacere vedo accolto nel bellissimo trattato del Küster (*Die Pflanzenzelle*, 1935, pp. 306, 309, 651). Dopo la prima comunicazione del luglio 1933 (« Bull. Soc. It. Biol. Sper. », VII, p. 1528), riguardante *Cephalocereus euphorbioides*, nello stesso mese rinvenni un secondo caso identico, dato dal *C. scoparius*, ed annunciandolo in questi « Rendiconti » (XVIII, s. 6^a, f. 3-4) espressi nettamente un giudizio che debbo oggi richiamare: « Questo eleocloroplasto rappresenta certo uno speciale adattamento *il cui sviluppo ontogenetico e filogenetico, muove da un plastidio ordinario* » (p. 172-173); e nell'estate stessa io portai tutto il sostegno d'osservazione che m'era allora consentito, mostrando (« Bull. Orto Bot. », Napoli, XII, p. 43-54, e tav. I-II) come il cloroplasto da me illustrato non solo costituiva il caso di più vistosa sovrabbondanza lipidica, ma anche determinava il più appariscente « dimorfismo » che fosse mai stato osservato nei cloroplasti d'una stessa specie. Infatti, guidato dal concetto che l'eleocloroplasto fosse un prodotto di adattamento xerofita, volli scovare sulla stessa pianta quelle limitate regioni anatomiche in cui tale adattamento non avesse avuto ragione di concretarsi, prevedendo di trovarle anzitutto nei filli fiorali, che per tante ragioni debbono, un po', costituire un contrapposto fisiologico rispetto alla parte crassa della pianta, e debbono perciò rappresentare qualcosa di molto più vicino a quelle condizioni morfogenetiche che abitualmente consideriamo normali: e non avrei potuto sperare conferma più piena, ché le cellule del clorenchima dei pezzi sepaloidi hanno un gran numero di piccoli plastidi del tutto comuni, e diversissimi dagli eleocloroplasti. Ma soggiunsi immediatamente (p. 47, loc. cit.) che « le due categorie di plastidi, in effetto così diversi, non rappresentano qualcosa di originariamente distinto, cioè due *stirpi o discendenze (lignées)* di plastidi », invece deve prospettarsi « una derivazione unica, e che le differenze dipendano dalle diversità delle condizioni endocellulari – cioè di ambiente interno – che dominano e indirizzano lo sviluppo di questi organiti, PRIMORDIALMENTE IDENTICI ». E subito avvertivo: « la dimostrazione compiuta di tale tesi (cioè che l'eleocloroplasto derivasse ontogeneticamente da un *adattamento* indotto da cause fisiologiche) si sarebbe dovuta avere seguendo lo sviluppo dei plastidi nelle plantule, il che purtroppo non mi è stato ancora possibile non essendo riuscito in nessun modo a far germinare

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico della Università di Catania.

(2) Pervenuta all'Accademia il 19 agosto 1936.

i semi, maturati a Catania, di cui pur disponevo in buona quantità » (loc. cit., p. 46). Mi son anche doluto di aver distribuito tali semi nello scambio internazionale (*Note Bot. e Biol.*, p. 43); ma pel momento non potevo far nulla più che deplorarlo: le piante, anch'esse talvolta, sono dispettose: ad esempio merita segnalazione il comportamento di un magnifico esemplare di *Harpullia pendula* Planch. che appena venni a Catania attrasse la mia attenzione per esser carico di bei frutti che regolarmente maturavano, ma erano vuoti, coi residui degli ovuli non sviluppati. Ciò era stato osservato per tre anni: solo rarissimi semi potevano raccogliersi di tanto in tanto. Io m'ero proposto, appena ne avessi tempo, qualche osservazione speciale; mi accingevo a farla quest'anno, ed ora proprio la pianta si è risoluta bruscamente per una fertilità che non avrebbe potuto essere più piena: di questi bei semi lucenti, dal grosso embrione verde, ne abbiamo raccolti quest'anno circa due chilogrammi.

Solo nel 1934 il mio più grande esemplare di *Ceph. Euphorbioides*, sempre abbondantemente fiorente, mi dette semi germinabili, e la semina fattane il 28 marzo 1935 è stata interamente felice. Così ho potuto completare le osservazioni, traendone alle suesposte vedute conferma maggiore dell'attesa, nel senso che non solo l'eleocloroplasto esordisce come qualunque cloroplasto ordinario, ma rimane in una fase simile ad un cloroplasto comune *per un tempo molto più lungo che io non pensassi*. Le osservazioni riguardano solo il *Ceph. Euphorbioides*, perchè l'esemplare di *scoparius* non è in età da seme, e quanto ai rinvenimenti successivamente fatti da me in altre specie sono troppo recenti per aver potuto provvedere utilmente, mentre i casi della dott.ssa Casalaina non si prestano alla ricerca per altro motivo. Nel *Ceph. Euphorbioides*, dunque, gli Eleocloroplasti si presentano dapprima, nelle plantule estremamente giovani, in forma di leucoplastini mitocondriiformi. Questa dimostrazione non ha quell'interesse che avrebbe per formazioni sprovviste di clorofilla: nel nostro caso la semplice constatazione d'uno stroma clorofillifero basta a far porre fuori questione l'appartenenza degli eleocloroplasti a quella categoria di formazioni che una larga Scuola riferisce al « condrioma », perchè le dimostrazioni datene per tutti i cloroplasti sono così definitive da non lasciar pensare ad eccezioni. Questa parte della dimostrazione sarebbe invece essenzialissima nel caso di corpi non clorofilliferi, come lo erano tutti i presi « oleoplasti » e come lo sono *nello stadio adulto* i miei *Sterinoleucoplasti* i quali veramente appartengono al condrioma. Dicendo che appartengono al condrioma intendo soltanto dare al termine il valore descrittivo a tutti i botanici noto; ché del resto io sono restio ad omologare il « condrioma attivo » di Guilliermond al condrioma degli animali; le riserve espresse in proposito, mi pare anche dal Pensa, oltre che dal Levi, non sono trascurabili. In seguito si costituiscono piccoli cloroplasti; nel clorrenchima dei cotiledoni, in media, una trentina per cellula, rotondi, di 5-8 μ . di diametro, od ovoidi, ed *esclusivamente amiliferi*: tale stadio, esclusivamente

amilifero, dura a lungo; e mi è parso che l'amido sia tipico. I cloroplasti dell'asse sono poco diversi, solo un po' più grandi, con 5-7 o più granelli d'amido. Poi appaiono piccoli inclusi lipidici, ed allora il giovane eleocloroplasto appare — e resta per lungo tempo — identico a ciò che in altre Cactacee rappresenta la forma definitiva, adulta, del cloroplasto.

Questo è sorprendente: ora le piantine si trovano ad *un anno e quattro mesi* dalla semina, eppure io ho tuttora taluni pochi individui i cui plastidi non hanno ancora assunto la forma tipica. Questo sembra dipendere visibilmente dallo sviluppo complessivo raggiunto dall'esemplare, sviluppo che varia molto in individui coetanei, coltivati sotto le stesse condizioni. Il raggiungimento sollecito della forma eleocloroplastica tipica si trova associato generalmente alla robustezza, alle forti dimensioni dell'esemplare: lo si direbbe collegato a condizioni interne di attiva nutrizione. L'avvento della forma proprio tipica e definitiva del plastidio, accade, per quanto ho visto, in maniera brusca o quanto meno molto rapida; ciò si rileva prelevando, a brevi intervalli, dei piccoli campioni di tessuto in parti corrispondenti della stessa pianta; ma si comprende che non disponendo di molto materiale l'informazione che se ne può trarre è del tutto approssimativa. Sul vivo si osserva che questi cloroplasti di esemplari giovani costituiscono un materiale più che mai delicato, eccessivamente propensi ad agglutinarsi fra loro, a disfarsi rapidamente, per minime offese alla cellula. L'amido degli eleocloroplasti, nelle piante di circa un anno non è più tipico, ma di quella varietà che, convenzionalmente, è stata chiamata « lipidica ».

A rigore, bisognerebbe seguire lo sviluppo dell'eleocloroplasto anche nel meristema della pianta adulta; ma io non ho intenzione di praticare altre lesioni per uno scopo ormai inutile. Del resto il risultato più interessante resta quello del 1933 sul dimorfismo del cloroplasto, nell'asse e nei pezzi sepaloidi: perchè, invero, illustrando le differenze di forma legate a differenze di funzionalità, si fa della « citologia comparata ». Mentre l'Anatomia comparata lavora più che altro sui confronti di specie diversamente situate nella scala filogenetica, la citologia comparata, com'io la intendo, trae ragione e risultati principalmente dal confronto del diverso modo con cui si realizzano le potenzialità cellulari nelle diverse parti dello stesso organismo specifico in dipendenza delle differenti funzionalità che ne costituirono la ragione di sviluppo; in rapporto con i fattori interni ed esterni.

Quanto alla comparazione interspecifica non ho trovato eleocloroplasti né nelle seguenti 17 Cactacee: *ECHINOCACTUS capricornus* Dietr.; *E. Lenninghausii* K. Schumann; *E. Sellowii* Link et Otto var. *turbinatus* Arech.; *E. scopa* Link et Otto var. *ruberrima* Hort.; *E. pilosus* Gal; *E. robustus* Link et Otto; *E. Ottonis* Link et Otto var. *uruguensis* Arech.; *E. mammulosus* Lem.; *ECHINOCEREUS Brandgeei* K. Schum.; *E. paucispinus* Rümpl.; *E. polyanthus* Engel; *E. dasycanthus* Engelm.; *ECHINOPSIS Erytiesii* Zucc.; *E. Schickendantzii* Werber; *E. valida* Monv. var. *Forbesii* R. Mey; *E. Schelhasii*

Pfeiff; *E. rhodacantha* S. D.; né nelle seguenti 40 Euforbiacee: *EUPHORBIA Hystrix* Jacq.; *E. Nivulia* Buch.; *E. mammillaris* L.; *E. ornithopus* Jacq.; *E. Hystrix* Jacq. var. *viridis* Hort.; *E. aphylla* Brouss.; *E. abyssinica* J. F. Gmel.; *E. officinarum* L.; *E. cereiformis* L.; *E. Echinus* Hock.; *E. submammillaris* Berger; *E. colletioides* Benth.; *E. polygona* Haw.; *E. polyccephala* ?; *E. eritrhaea* Berger; *E. cubalina* Boiss.; *E. globosa* Sims; *E. Susannae* Marl.; *E. grandicornis* Goebel; *E. Grantii* Oliv; *E. avasmontana* Dietr.; *E. lactea* Haw.; *E. diacantha* Hort; *E. Caput-Medusae* L.; *E. Marlothii* Pax; *E. mexicana* Norton; *E. splendens* Bojer; *E. Bojeri* Hook; *E. similia* Berger; *E. canariensis* L.; *E. triangularis* Desf.; *E. grandidens* Haw; *E. Tirucalli* L.; *E. laurifolia* Lam.; *E. Schimperiana* Hoest.; *E. virosa* Willd.; *E. Regis-Jubae* Webb et Berth.; né in queste 14 Asclepiadacee: *HUERNIA Penzigii* N. E. Br.; *H. Schneideriana* Bgr.; *ECHIDNOGLOSSA Dammanniana* Spreng.; *CARALLUMA hesperidum* Maire; *STAPELIA gigantea* N. E. Br.; *St. grandiflora* Mass; *St. variegata* L.; *St. hirsuta* L.; *St. rectiflora* Rüst; *CEROPEGIA juncea* Roxb.; *Cer. hybrida* N. E. Br.; *Cer. stapeliaeformis* Haw.; *Cer. dichotoma* Haw.; *SARCOSTEMMA viminalis* R. Br.; né, infine, in queste 9 Composite: *KLEINIA spinulosa* Hort.; *K. glauca* Hort.; *K. cylindrica* Berger; *K. Haworthii* D. C.; *K. Anteuphorbium* (L.) D. C.; *K. articulata* (L. fil.) Haw.; *K. vioacea* Berger; *OTHOMA carnosa* L.; *O. sedifolia* D. C.

I risultati del primo gruppo abbassano notevolmente la percentuale di frequenza che si era tanto elevata con le osservazioni dell'anno scorso. In altro campo, c'è un punto da rilevare. Dal 1932 nel mio Istituto si conducono osservazioni sulla cromizzazione dei plastidi nell'*Aloe*; ed ho permesso che fosse dato da una mia allieva un cenno d'un risultato, che è stato anche ricordato nel citato trattato del Küster (p. 277); ma tornerò io stesso sul soggetto. Intanto, nel corso delle molte osservazioni, mi è capitato saltuariamente di vedere plastidi con goccia lipidica, in posizione parastromatica riproducenti esattamente il modello di forma di un eleocloroplasto; solo che, in tal caso, si trattava — caso mai — di un **ELEOCROMOPLASTO**; e credo che ciò possa trovarsi anche in altre gigliacee. Ma in vera sostanza questi casi credo che abbiano ben poco da fare col nostro soggetto, e ricadano in fatti già da tempo noti e ben caratterizzati: i fatti di degenerazione, e quindi con i caratteri di saltuarietà e di irregolarità che a tale condizione competono.

Vero è, tuttavia, che la degenerazione del plastidio ha in molti tessuti un carattere di normalità, come per l'appunto è evidente in certe corolle di *Aloe*, e non è la risposta a condizioni traumatiche o patologiche. Vero è, ancora, che spesso ciò che è anormale, o addirittura patologico o sub-patologico, per un dato tessuto o per una data specie, si concreta in forme abituali e normali in altri tessuti od in altre specie; e ciò perchè la manifestazione normale e quella patologica sono ambedue l'espressione d'una attività più generale: la reazione del plasma vivente a determinate serie di stimoli.

Citologia vegetale. — *Un eleocloroplasto a secrezione Ciaccio-positiva⁽¹⁾.* Nota⁽²⁾ di G. CASALAINA, presentata dal Socio B. LONGO.

Ho contribuito fin dal 1933 alla conoscenza degli eleocloroplasti, segnando il caso di *Myrtillocactus geometrizans* (Mart.) Cons., che invero differiva nell'aspetto da quelli tipici illustrati dal SAVELLI; ma che — guardando ai lati sostanziali — io ho creduto di poter ascrivere a tale categoria.

Le dimensioni molto minori, la maggior ricchezza in goccielle lipidiche endostromatiche, il volume dello stroma relativamente molto più grosso rispetto a quello della sferula lipidica parastromatica, sono particolari che colpiscono, nel confronto con i casi tipici dei *Cephalocereus euphorbioides* o *scoparius*; ma il fatto importante è che la sferula lipidica, per quanto piccola ($27 \mu^3$), è solo parzialmente abbracciata dalla coppa stromatica clorofillifera, rispetto alla quale assume posizione laterale, e per la più gran parte confina col citoplasma essendone separata soltanto da una pellicola, appartenente bensì al plastidio (e formante in esso una specie di vescicola), ma non clorofillifera e tanto sottile da lasciar supporre probabili rapporti fisiologici e scambi di sostanze tra il contenuto della vescicola stessa ed il citoplasma.

La precisazione della natura chimica del contenuto vescicolare avrebbe in ogni caso una grande importanza, e col termine di « eleocloroplasto » il SAVELLI ha inteso di lasciare impregiudicata la questione, nell'idea che forse in seguito si sarebbero potuti trovare contenuti vescicolari di costituzione diversa da quella prevalentemente sterinica emersa nei primi casi e — secondo le sue direttive — dimostrabile in primo luogo dalla reazione Liebermann-Bouchard e dal comportamento Ciaccio-negativo. Il SAVELLI si è adoprato a ristabilire nella citologia vegetale l'importanza del metodo CIACCIO, trascurato o contestato da alcuni botanici.

Io sono lieta di consegnare in questa Nota il primo caso di eleocloroplasto a secrezione Ciaccio-positiva, che ho trovato in *Cereus stellatus* Pfeiff. [Messico]: intendo riferirmi alla forma tipica, non alla varietà *Tenellianus* Lem. che se ne allontana.

I plastidi hanno forma pressochè ovoide, più grandi negli strati periferici del clorenchina (diametro maggiore $\mu 13,3$, minore $\mu 8,9$) più piccoli verso gli strati interni ($\mu 7,8 \times \mu 4,5$) dove sono anche più bitorzoluti per

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico della Università di Catania.

(2) Pervenuta all'Accademia il 24 agosto 1936.

grossi granelli d'amido inclusi. Le vescicole parastromatiche che ho misurato avevano pressochè tutte un diametro di μ 4,4 e, in media, un volume calcolato a $45 \mu^3$; perciò esse sono, relativamente alla massa dello stroma, più vistose nei plastidi degli strati interni, e vengono a sporgere per più della metà della loro superficie, che fa salienza nel citoplasma come è stato spiegato sopra.

Di solito non ho rilevato goccioline lipidiche endostromatiche; l'amido non dà spiccata la reazione allo iodio, e lo ritengo della varietà convenzionalmente detta « lipidica ».

Per un confronto delle dimensioni, si tenga presente che, secondo mie misurazioni, nei plastidi di *Echinocactus leucacanthus* Zucc. il diametro delle vescicole parastromatiche è in media di μ 13,3, ed in quelli di *Echinocereus pentalophus* Lem. di μ 11,2, cioè le vescicole sono almeno venti volte più voluminose di quelle del *Cereus stellatus*. Nei due casi sopra citati lo spessore della coppa clorofillifera (che avvolge come un mantello la parte inferiore della sferula lipidica) mi è risultato, nella sezione, da 1,5 a 2,2 μ . Nell'*Echinocactus* l'amido era fortemente « lipidico ». Io terrò presenti, nel corso di questa Nota, appunto queste due specie per qualche altro opportuno confronto col *Cereus stellatus*.

Il trattamento Ciaccio fu fatto su sezioni tagliate in precedenza dal fresco, di spessore piuttosto forte, come è preferibile per questo materiale: 48 ore in bicr. K 5 %, c. c. 100 + formolo (40 %), c. c. 20 + 5 gocce acido formico; passano in bicr. K 3 %; ove dimorano per 5 giorni, in termostato a 36°; lavaggio acqua per 24 ore; passaggio ai solventi; colorazione. Il trattamento solvente da me adottato è il seguente: alcool a 50°, 6 ore; alcool a 80°, 17 ore; alcool a 95°, 48 ore; alcool assoluto, 68 ore; alcool assoluto + solfuro di carbonio in parti uguali, 24 ore; solfuro di carbonio, 26 ore; alcool assoluto più volte rinnovato, 26 ore; alcool a 95°, 26 ore.

In molti casi al trattamento al solfuro di carbonio fu sostituito un trattamento con xilolo, oppure con etere o cloroformio, o con varie miscele di questi solventi. Si potrà esser sorpresi dall'eccessiva lunghezza della dimora in alcool, ma ciò trova la sua spiegazione nel fatto che in *Echinocereus pentalophus*, ed in *Echinocactus leucacanthus*, dopo il trattamento Ciaccio, basta una azione prolungata dell'alcool a 85° per dissolvere le sferule lipidiche; e quando si tratti di alcool a 95° bastano soli 8-15 minuti di azione: dell'eleocloroplasto rimane soltanto lo stroma. Prolungando il trattamento dell'alcool io ho voluto accettare fin da questa fase, una differenza notevolissima rispetto al comportamento delle altre due cactacee prese a confronto⁽¹⁾. Del resto anche il trattamento al solfuro di carbonio e allo xilolo fu enor-

(1) È utile avvertire che, in *Cereus stellatus*, già dopo la sola azione del primo liquido di Ciaccio (cioè prima della postcromizzazione) si pronuncia una forte resistenza delle sferule lipidiche all'azione solvente dell'alcool (oltre 20 ore all'alcool a 95°).

memente prolungato rispetto ai tempi usuali, sicchè la positività al Ciaccio di questo secreto lipidico è dimostrata *ad abundantiam*. Dopo i solventi, la colorazione fu fatta col Sudan Ciaccio (al c. 85°, c. c. 90 + acetone c. c. 10 + Sudan III a saturazione). Talune delle gocciole si presentano cave; ciò è la conseguenza di uno smistamento di sostanze e di una certa differenziazione tra una zona centrale e una zona corticale che può avvenire durante la postcromizzazione.

Non avendo potuto completare le ricerche microchimiche da tutti i lati che sarebbero desiderabili, non intendo enunciare conclusioni che dicano nulla più dei fatti stessi che ho osservato. Ma la naturale idea che scaturisce dalla Ciaccio-positività, cioè la presenza di lipidi fosforati, mi indusse a provare lo Smith-Dietrich. Quale che sia il valore da accordare al metodo, ed i criteri da usare per vagliarne i risultati, sta di fatto che si ebbe il più netto contrasto tra i plastidi di *Echinocereus pentalophus* e *Echinocactus leucacanthus* che non si colorano, e quelli di *Cereus stellatus* in cui la sferula lipidica resta colorata in nero-bleu, nettamente differenziandosi dallo stroma scolorato.

Per quel che riguarda il saggio Liebermann-Bouchard per *Echinocereus pentalophus* e *Echinocactus leucacanthus* confermo, anche per parte mia, la positività della reazione, e che per l'*Echinocereus*, anche nei cloroplasti, il viraggio tende al bleu (come fu visto per i *leucosterinoplasti* da SAVELLI) mentre nell'*Echinocactus* più spesso si può giungere al verde come di norma. Ma nel *Cereus stellatus* la piccolezza della sferula da un lato, e la violenza dei reattivi dall'altro, hanno fatto sì che non mi è stato possibile individuare con sicurezza quali reazioni dà il lipide di secrezione: si ha una reazione rossa che è prudente valutare come una reazione del tessuto complessivamente.

Tanto nel *Cereus stellatus*, quanto nelle altre due specie prese a confronto, l'azione dell'alcool sul fresco mostra l'estrema solubilità della goccia lipidica. In pochi secondi si ha il passaggio della clorofilla dallo stroma alla goccia stessa; in capo a 2-3 minuti, nell'alcool a 95°, la goccia inverdita (che spesso si stacca dallo stroma) è sciolta completamente. Dunque la grande differenza tra il *Cereus stellatus* e le altre due specie risalta soltanto in grazia del trattamento CIACCIO. Incidentalmente è interessante notare che, sotto l'azione di alcool a 70°-80°, specialmente in *Echinocereus pentalophus*, ma anche in *Echinocactus Leucacanthus*, alla prima fase di colorazione della goccia in verde, segue, dopo qualche tempo, una fase di decolorazione: dopo circa 24 ore, nell'alcool a 70°, le gocciole si trovano ancora, completamente prive di clorofilla, ma ricolorabili col Sudan Ciaccio o col *Fettponceau fettlöslich* (Grübler). Il Sudan dà toni aranciati o rosso mattone, il *Fettponceau bellissime* colorazioni rosso-rubino. Ho anche talvolta usato sul fresco il *Brillantblau fettl.* (Grübler) e il *Brillant Orange fettl.* (Grübler) con la tecnica di diluizione indicata da SAVELLI (soluzione del

colorante all'1-2 per mille in alcool a 95°, immersione delle sezioni e immediata diluizione con un volume d'acqua mai inferiore al rapporto 1:1). Per il primo colorante c'è da notare che a debole concentrazione esso colora le goccioline del *Cereus*, in verde-smeraldo: ha una certa tendenza a colorare più debolmente (in bleu) anche gli stromi.

La formalina neutra al 10% non ha alcuna sensibile azione stabilizzatrice sui lipidi della gocciola; tale trattamento riesce solo a favorire le colorazioni. Dal punto di vista dei minimi particolari morfologici è difficile trovare un fissatore che sia veramente eccellente ed è da preferire l'esame sul vivo praticato senza liquidi.

Mi sono risultate negative per l'eleocloroplasto le seguenti 76 Cactacee: *MAMILLARIA centricirrha* Lem.; e var. *magnimamma* Schu.; *recurva* Schu.; *macrantha* Schu.; *divergens* Schu.; *Krameri* Schu.; *Bockii* Schu.; *M. longimamma* D. C.; *M. angularis* Link et Otto; e var.: *fulvispina* Schu.; *longiseta* S. D.; *M. rhodantha* Link et Otto; e var.: *Pfeifferi* Schu.; *stenocephala* Schu.; *M. stella-aurata* Mart.; *M. elongata* D. C.; e var.: *echinata* Schu.; *tenuis* Schu.; *anguinea* (Otto) Schu.; *Minima* Reichb.; *M. gracilis* Pfeiffer; *M. muliceps* S. D.; *M. geminispina* Haw, e var.: *cristata* Hort.; *M. Hahniana* Werd.; *M. Pringlei* Coul.; *M. vetula* Mart.; *M. bombycina* Quehl; *M. pusilla* D. C. var. *texana* Engel.; *M. zucchiniana* Mart.; *M. tuberculosa* Engel.; *M. clavata* Pfeiff.; *M. celsiana* Lem.; *M. candida* Scheidw.; *M. camptotricha* Dams.; *M. Karwinskiana* Mart.; *M. elegans* D. C.; *M. spinosissima* Lem.; *M. Wildii* Dietr.; *M. cornifera* D. C.; *M. bocasana* Poselg.; *M. surculosa* Bod.; *M. mazatlanensis* Schu.; *CORYPHANTHA Palmeri* Britt. et Rose; *C. pseudechinus* Bod.; *C. gladiispina* (Bod.) Berger.; *C. erecta* Lem.; *C. clava* Lem.; *DOLICOTHELE sphaerica* (Dietr.) Britt. et Rose; *CEREUS peruvianus* Mill.; e var. *longispinus* Hort.; *C. Baxaniensis* Karw.; *C. Priuglia* Wats.; *C. formosus* Salm. var. *monstruosa* Hort.; *C. nycticalus* Link; *C. saxicola* Morong. var. *anguiniformis* Riccob.; *C. Jamacaru* D. C. var. *glaucus* Hort.; *C. horridus* Otto; *C. obtusus* Haw.; *C. pomanensis* Weber; *C. trigonus* Haw. e var. *guatemalensis*; *CEPHALOCEREUS nobilis* (Haw) Britt. et Rose; *C. cometes* (Scheid.) Britt. et Rose; *C. leucocephalus* (Poselg.) Britt. et Rose; *PIFTANTHOCEREUS Forbesii* Berg.; *P. Jamacaru* Riccob. var. *horribarbis* Hort.; *P. validus* Riccob.; *PILOCEREUS Dautwitzii* Haage jun.; *P. floccosus* Lem.; *ERIOCEREUS platygonus* Riccob.; *E. tephrocaanthus* Berger; *E. Jusbertii* Berger; *TRICHOCEREUS thelegonus* Riccob.; *BORZICACTUS Ventimigliae* Riccob.; *EPIPHYLLUM Russellianum* Hook.

Zoologia. — *Studi statistici sulla variabilità del Succiacapre («Caprimulgus e. europaeus L.») ⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di ADA AGOSTINI, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.*

Durante le stagioni primaverili-estive 1931-32-33-34-35-36, nella Stazione Ornitologica di Castelfusano diretta dal principe D. Francesco Chigi, e posta sotto il controllo scientifico dell'Istituto di Zoologia della R. Università, è stato possibile raccogliere un abbondante materiale di Succiacapre (*Caprimulgus europaeus europaeus* L.) catturati durante la loro migrazione primaverile al loro arrivo sul litorale tirreno, nelle apposite reti a tramaglio poste lungo la prima duna litoranea, dell'Osservatorio di mare della Stazione stessa.

L'abbondanza del materiale esaminato nei sei anni ha reso possibili alcuni studi statistici sulla variabilità di questa specie, i cui risultati, che si sono dimostrati di particolare interesse per una questione riguardante la sua sistematica, riassumo in questa breve Nota.

Alcuni ornitologi credettero di poter distinguere nel *Caprimulgus europaeus* forme subspecifiche; l'Hartert (*Ibis*, 1896) ha dato corpo a tali tendenze colla proposta di distinguere un *Caprimulgus europaeus meridionalis* sottospecie basata su individui di diversa intensità di colorito e di dimensioni più piccole, risultanti appunto dalla misura della lunghezza dell'ala che secondo l'Hartert, andrebbe in questa forma da 17,4 a 18,6 cm. mentre per la forma tipica *C. europaeus europaeus*, lo stesso Hartert dà i valori da 19 a 20,1. Tale forma *meridionalis* sarebbe caratteristica dell'Europa meridionale e dell'Africa settentrionale. In seguito, come sarà meglio detto nel lavoro in esteso, alcuni Autori riconobbero tale sottospecie, mentre altri sollevarono dubbi sulla sua esistenza, e così per l'Italia, ad es., l'Arrigoni ammise la coesistenza delle due forme *e. europaeus* ed *e. meridionalis*, il Giglioli Hillyer si mostrò poco propenso ad ammetterla, altri infine, e fra questi il Martorelli, non la citano affatto.

È sembrato perciò opportuno prendere in esame la questione sul materiale che giunge a Castel Fusano, costituito appunto da individui i quali provengono dall'Africa settentrionale e che rappresentano il grosso nucleo del contingente di Succiacapre che popola la nostra penisola spingendosi taluni anche in regioni di Europa più settentrionali e orientali.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia della R. Università di Roma e nella Stazione Ornitologica di Castelfusano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1936.

Sono stati esaminati 589 esemplari dei quali 328 maschi e 261 femmine; i caratteri presi in esame sono stati quelli sui quali appunto si basa l'Hartert per la distinzione della sottospecie, e cioè colorito del piumaggio e lunghezza dell'ala misurata dall'articolazione carpale alla punta.

Riporto nelle seguenti tabelle i valori riscontrati rispettivamente nei maschi e nelle femmine, opportunamente raggruppati in classi dell'ampiezza di 0,5 cm.:

| Maschi | | Femmine | |
|--------|-----------|---------|-----------|
| Classi | Frequenze | Classi | Frequenze |
| 17 | 1 | 17 | 0 |
| 17,5 | 3 | 17,5 | 3 |
| 18 | 45 | 18 | 25 |
| 18,5 | 62 | 18,5 | 40 |
| 19 | 106 | 19 | 74 |
| 19,5 | 56 | 19,5 | 52 |
| 20 | 43 | 20 | 43 |
| 20,5 | 9 | 20,5 | 12 |
| 21 | 3 | 21 | 11 |
| 21,5 | 0 | 21,5 | 1 |

Da queste tabelle sono state calcolate le medie e alcune altre statistiche riportate nel seguente specchietto:

| | M | m | σ | C. V. |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|
| Maschi | 19,03 | 0,038 | 0,693 | 3,64 |
| Femmine | 19,24 | 0,048 | 0,781 | 4,05 |

dove M è la media $(M = \frac{\sum v \cdot f.}{n})$, m l'errore medio della media $(m = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, σ la deviazione tipica $(\sigma = \pm \sqrt{\frac{\sum d^2 f}{n}})$ e C. V. il coefficiente di variabilità $(C. V. = \frac{100 \sigma}{M})$. I valori delle singole statistiche sono

stati calcolati con il metodo breve partendo da una media arbitraria e calcolando gli scarti (d') delle varie classi.

Dai valori indicati nelle tabelle, è possibile tracciare le curve della variabilità della lunghezza dell'ala nei maschi e nelle femmine. Tali curve, nell'uno e nell'altro sesso sono unimodali e appaiono sufficientemente regolari da far ritenere di essere in presenza di un gruppo abbastanza omogeneo per questo carattere.

Quanto all'altro carattere considerato dall'Hartert e cioè colorito del piumaggio, si è potuto constatare come esso vari moltissimo da individuo a individuo e anche come non sia affatto legato al carattere dimensioni dell'ala, potendosi riscontrare individui di piccole dimensioni chiari o scuri indifferentemente. Lo stesso si può dire per gli individui di più grandi dimensioni.

La questione delle discordanze fra i vari Autori sulla possibilità di distinguere le due sottospecie e sulla presenza o meno di esse in una data regione, sarà ampiamente presa in considerazione in altra sede. Mi limiterò soltanto qui a far rilevare come finora mancavano osservazioni compiute su un numero considerevole di animali.

In base a quanto sopra ho esposto si può pertanto concludere che:

Il materiale da me esaminato è composto da individui la cui lunghezza dell'ala varia nei maschi da un minimo eccezionale di 17 a un massimo eccezionale di 21 cm., nelle femmine da 17,5 a 21 cm.

La media dei valori di questo carattere è nei maschi $19,03 \pm 0,038$ e nelle femmine $19,24 \pm 0,048$.

La lieve differenza fra i valori per i maschi e per le femmine $d = 0,21 \pm 0,061$ non ha evidentemente alcun valore di dimorfismo sessuale come anche lo indica il fatto che è poco maggiore di tre volte il suo errore medio.

Le curve di variabilità del carattere considerato sono unimodali e appaiono regolari, non autorizzando assolutamente a ritenere di essere in presenza di un gruppo eterogeneo o addirittura di due gruppi ben distinti. D'altra parte il carattere colorito del piumaggio non è collegato con le dimensioni.

Con questo non è naturalmente da escludersi la possibilità che l'esame di altri caratteri, oltre ai due sui quali si basa la distinzione dell'Hartert possa mettere in luce l'esistenza di due sottospecie, ma è certo che i caratteri considerati, che sono appunto quelli sui quali unicamente si basa la distinzione subspecifica dell'Hartert, non valgono a distinguere le sottospecie *europaeus* e *meridionalis* nel materiale raccolto in sei anni nella Stazione Ornitológica di Castelfusano.

Biologia (Embriologia sperimentale). — *Processi correlativi di determinazione e di accrescimento dell'abocco lentogeno negli Anfibi.* — III. *Esperienze su «Bufo viridis», «Bufo vulgaris», «Rana agilis», «Rana esculenta»*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di T. PERRI, presentata dal Socio F. SILVESTRI.

In due precedenti Note⁽³⁾ ho esposto i risultati raggiunti in *Bufo vulgaris*, *Bufo viridis*, *Rana esculenta*, nei riguardi di alcune questioni sull'abocco del cristallino. Ho poi continuato in queste ricerche sulle medesime specie, ed inoltre le ho estese a *Rana agilis*, guidato dall'importanza che lo studio comparativo sperimentale ha avuto nel progresso delle nostre conoscenze sull'embriologia del cristallino. Nella presente Nota dò un breve sunto dei risultati che ho conseguito nel 1935 e nel 1936.

1° Esperienze su embrioni di *Bufo viridis*:

Nella Nota del 1934 ho esposto i risultati dimostranti che in questa specie, prima non indagata da tal punto di vista, asportando l'abocco retinico⁽⁴⁾ allo stadio di neurula non si ha cristallino.

In esperienze di asportazione dell'ectoderma sopraoculare, ivi compreso il lentogeno, eseguite nel 1934, 1935, 1936, ho riscontrato che in molti casi la vescicola ottica determina sull'ectoderma, che viene a sostituire quello asportato, un nuovo abocco lentogeno che in alcuni casi è ancora in connessione con lo strato interno dell'ectoderma. Lo stadio è stato di vescicola ottica primaria.

Nel corrente anno 1936, ho pure eseguito il trapianto dell'abocco retinico sotto l'ectoderma delle zone ventrali. Non ho mai avuto la determinazione del cristallino, pur essendosi la retina venuta a trovare a contatto con l'ectoderma. Questo tipo di esperienze, come è stato già posto in rilievo da diversi Autori, presenta sempre delle cause di errore; perciò ritengo solo come molto probabile che in *Bufo viridis*, allo stadio di vescicola ottica

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia ed Embriologia comparate della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1936.

(3) Questi «Rendiconti»; Nota I, vol. XIX, 1934; Nota II, vol. XXIII, 1936.

(4) È chiaro che l'espressione «abocco retinico» è da me usato in senso ampio: cioè di vescicola ottica primaria (*die primäre oder präsumptive Augenblase*, dei tedeschi); o, se si è nello stadio di neurula, nel senso di presuntivo occhio (*das präsumptive Auge*, *die Augenplatte*, dei tedeschi).

primaria (bottone codale accennato), l'ectoderma delle zone ventrali non sia suscettibile di influenza lentogena da parte della vescicola ottica dello stesso *Bufo*.

2º Esperienze su embrioni di *Bufo vulgaris*.

Nel 1934 ho riconfermato, con esperienze di asportazione dell'abbozzo retinico allo stadio di neurula, i risultati di Cotronei (1921)⁽¹⁾ dimostranti che non si ha cristallino in assenza dell'abbozzo retinico.

Nel corrente anno, ho asportato l'abbozzo retinico allo stadio di vescicola ottica primaria, ed ho avuto in un caso la formazione di un lentoide ancora aderente allo strato interno dell'ectoderma. Il contatto tra retina ed ectoderma era però già avvenuto.

In esperienze di asportazione dell'ectoderma sopraoculare e dell'abbozzo lentogeno, quando questo è separato dall'ectoderma, ho notato che non si ha alcun cristallino sull'ectoderma che viene a sostituire quello asportato. Risultava già dalle esperienze di Filatow (1924)⁽²⁾ da me riconfermate, che, eseguendo la stessa operazione allo stadio di vescicola ottica primaria, si ha l'induzione di un nuovo cristallino. Se ne conclude che in *Bufo vulgaris*, allo stadio di abbozzo lentogeno separato dall'ectoderma, è scomparsa la possibilità di formazione d'un nuovo cristallino⁽³⁾.

Altre esperienze di quest'anno riguardano il trapianto della vescicola ottica primaria sotto l'ectoderma delle zone ventrali. Lo stadio di operazione è stato di vescicola ottica primaria (bottone codale accennato). Non ho avuto la determinazione di alcun cristallino, e lo stesso risultato avevo avuto nel 1934. Ritengo perciò assai probabile che in *Bufo vulgaris*, come in *Bufo viridis*, l'ectoderma delle zone ventrali non sia suscettibile d'influenza lentogena da parte della vescicola ottica dello stesso *Bufo*, allo stadio di vescicola ottica primaria. Ciò non è affatto in contraddizione con i risultati di Filatow⁽⁴⁾ dimostranti che da pezzi di ectoderma di zone ventrali di *Bufo vulgaris* trapiantati sulla vescicola ottica di embrioni di *Rana esculenta* si ha un cristallino. Basta pensare (Spemann, 1907) che la vescicola ottica di *Rana esculenta* determina un cristallino anche sull'ectoderma delle zone ventrali di *Bombinator*; mentre la vescicola ottica dello stesso *Bombinator* è capace di far ciò solo sull'ectoderma cefalico.

In *Bufo vulgaris* ho avuto pure occasione di eseguire alcune esperienze sulla determinazione della cornea, che mostrano come in questa specie i

(1) G. COTRONEI, *Ricerche di Morfologia*, vol. II, 1921.

(2) D. FILATOW, «Arch. Mikr. Anat. u. Entw. mech.», vol. 104, 1925.

(3) MANUILOWA (vedi «Ber. Wiss. Biol.», vol. 34, 1935, p. 468), eseguendo la stessa esperienza allo stadio in cui il cristallino è separato dall'ectoderma, ha avuto la determinazione di un nuovo cristallino sull'ectoderma sostitutente quello asportato. È assai probabile che l'A. abbia studiato in uno stadio più giovane di quello da me usato.

(4) D. FILATOW, «Roux Arch. f. Entw. mech.», vol. 105, 1925.

fatti si svolgono nello stesso modo che nelle altre specie già indagate (come ad es. in *Amblystoma punctatum* studiato da Lewis, in *Rana catesbeiana* studiata da Cole ecc.).

All'osservazione al binoculare, *in vivo*, ho notato la formazione della cornea in presenza della retina ed assenza del cristallino; inoltre asportando la cornea (il suo stato esterno) già ben sviluppato, ho visto che nell'ectoderma che viene a ricoprire l'occhio si forma una nuova cornea, dopo una quindicina di giorni (in febbraio); trapiantando la vescicola ottica insieme con lo strato interno dell'ectoderma, sotto l'ectoderma delle zone ventrali, si ha la formazione di una cornea completa (dopo una diecina di giorni in febbraio-marzo).

3º Esperienze su embrioni di *Rana agilis*:

In alcuni embrioni, allo stadio di vescicola ottica primaria, ho asportato l'ectoderma sopraoculare, ivi perciò compreso il lentogeno. Ho avuto dei casi i quali chiaramente mostrano che nell'ectoderma venuto a sostituire quello asportato, si è formato un nuovo abbozzo lentogeno, che in alcuni di questi casi è ancora in connessione con lo strato interno dell'ectoderma.

Adunque, allo stadio di vescicola ottica primaria, anche in *Rana agilis*, come in tutte le altre specie eccetto *Rana esculenta* ed un'altra *Rana* che forse è *arvalis*, l'ectoderma perioculari è suscettibile d'influenza lentogena.

4º Esperienze su embrioni di *Rana esculenta*:

Nella Nota del 1936 ho esposto i risultati conseguiti nel 1934 e resi noti dal mio Direttore prof. Cotronei nel dicembre dello stesso anno⁽¹⁾, dimostranti che in *Rana esculenta* l'abbozzo retinico è indispensabile per la determinazione del cristallino.

Nella Nota del 1934 scrissi che avevo in corso esperienze tendenti «a ricercare se esista uno stadio di neurula, in cui l'ectoderma sia suscettibile di influenza lentogena, problema già posto dallo Spemann, ma non risolto». Quest'anno ho avuto risultati dimostranti che nel secondo periodo dello stadio di neurula, cioè quando le pieghe neurali sono rialzate e solo in parte avvicinate, asportando anche ampiamente l'abbozzo lentogeno, già determinato, si ha che la retina ne induce un altro sull'ectoderma che viene a ricoprirla. L'abbozzo lentogeno è in alcuni casi ancora in connessione con lo strato interno dell'ectoderma, e questo esclude che provenga per neoformazione dal margine irideo della retina.

Adunque in *Rana esculenta* la capacità, da parte dell'ectoderma che sarà perioculari, a lasciarsi influire a cristallino esiste allo stadio di neurula, ed è perduta allo stadio di vescicola ottica primaria (pieghe neurali chiuse).

Considerazioni. — In un lavoro in esteso di prossima pubblicazione avrà occasione di trattare con una certa ampiezza le quistioni principali dell'em-

(1) G. COTRONEI, «Monit. zool. ital.», suppl. al vol. XLV, 1934 (v. a p. 130)

briologia del cristallino negli Anfibi. Desidero qui limitarmi a qualche considerazione che più direttamente emerge da quanto ho esposto.

Noto anzitutto che queste esperienze mettono in evidenza notevolissime somiglianze tra *Rana esculenta* e le altre specie.

In tutti gli Anfibi, e come risulta dalle mie esperienze anche in *Rana esculenta*, la presenza dell'abocco retinico è indispensabile per la determinazione dell'abocco lentogeno. Holtfreter (1935)⁽¹⁾ ha eseguito ricerche di trapianto di ectoderma di *Rana esculenta* su *Triton* allo stadio di gastrula, da cui deduce essere assai inverosimile che in *Rana esculenta* l'abocco lentogeno sia autodifferenziabile. Come si vede queste conclusioni rientrano in quanto avevo dedotto dalle mie ricerche.

La zona di ectoderma che negli Anfibi è suscettibile, per influenza dell'abocco retinico, a dar luogo ad un abocco lentogeno è variamente estesa. In *Amblystoma* è limitata alla zona perioculari (Harrison, 1920); in altre specie (es. *Bombinator*) si estende solo all'ectoderma cefalico; in altre infine anche all'ectoderma delle zone ventrali (es. *Triton*, *Rana palustris* ecc.). Come *Bombinator* si comportano, secondo le mie ricerche, anche *Bufo viridis* e *Bufo vulgaris*.

È da tener presente che queste conclusioni sono tutte basate su esperienze eseguite allo stadio di vescicola ottica primaria. Già alcune ricerche mettono in luce l'importanza dello stadio. Di proposito se n'è occupato Ikeda (1936)⁽²⁾ che sperimentando su embrioni di *Hynobius unnangso Tago* ha visto che la determinazione di un nuovo cristallino, su ectoderma cefalico venuto a sostituire quello lentogeno asportato, ha luogo solo fino ad un certo stadio, oltrepassato il quale più non avviene. In tale stadio limite nella massa delle fibre del cristallino si distingue la massa centrale.

Le mie esperienze su *Bufo vulgaris* ribadiscono tale concetto; poichè mettono in evidenza che allo stadio in cui il cristallino è da poco separato dall'ectoderma ed è differenziato in fibre ed epitelio, la possibilità della formazione di un nuovo cristallino dall'ectoderma è già perduta.

In *Rana esculenta* tale possibilità è assente allo stadio di vescicola ottica primaria (Spemann). Le mie ricerche mostrano che allo stadio di neurula, quando le pieghe neurali sono rialzate e in parte avvicinate, esisteva; infatti asportando a questo stadio l'abocco lentogeno si ha che la retina ne determina un altro sull'ectoderma che viene a contatto con essa. Esperienze di Holtfreter (1935) mostrano che ectoderma di giovane gastrula di *Rana esculenta* trapiantato su embrioni allo stesso stadio di *Triton* possono rispondere a stimoli di vari abbozzi sia di *Rana* che di *Triton* dando luogo anche ad abbozzi lentogeni.

Data l'importanza che ha lo stadio sulla possibilità di determinazione di un abocco lentogeno, è interessante sperimentare se, ad es. in *Bufo vul-*

(1) J. HOLTGRETER, «Roux Arch. f. Entw. mech.», vol. 133, 1935.

(2) Y. IKEDA, «Arb. Anat. Inst. Sendai», H. XVIII, 1936.

garis, esista uno stadio in cui sia suscettibile d'influenza lentogena anche l'ectoderma delle zone ventrali. Tanto più che questo venendo a contatto con la vescicola ottica di *Rana esculenta* dà un cristallino.

Le esperienze dinanzi esposte permettono di concludere:

1° In embrioni di *Bufo viridis* e di *Bufo vulgaris*, allo stadio di vescicola ottica primaria l'ectoderma delle zone ventrali — assai probabilmente — non è suscettibile d'influenza lentogena da parte della vescicola ottica dello stesso *Bufo*.

2° In *Bufo vulgaris*, allo stadio in cui il cristallino è separato dall'ectoderma, non vi è più la possibilità della determinazione di un nuovo cristallino sull'ectoderma che viene a ricoprire l'occhio.

3° In *Rana agilis*, asportando allo stadio di vescicola ottica primaria, l'abocco lentogeno, se ne ha un'altro dall'ectoderma cefalico che viene a sostituire quello asportato.

4° In *Rana esculenta*, nel secondo periodo dello stadio di neurula, cioè quando le pieghe neurali sono rialzate e solo in parte avvicinate, asportando l'abocco lentogeno se ne forma un altro sull'ectoderma cefalico che viene a trovarsi a contatto con la vescicola ottica.

Tenendo conto anche dell'esperienze del 1934 esposte nella II Nota, posso concluderè che in *Rana esculenta*, almeno per quanto riguarda la determinazione del cristallino e la possibilità di influenzarne un altro su ectoderma cefalico normalmente non lentogeno, si hanno allo stadio di neurula gli stessi fatti che nelle altre specie, completamente indagate, si hanno in stadio più avanzato.

N. P.

ERRATA-CORRIGE AL VOLUME XXIII

Nella Nota di ANTONIETTA ORRÙ:

A p. 958 nella penultima riga del testo invece di *tuorlo* leggere *guscio*.

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1936 (Anno XIV)

(Ogni Memoria e Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo)

Matematica. — *Sul comportamento al contorno di notevoli integrali analitici.* Nota⁽¹⁾ del Corrisp. U. CISOTTI.

Si consideri nel piano complesso $\zeta = \xi + iy$ un contorno s di un'area limitata e l'integrale

$$(1) \quad I_n(j) = \int_s \frac{d\zeta}{(\zeta - j)^{n+1}},$$

essendo n un numero intero ≥ 0 e intendendosi l'integrazione effettuata lungo il contorno s in senso antiorario.

È noto che se j è un punto del piano ζ fuori di s — sia interno all'area racchiusa in s , che esterno — è $I_n = 0$.

Vogliamo indagare il comportamento del predetto integrale (1) quando j appartiene a s , nell'ipotesi che in j il contorno s abbia una tangente e un cerchio di curvatura. Assumiamo il centro di curvatura come punto $\zeta = 0$ del sistema di riferimento, avente per asse reale la normale a s in j , diretta verso la convessità della curva. Con questo riferimento si ha:

$$(2) \quad j = r,$$

se r designa il raggio di curvatura. Isoliamo il punto j mediante una circonferenza di centro j e raggio $\epsilon < r$: sia s_2 l'arco di questa circonferenza, che appartiene all'area racchiusa da s e diciamo s_1 l'arco di s esterno alla detta

(1) Pervenuta all'Accademia il 6 ottobre 1936.

circonferenza e che ha per estremi le intersezioni colla stessa. I due archi s_1 e s_2 costituiscono un contorno, rispetto al quale il punto j è esterno. Essendo regolare, nel campo limitato tra s_1 e s_2 , la funzione $\frac{1}{(\zeta - j)^{n+1}}$, qualunque sia l'intero n , sarà nullo il suo integrale esteso a tutto il contorno, in base al noto teorema di Cauchy; pertanto si avrà:

$$\int_{s_1} \frac{d\zeta}{(\zeta - j)^{n+1}} = - \int_{s_2} \frac{d\zeta}{(\zeta - j)^{n+1}}.$$

Poniamo $\zeta - j = \varepsilon e^{i\alpha}$, con che si ottiene:

$$\frac{d\zeta}{(\zeta - j)^{n+1}} = \frac{i}{\varepsilon^n} e^{-in\alpha} d\sigma.$$

In un intorno di second'ordine del punto j l'arco di linea s è assimilabile all'arco della circonferenza osculatrice, per cui, chiamando 2α l'angolo che formano tra loro le due corde congiungenti il punto j coi punti estremi di s_2 , si ha

$$\cos \alpha = \frac{\varepsilon}{2r}.$$

Quindi sull'arco s_2 si ha $\pi - \alpha \leq \sigma \leq \pi + \alpha$. Per quanto precede si può scrivere

$$\int_{s_1} \frac{d\zeta}{(\zeta - j)^{n+1}} = \frac{i}{\varepsilon^n} \int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} e^{-in\sigma} d\sigma,$$

da cui risulta:

$$(3) \quad \int_{s_1} \frac{d\zeta}{(\zeta - j)^{n+1}} = \begin{cases} 2i\alpha & , \text{ per } n=0; \\ \frac{2i}{n\varepsilon^n} (-1)^n \sin n\alpha & , \text{ per } n \geq 1. \end{cases}$$

Assumiamo come definizione di $I_n(j)$, quando j appartiene al contorno s , il limite dell'integrale (3) per $\varepsilon \rightarrow 0$; risulta:

$$(4) \quad I_n(j) = \begin{cases} i\pi & , \text{ per } n=0, \\ \infty & , \text{ per } n \geq 1. \end{cases}$$

Il primo caso dà luogo al noto valore principale di Cauchy, ovverosia al teorema del semiresiduo⁽¹⁾, corrispondenti alla particolare funzione integranda

(1) HURWITZ-COURANT, *Funktionentheorie*, III Auflage, Berlin, Springer, 1929, p. 335; CISOTTI, *Sul fondamento analitico delle eccezioni al paradosso di d'Alembert, al teorema di Kutta-Joukowski e sulle azioni dinamiche sopra profili cuspidati*. Questi «Rendiconti», vol. XIII, 1^o sem., 1931, p. 161.

in discorso. In quanto al comportamento di $I_n(j)$ per $n \geq 1$, scende da (3) che, assunto $\frac{r}{\varepsilon}$ come infinito di primo ordine per $\varepsilon \rightarrow 0$, $I_n(j)$ tende a diventare infinito di ordine n quando n è dispari e infinito di ordine $n - 1$ quando n è pari; ciò scende immediatamente dalla (3) notando che

$$(5) \quad \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{sen} n\alpha = (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & \text{per } n \text{ dispari;} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\varepsilon} = \frac{n}{2r} (-1)^{\frac{n}{2} + 1}, & \text{per } n \text{ pari.} \end{cases}$$

2. Consideriamo ora la funzione

$$(6) \quad C_n(j_1) = (j_1 - j)^n \int_s^{\gamma} \frac{d\zeta}{(\zeta - j_1)^{n+1}} = (j_1 - j)^n I_n(j_1), \quad n \geq 1,$$

quando $j_1 \rightarrow j$, essendo j un punto del contorno s , prefissato e del resto qualunque. Si è già visto che l'integrale $I_n(j_1)$ tende all'infinito nel modo indicato. In quanto all'altro fattore $(j_1 - j)^n$, esso diviene infinitesimo per $j_1 \rightarrow j$. Studiamo il limite $C_n(j_1)$ quando $j_1 \rightarrow j$. A tale scopo immaginiamo j_1 appartenente all'arco s_2 , per cui risulta

$$j_1 - j = \varepsilon e^{i\lambda} \quad , \quad (j_1 - j)^n = \varepsilon^n e^{in\lambda},$$

indicando λ l'argomento che, per quanto si è visto, è compreso tra $\pi - \alpha$ e $\pi + \alpha$:

$$\pi - \alpha \leq \lambda \leq \pi + \alpha.$$

Dopo ciò si ottiene, tenuto conto di (3) e (5):

$$\lim_{j_1 \rightarrow j} C_n(j_1) = \begin{cases} 0, & \text{per } n \text{ pari;} \\ \frac{2i}{n} (-1)^{\frac{n+1}{2}} e^{in\lambda}, & \text{per } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Avendo presente la relazione (6), queste conclusioni ci permettono di dare qualche precisazione circa il comportamento dell'integrale $I_n(j_1)$ quando j_1 va a coincidere con un punto ordinario j di s : per n pari si conferma che il detto integrale diviene infinito di ordine minore di n , per n dispari l'integrale in discorso si comporta come l'espressione

$$\frac{2i}{n} (-1)^{\frac{n+1}{2}} e^{in\lambda} \frac{1}{(j_1 - j)^n}$$

quando $j_1 \rightarrow j$. Si noti che il suo modulo, $|I_n(j_1)|$, si comporta come

$$\frac{2}{n|j_1 - j|^n},$$

per $j_1 \rightarrow j$.

3. Considerando ora il caso di n pari, introduciamo la funzione

$$(7) \quad C'_n(j_1) = (j_1 - j)^{n-1} \int_s \frac{d\zeta}{(\zeta - j_1)^{n+1}} = (j_1 - j)^{n-1} I_n(j_1).$$

Riferiamoci al procedimento precedente; avendosi

$$(j_1 - j)^{n-1} = \epsilon^{n-1} e^{i(n-1)\lambda},$$

si ottiene, con facili riduzioni, e tenendo presente (3) e (5),

$$\lim_{j_1 \rightarrow j} C'_n(j_1) = \frac{i}{r} (-1)^{\frac{n}{2} + 1} e^{i(n-1)\lambda}.$$

Avuto riguardo alla (7), si può concludere che l'integrale $I_n(j_1)$ quando j_1 va a coincidere con un punto j di s , ed è n pari, diviene infinito come l'espressione

$$\frac{i}{r} (-1)^{\frac{n}{2} + 1} e^{i(n-1)\lambda} \frac{1}{(j_1 - j)^{n-1}}$$

quando $j_1 \rightarrow j$. È notevole la circostanza che il suo modulo, $|I_n(j_1)|$, diviene infinito, per $j_1 \rightarrow j$, come

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{1}{|j_1 - j|^{n-1}},$$

essendo $\frac{1}{r}$ la curvatura del contorno s nel punto j .

4. È facile ora stabilire il comportamento dell'integrale

$$\int_s \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - j_1)^{n+1}}, \quad n \geq 1,$$

in cui $f(\zeta)$ è funzione regolare entro s , contorno incluso, quando j_1 tende a un punto j di s ⁽¹⁾. Le conclusioni sono le seguenti: se n è dispari l'inte-

(1) Per $n=0$ e $j_1=j$ si trova il teorema del semiresiduo.

$$\int \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - j} = \pi i f(j).$$

Cfr. loc. cit. primi.

grale in discorso si comporta come l'espressione

$$\frac{2i}{n} (-1)^{\frac{n+1}{2}} e^{in\lambda} \frac{f(j_1)}{(j_1 - j)^n}, \quad \text{per } j_1 \rightarrow j,$$

e quindi il suo valore assoluto diviene infinito come

$$\frac{2|f(j_1)|}{n|j_1 - j|^n};$$

se n è *pari* il predetto integrale diviene infinito come l'espressione

$$\frac{i}{r} (-1)^{\frac{n}{2} + 1} e^{i(n-1)\lambda} \frac{f(j_1)}{(j_1 - j)^{n-1}},$$

per $j_1 \rightarrow j$, e il suo modulo come

$$\frac{i}{r} \cdot \frac{|f(j_1)|}{|j_1 - j|^{n-1}}.$$

5. Siamo stati indotti a questo studio particolare per l'intervento degli integrali indicati, più precisamente di integrali corrispondenti ai valori 1 e 3 di n , in alcune questioni idrodinamiche⁽¹⁾.

(1) *Un criterio di valutazione delle azioni dinamiche sopra un ostacolo circolare munito di una sorgente e immerso in una corrente traslocircolatoria.* Questi «Rendiconti», vol. XXII, 2º sem., 1935, p. 275; *Sul calcolo degli effetti di zavorra. Scritti in onore di Luigi Berzolari* (in corso di pubblicazione); *Calcolo degli effetti di zavorra relativi a una lamina rettilinea.* Questi «Rendiconti», vol. XXIII, p. 279; *Effetti di zavorra dovuti a una doppietta.* Questi «Rendiconti», vol. XXIII, 1º sem., 1936, p. 253.

Matematica. — *Sulle equazioni delle estremanti nei problemi di Mayer.* Nota⁽¹⁾ del Corrisp. L. TONELLI.

Le equazioni alle quali soddisfano le curve estremanti di un problema di Mayer, relativo ad un'equazione di uno dei due tipi

$$(1) \quad u' = F(x, y, x', y', u) \quad , \quad u' = f(x, y, y', u),$$

furono stabilite, indipendentemente dalla regola dei moltiplicatori di Euler-Lagrange, da B. Manià⁽²⁾ per il caso più generale delle curve estremanti, rispettivamente rettificabili o assolutamente continue. Il procedimento seguito dal Manià per giungere alle equazioni indicate è alquanto laborioso e, nel caso dei problemi in forma ordinaria, impone certe restrizioni dalle quali ci si può completamente liberare. Mi propongo perciò, nella presente Nota, di mostrare come, attenendosi più strettamente ai metodi da me usati nei miei *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* e nella mia Memoria *Sulle proprietà delle estremanti*⁽³⁾, si possa raggiungere lo scopo più semplicemente e più rapidamente, eliminando del tutto quelle restrizioni alle quali ho accennato. Le equazioni che stabilirò sono in forma leggermente diversa, ma perfettamente equivalenti a quelle del Manià; e la nuova forma qui ottenuta presenta qualche vantaggio in alcune questioni relative ai problemi in forma ordinaria.

I PROBLEMI IN FORMA PARAMETRICA.

1. Supporremo, in ciò che segue, che la $F(x, y, x', y', u)$ sia una funzione finita e continua, insieme con le sue derivate parziali del primo ordine, per ogni punto (x, y) di un dato campo A, per ogni coppia (x', y') di numeri non ambedue nulli e per ogni u appartenente ad un dato intervallo (finito o infinito) Δ . Supporremo, inoltre, che la F sia sempre, nel dominio ora indicato, *positivamente omogenea*, di grado 1, rispetto a x' e y' .

Chiameremo *curve ordinarie*, relative alla prima delle equazioni (1), le curve continue e rettificabili

$$\mathcal{C} : x = x(s), y = y(s) \quad , \quad 0 \leq s \leq L,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 1º ottobre 1936.

(2) B. MANIÀ, *Proprietà delle estremanti nei problemi di Mayer.* « Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa », ser. II, vol. IV, 1935, pp. 107-131.

(3) « Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa », ser. II, vol. III, 1934, pp. 213-237.

— dove s rappresenta la lunghezza dell'arco variabile di \mathcal{C} e L la lunghezza di tutta la curva — appartenenti al campo A e tali che l'equazione differenziale $u'(s) = F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), u(s))$ ammetta in quasi tutto l'intervallo $(0, L)$, una soluzione — che indicheremo con $u_{\mathcal{C}}(s)$ — assolutamente continua in tutto $(0, L)$ e soddisfacente alle condizioni che $u_{\mathcal{C}}(0)$ sia uguale ad un valore fissato u_0 di Δ e che i valori $u_{\mathcal{C}}(s)$ appartengono tutti a Δ .

Data una classe \mathcal{K} di curve ordinarie \mathcal{C} e fissata una curva \mathcal{C}_0 di \mathcal{K} , diremo che un punto P della \mathcal{C}_0 — che non sia punto terminale per la curva — è punto di indifferenza rispetto al campo A ed alla classe \mathcal{K} , se è possibile di determinare un intorno di P in modo che ogni curva ordinaria \mathcal{C} ottenuta da \mathcal{C}_0 sostituendo un qualunque suo arco appartenente all'intorno detto di P con un arco avente gli stessi punti terminali, pure appartenente a quell'intorno ed al campo A , sia ancora una curva della classe \mathcal{K} .

2. Ciò premesso; dimostriamo la seguente proposizione:

Se $\mathcal{C}_0[x = x_0(s), y = y_0(s), 0 \leq s \leq L_0]$ è una curva estremante per $u_{\mathcal{C}}(L)$ in una data classe \mathcal{K} di curve ordinarie relative alla prima delle equazioni (1), e se essa soddisfa alla condizione che i valori $u_{\mathcal{C}_0}(s)$ siano tutti interni all'intervallo Δ , ogni suo arco α_0 , i cui punti, esclusi al più quelli terminali, siano tutti interni al campo A e di indifferenza rispetto al campo A ed alla classe \mathcal{K} , verifica le due equazioni

$$(I) \quad \begin{cases} \int_0^s F_x \psi ds - \frac{d}{ds} \int_0^s F_{x'} \psi ds = c_1 (\text{cost.}), \\ \int_0^s F_y \psi ds - \frac{d}{ds} \int_0^s F_{y'} \psi ds = c_2 (\text{cost.}), \end{cases}$$

dove è

$$\psi(s) = \exp. - \int_0^s F_u(x_0, y_0, x'_0, y'_0, u_{\mathcal{C}_0}) ds.$$

Considerato uno degli archi α_0 , sia α'_0 una sua parte che non contenga nessuno dei punti terminali di α_0 e che sia sufficientemente piccola affinché esista un numero $\rho > 0$ tale che tutti i punti del piano (x, y) distanti non più di ρ da α'_0 appartengano al campo A , e che ogni curva ottenuta da \mathcal{C}_0 sostituendo α'_0 con un qualsiasi arco continuo e rettificabile, avente gli stessi punti terminali e appartenente all'intorno (ρ) di α'_0 , appartenga, qualora risulti una curva ordinaria, alla classe \mathcal{K} . Detto (s'_1, s'_2) l'intervallo parziale di $(0, L_0)$ che corrisponde all'arco α'_0 , consideriamo in (s'_1, s'_2) una qualsiasi funzione lipschitziana $\varphi(s)$, soddisfacente alle condizioni $\varphi(s'_1) = \varphi(s'_2) = 0$, e con essa formiamo la curva α'_φ definita dalle equazioni

$$x = x_0(s) + \gamma \varphi(s) \quad , \quad y = y_0(s) \quad , \quad s'_1 \leq s \leq s'_2,$$

la quale curva, per qualsiasi valore di γ , risulta continua e rettificabile e con gli stessi punti terminali di α'_o , e per $\gamma \rightarrow 0$ tende a α'_o . Perciò, e in virtù di noti teoremi sull'esistenza degli integrali delle equazioni differenziali e sulla loro continuità rispetto a parametri contenuti nell'equazione⁽¹⁾, se $\bar{\gamma}$ è un numero positivo sufficientemente piccolo, per ogni γ tale che $|\gamma| \leq \bar{\gamma}$ la curva \mathcal{C}_γ , che si ottiene da \mathcal{C}_o sostituendo in essa l'arco α'_o con α'_γ , è una curva ordinaria e appartiene alla classe \mathfrak{K} . Sempre per $|\gamma| \leq \bar{\gamma}$, è

$$u_{\mathcal{C}_\gamma}(s) = u_o + \int_0^s F(x_o + \gamma\varphi, y_o, x'_o + \gamma\varphi', y'_o, u_{\mathcal{C}_\gamma}) ds,$$

dove si è posto $\varphi(s) \equiv 0$ fuori di (s'_1, s'_2) , e perciò⁽²⁾

$$\left(\frac{\partial}{\partial \gamma} u_{\mathcal{C}_\gamma}(s) \right)_{\gamma=0} = \int_0^s \left\{ F_x \varphi + F_{x'} \varphi' + F_u \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} u_{\mathcal{C}_\gamma} \right)_{\gamma=0} \right\} ds,$$

intendendo che gli argomenti di F_x , $F_{x'}$, F_u siano $x_o(s)$, $y_o(s)$, $x'_o(s)$, $y'_o(s)$, $u_{\mathcal{C}_o}(s)$.

Derivando rispetto ad s , la precedente uguaglianza diventa un'equazione differenziale lineare del primo ordine, e si ha perciò

$$\left(\frac{\partial}{\partial \gamma} u_{\mathcal{C}_\gamma}(s) \right)_{\gamma=0} = \psi^{-1}(s) \int_0^s (F_x \varphi + F_{x'} \varphi') \psi ds.$$

E siccome, per ipotesi, \mathcal{C}_o è una estremante per $u_{\mathcal{C}}(L)$ in \mathfrak{K} , il primo membro di quest'uguaglianza deve annullarsi per $s = L_o$, e deve dunqueaversi

$$\int_0^{L_o} \{ F_x \varphi + F_{x'} \varphi' \} \psi ds = 0.$$

Dovendo essere soddisfatta quest'uguaglianza per tutte le funzioni $\varphi(s)$ del tipo indicato, ne segue, come è noto, che deve essere quasi dappertutto in (s'_1, s'_2)

$$\int_0^s F_x \psi ds - F_{x'} \psi = c_1 (\text{cost.}),$$

da cui si passa facilmente alla prima delle (I)⁽³⁾.

(1) C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*. Leipzig, 1918, p. 665 e sgg.

(2) Cfr. loc. cit. nella nota precedente.

(3) Ved. i miei *Fondamenti...*, vol. II, pp. 99-100.

In modo analogo si prova la seconda delle (I).

3. Le equazioni (I) si possono scrivere anche nella forma

$$(I') \quad \int_0^s F_x \psi ds - \psi \frac{d}{ds} \int_0^s F_{x'} ds = c_1, \quad \int_0^s F_y \psi ds - \psi \frac{d}{ds} \int_0^s F_{y'} ds = c_2.$$

Ed infatti, dalla prima delle (I) si ha che, sull'arco α_0 , vale quasi dappertutto la

$$\int_0^s F_x \psi ds - F_{x'} \psi = c_1$$

ossia

$$\psi^{-1} \int_0^s F_x \psi ds - F_{x'} = c_1 \psi^{-1}$$

e quindi anche

$$\int_0^s \left\{ \psi^{-1} \int_0^s F_x \psi ds \right\} ds - \int_0^s F_{x'} ds = c_1 \int_0^s \psi^{-1} ds$$

da cui, derivando, si ottiene la prima delle (I').

Le (I) si possono scrivere pure nella forma

$$(I'') \quad \begin{cases} \int_0^s (F_x + F_{x'} F_u) ds - \frac{d}{ds} \int_0^s F_{x'} ds = c'_1 (\text{cost.}), \\ \int_0^s (F_y + F_{y'} F_u) ds - \frac{d}{ds} \int_0^s F_{y'} ds = c'_2 (\text{cost.}), \end{cases}$$

che sono precisamente le equazioni ottenute dal Manià. Infatti, dalla prima delle (I'), scritta nella forma

$$\psi^{-1} \int_0^s F_x ds - \frac{d}{ds} \int_0^s F_{x'} ds = c_1 \psi^{-1},$$

si ha che sull'arco α_0 esiste quasi dappertutto finita la derivata seconda di $\int_0^s F_{x'} ds$. Derivando la prima delle (I') si ha allora, quasi dappertutto su α_0 ,

$$F_x \psi + F_u \psi F_{x'} - \psi \frac{d^2}{ds^2} \int_0^s F_{x'} ds = 0,$$

da cui, eliminando il fattore ψ e integrando, segue la prima delle (I'').

I PROBLEMI IN FORMA ORDINARIA.

4. Riferendoci ora alla seconda delle equazioni (1), supporremo che la funzione $f(x, y, y', u)$ sia finita e continua, insieme con le sue derivate parziali del primo ordine, per ogni punto (x, y) di un dato campo A, per ogni valore finito di y' e per ogni u appartenente ad un dato intervallo (finito o infinito) Δ . Chiameremo *curve ordinarie* relative alla seconda delle equazioni (1), le curve

$$C : y = y(x) \quad , \quad a \leq x \leq b,$$

— con $y(x)$ funzione assolutamente continua — appartenenti al campo A e tali che l'equazione differenziale $u'(x) = f(x, y(x), y'(x), u(x))$ ammetta in quasitutto (a, b) una soluzione — che indicheremo con $u_C(x)$ — assolutamente continua in tutto a (a, b) e soddisfacente alle condizioni che $u_C(a)$ sia uguale ad un valore fissato u_0 di Δ e che i valori $u_C(x)$ appartengano tutti a Δ .

5. Dimostriamo la seguente proposizione:

Supponiamo che la funzione $f(x, y, y', u)$ soddisfi alla seguente ipotesi: ad ogni parte limitata e chiusa A' del campo A e ad ogni intervallo finito e chiuso Δ' interno a Δ si possano far corrispondere due numeri maggiori di zero M e N in modo che sia, per tutti i punti (x, y) di A' , per ogni y' , per ogni u di Δ' e per tutti i φ_1 e φ_2 tali che $|\varphi_1| < M$, $|\varphi_2| < M$ e che $(x, y + \varphi_1)$ sia un punto di A e $u + \varphi_2$ un punto di Δ ,

$$(a) \quad |f_y(x, y + \varphi_1, y', u)| + |f_u(x, y + \varphi_1, y', u + \varphi_2)| \leq N \{ 1 + |y'| + |f(x, y, y', u)| \}.$$

Allora, se $C_0[y = y_0(x), a_0 \leq x \leq b_0]$ è una curva estremante per il valore finale di u_C in una data classe K di curve ordinarie relative alla seconda delle equazioni (1), e se essa soddisfa alla condizione che i valori $u_{C_0}(x)$ siano tutti interni all'intervallo Δ , ogni suo arco α_0 , i cui punti, esclusi al più quelli terminali, siano tutti interni al campo A e di indifferenza rispetto al campo A ed alla classe K⁽¹⁾, verifica l'equazione

$$(II) \quad \int_a^x f_y \psi ds - \frac{d}{dx} \int_a^x f_{y'} \psi dx = c \text{ (cost.)},$$

(1) La definizione di punto di indifferenza è analoga a quella data nel n. 1 per problemi in forma parametrica.

dove è

$$\psi(x) = \exp. - \int_a^x f_u(x, y_o, y'_o, u_{C_o}) dx,$$

a essendo l'ascissa del primo punto terminale di α_o .

Considerato uno degli archi α_o , sia α'_o una sua parte che non contenga nessuno dei punti terminali di α_o e che sia sufficientemente piccola analogamente a quanto si è detto nel n. 2. Sia (a', b') l'intervallo parziale di (a_o, b_o) su cui si proietta ortogonalmente α'_o , e osserviamo subito che, in virtù della (α), le $f_y(x, y_o(x), y'_o(x), u_{C_o}(x))$ e $f_u(x, y_o(x), y'_o(x), u_{C_o}(x))$ risultano integrabili su tutto (a_o, b_o) , perchè su tutto tale intervallo è integrabile la $f(x, y_o(x), y'_o(x), u_{C_o}(x))$.

Procedendo in modo analogo a quanto abbiamo fatto nel n. 1 della Memoria, già citata, *Sulle proprietà delle estremanti*, indichiamo, per ogni numero intero positivo n , con E_n l'insieme di tutti gli x di (a', b') in cui la derivata $y'_o(x)$ esiste finita e tale che $|y'_o(x)| \leq n$; e posto $\chi_n(x) = f_y(x, y_o(x), y'_o(x), u_{C_o}(x))\psi(x)$ indichiamo con \bar{E}_n il componente di E_n nei punti del quale E_n ha densità = 1 e $\chi_n(x)$ è la derivata del suo integrale indefinito. Per ogni $n \geq$ di un certo n_o , è $m(\bar{E}_n) = m(E_n) > (b' - a') : 2$. Fissato uno di questi n , siano x_1 e x_2 due qualsiasi punti di \bar{E}_n con $x_1 < x_2$, e scegliamo un $\bar{\delta}$ tale che $0 < \bar{\delta} < (x_2 - x_1) : 2$ e tale pure che, per ogni δ positivo e $\leq \bar{\delta}$, le misure delle parti di \bar{E}_n contenute in $(x_1, x_1 + \delta)$ e in $(x_2 - \delta, x_2)$ risultino ambedue $> \delta : 2$. Scelto un x'_1 tale che $x_1 < x'_1 < x_1 + (\delta : 2)$, ad esso corrisponde un massimo valore x'_2 tale che $x_2 - \delta < x'_2 < x_2$ e soddisfacente alla condizione che la parte $e_{n,1}$ di \bar{E}_n contenuta in (x_1, x'_1) e quella $e_{n,2}$ di \bar{E}_n contenuta in (x'_2, x_2) abbiano uguale misura positiva.

Ciò posto, definiamo la funzione $i_n(x)$ ponendola = 1 in $e_{n,1}$, = -1 in $e_{n,2}$, = 0 altrove; poniamo poi

$$\omega_n(x) = \int_{a_o}^x i_n(x) dx,$$

e consideriamo la curva

$$C_{n,t} : y = y_{n,t}(x) \equiv y_o(x) + t\omega_n(x) \quad , \quad a_o \leq x \leq b_o.$$

Per $t \rightarrow 0$, la $C_{n,t}$ tende alla C_o e perciò, se \bar{t} è un numero positivo sufficientemente piccolo, per tutti i t tali che $|t| < \bar{t}$ la $C_{n,t}$ appartiene al campo A ed è una curva ordinaria perchè dalla (α) segue, in virtù di noti teoremi sull'esistenza degli integrali delle equazioni differenziali e sulla loro continuità rispetto a parametri contenuti nell'equazione (i), l'esistenza del

(1) Ved. loc. cit., nota (1) a p. 182.

funzionale $u_{C_{n,t}}(x)$. Perciò, per \bar{t} sufficientemente piccolo e per ogni t tale che $|t| < \bar{t}$, la $C_{n,t}$ è una curva ordinaria della classe K; e procedendo col funzionale $u_{C_{n,t}}(x)$ come nel n. 2 si è fatto per $u_{C'}(s)$, si giunge alla

$$\int_{a'}^{b'} \{f_y \omega_n + f_{y'} \omega'_n\} \psi dx = 0$$

ossia alla

$$\int_{x_1}^{x_2} \{f_y \omega_n + f_{y'} \omega'_n\} \psi dx = 0,$$

da cui, proseguendo come si è fatto nel n. 1 della citata Memoria *Sulle proprietà delle estremanti*, si arriva alla (II).

OSSERVAZIONE. — La conclusione del teorema ora dimostrato sussiste indipendentemente dall'ipotesi relativa alla (α) se su tutto l'arco α_0 la funzione $y_0(x)$ è lipschitziana.

6. Analogamente a quanto si è detto nel n. 3, si ha che la (II) può scriversi nella forma

$$(II') \quad \int_a^x f_y \psi dx - \psi \frac{d}{dx} \int_a^x f_{y'} dx = c,$$

ed anche nell'altra

$$(II'') \quad \int_a^x \{f_y + f_{y'} f_u\} dx - \frac{d}{dx} \int_a^x f_{y'} dx = c' (\text{cost.}),$$

che è la forma trovata dal Manià sotto condizioni più restrittive di quelle qui poste. Per ottenere la forma (II'') si osservi che dalla (II) segue che su α_0 il prodotto $f_{y'} \psi$ (e quindi anche $f_{y'}$) è quasi dappertutto uguale ad una funzione continua in tutto (a, b) e quindi limitata.

7. Procedendo in modo analogo a quanto si è fatto nel n. 12 della Memoria più volte citata *Sulle proprietà delle estremanti* e utilizzando considerazioni analoghe a quelle già sfruttate qui in ciò che precede, si ottiene la proposizione che segue:

Supponiamo che la funzione $f(x, y, y', u)$ soddisfi alla seguente ipotesi: ad ogni parte limitata e chiusa A' del campo A e ad ogni intervallo finito e chiuso Δ' , interno a Δ , si possano far corrispondere due numeri maggiori di zero M e N, in modo che sia, per tutti i punti (x, y) di A' , per ogni y' , per ogni u di Δ' e per tutti i φ_1 e φ_2 tali che $|\varphi_1| < M$, $|\varphi_2| < M$ e che $(x + \varphi_1, y + \varphi_2)$ sia un punto di A e $u + \varphi_2$ un punto di Δ ,

$$(\alpha') \quad |f_x(x + \varphi_1, y, y', u)| + |f_u(x + \varphi_1, y, y', u + \varphi_2)| \leq N \{ 1 + |y'| + |f(x, y, y', u)| \}.$$

Allora, se $C_0[y = y_o(x), \alpha_0 \leq x \leq b_0]$ è una curva estremante per il valore finale di u_C in una data classe K di curve ordinarie relative alla seconda delle (1), e se essa soddisfa alla condizione che i valori $u_{C_0}(x)$ siano tutti interni all'intervallo Δ , ogni suo arco α_0 , i cui punti, esclusi al più quelli terminali, siano tutti interni al campo A e di indifferenza rispetto al campo A ed alla classe K, verifica l'equazione

$$(III) \quad \int_a^x f_x \psi dx - \frac{d}{dx} \int_a^x \{f - y' f_y\} \psi dx = c \text{ (cost.)},$$

dove è

$$\psi(x) = \exp. - \int_a^x f_u(u, y_o, y'_o, u_{C_0}) dx,$$

a essendo l'ascissa del primo punto terminale di α_0 .

La (III) può assumere anche le forme

$$(III') \quad \int_a^x f_x \psi dx - \psi \frac{d}{dx} \int_a^x \{f - y' f_y\} dx = c,$$

$$(III'') \quad \int_a^x \{f_x + (f - y' f_y) f_u\} dx - \frac{d}{dx} \int_a^x \{f - y' f_y\} dx = c,$$

la seconda delle quali è quella ottenuta dal Manià sotto condizioni più restrittive di quelle qui poste.

Si osservi, infine, che la conclusione del teorema dato nel presente numero sussiste indipendentemente dall'ipotesi relativa alla (α') se, su tutto l'arco α_0 , la funzione $y_o(x)$ è lipschitziana.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sull'insieme degli spazi lineari contenuti in una ipersuperficie algebrica.* Nota⁽¹⁾ di U. MORIN, presentata dal Corrisp. A. COMESSATTI.

In molti studi sulle ipersuperficie algebriche importa conoscere la dimensione massima degli spazi lineari in esse contenuti. Il computo delle costanti non risolve la questione in modo soddisfacente, come risulta anche dal caso noto delle iperquadriche. Ritengo perciò opportuna questa Nota che risolve completamente, per le ipersuperficie generali di dato ordine, l'importante problema.

1. Consideriamo un'ipersuperficie generale di ordine n di uno spazio lineare S_r , di equazione

$$(1) \quad f(x_0, x_1, \dots, x_r) \equiv \Sigma a_{i_1 i_2 \dots i_n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} = 0,$$

la Σ essendo estesa a tutte le combinazioni con ripetizione (i_1, i_2, \dots, i_n) degli indici $0, 1, \dots, r$.

Poniamo

$$(2) \quad \Xi_{i_1 i_2 \dots i_n} = a_{i_1 i_2 \dots i_n}$$

ed assumiamo, nel modo noto, le Ξ_i come coordinate di iperpiano in uno spazio lineare S_N , $N = \binom{n+r}{r} - 1$.

Ad un punto dell' S_r , considerato come punto base di un sistema lineare di ipersuperficie, corrisponde nell' S_N il centro di un'iperstella; e, in questo modo, all' S_r (punteggiato) una V_r appartenente all' S_N , di equazioni parametriche

$$(3) \quad X_{i_1 i_2 \dots i_n} = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}.$$

2. Indichiamo con W l'insieme delle ipersuperficie f di ordine n dell' S_r (o dei corrispondenti iperpiani dell' S_N) che contengono almeno uno spazio lineare S_k ($k \leq r - 1$). Alle ipersuperficie f che contengono un *dato* spazio S_k corrispondono nell' S_N gli iperpiani di una S_q -stella. Lo spazio base S_q della

(1) Pervenuta all'Accademia il 18 settembre 1936.

stella è lo spazio d'appartenenza della V_k imagine dei punti dell' S_k ed ha la dimensione $\rho = \binom{n+k}{k} - 1$ ⁽¹⁾.

Con un'omografia dell' S_r , possiamo trasformare il nostro spazio lineare S_k in uno generico. Così constatiamo che l'insieme W è un insieme algebrico irriducibile, la cui dimensione indicheremo con $N - v$. L'insieme, pure algebrico irriducibile, degli spazi S_q indicheremo con V .

3. Vogliamo calcolare la dimensione D' dell'insieme degli spazi lineari S_k contenuti in un'ipersuperficie generica dell'insieme W . Sarà

$$D' = (r - k)(k + 1) + N - \binom{k+n}{k} - N + v,$$

cioè

$$(4) \quad D' = (r - k)(k + 1) - \binom{k+n}{k} + v.$$

Se $v = 0$, cioè se una f generica che contenga un S_k è una f generica dell' S_r , la dimensione dell'insieme dei suoi spazi lineari S_k è data da

$$(5) \quad D = (r - k)(k + 1) - \binom{k+n}{k}.$$

Invece $v > 0$ significa che una f generica non contiene spazi lineari S_k . Ciò accadrà certamente quando il numero D dato dalla (5) è negativo, ma potrebbe anche verificarsi per D positivo o nullo. Ci proponiamo di classificare i casi in cui questa circostanza si verifica.

4. Ricordiamo perciò il seguente lemma ⁽²⁾.

Si abbia un sistema V algebrico irriducibile di S_q di un S_N di dimensione $\rho + 1 + i$, ($i \geq 0$), tale che in un iperpiano generico dell' S_N non sia contenuto alcuno spazio S_q del sistema. Allora gli infiniti S_q del sistema V contenuti in un particolare iperpiano Ξ (purchè generico per l'insieme W degli iperpiani Ξ) passano tutti per un medesimo spazio S_{j-1} ($j > 0$).

5. Dalla condizione $D \geq 0$ (n. 3) segue

$$(6) \quad r \geq k + \frac{(n+k) \cdots (n+1)}{(k+1)!}.$$

Supponiamo che pur essendo soddisfatta questa condizione necessaria, una f generica non contenga spazi lineari S_k . Allora l'insieme V (algebrico

(1) Vedi la nota (1) al n. 5.

(2) U. MORIN, *Sul sistema degli S_k totali di un complesso lineare di S_k* . « Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova », to. V, 1934, n. 3.

irriducibile) degli spazi S_q (n. 2) si trova nelle condizioni del lemma precedente (n. 4). Gli infiniti spazi S_q dell'insieme V che stanno in un iperpiano dell' S_N condotto genericamente per un S_q generico di V passano dunque tutti per un punto almeno.

Supponiamo ora inoltre

$$(7) \quad r \geq 2k + 1.$$

In questa ipotesi due S_q generici di V appartengono ad infiniti iperpiani dell' S_N , quindi devono essere incidenti. Ora ciò è assurdo poiché le condizioni perché una f contenga due determinati S_k non incidenti sono evidentemente linearmente indipendenti⁽¹⁾.

Dunque se oltre ad essere soddisfatta la (6) lo è pure la (7), una f generica di ordine n dell' S_r contiene spazi lineari S_k , e la dimensione di questo insieme è dato dalla (5). Se invece pur essendo soddisfatta la (6) non lo è la (7), il caso è ancora dubbio e verrà ora esaminato direttamente.

6. Per $n = 1$ la (5) dà la dimensione dell'insieme degli S_k contenuti in un S_{r-1} .

Per $n \geq 3$ la diseguaglianza (7) è, come si verifica agevolmente, una conseguenza della (6) e non vi sono quindi eccezioni all'applicazione della (5).

Rimane da considerare il caso $n = 2$ in cui è noto⁽²⁾ che la (7) è condizione necessaria e sufficiente perché un'iperquadrica contenga spazi S_k . Possiamo dunque concludere col seguente teorema:

Perchè un'ipersuperficie algebrica generale di un S_r , di ordine n , contenga spazi lineari S_k il numero

$$D = (r - k)(k + 1) - \binom{n + k}{k}$$

deve essere positivo o nullo. Questa condizione è pure sufficiente, e allora D è la dimensione dell'insieme degli S_k dell'ipersuperficie, fatta eccezione soltanto del caso $n = 2$, $\frac{3k+2}{2} \leq r \leq 2k$, in cui pur essendo $D \geq 0$ l'iperquadrica non contiene spazi lineari S_k .

(1) Le condizioni perchè l' S_k (della piramide fondamentale delle coordinate in S_n) dei vertici O_0, O_1, \dots, O_k appartenga ad una f sono che nella (1) siano zero tutti gli $\binom{n+k}{k}$ coefficienti dei termini che contengono soltanto le variabili x_0, x_1, \dots, x_k . Così perchè la f contenga inoltre l' S_k dei vertici $O_{k+1}, O_{k+2}, \dots, O_{2k+1}$ dovranno essere zero i coefficienti dei termini che contengono soltanto le variabili $x_{k+1} x_{k+2}, \dots, x_{2k+1}$.

(2) E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*. Casa ed. G. Principato, Messina, 1923. p. 150.

Matematica. — *Sulla unirazionalità delle ipersuperficie algebriche del quarto ordine.* Nota⁽¹⁾ di U. MORIN, presentata dal Corrisp. A. COMESSATTI.

L'ipersuperficie cubica generale di uno spazio lineare S_r si dirà *unirazionale* per il fatto che le coordinate del suo punto generico si possono esprimere come funzioni razionali, non razionalmente invertibili, di $r - 1$ parametri⁽²⁾; e lascio in questa definizione da parte il problema della eventuale razionalità della varietà stessa⁽³⁾. In questa Nota verifico che anche l'*ipersuperficie generale del quarto ordine, quando $r \geq 7$, è unirazionale*.

Si presentano così, e rimangono insolute, le due seguenti questioni, delle quali la seconda mi sembra notevolmente interessante.

La unirazionalità delle ipersuperficie quartiche, che notoriamente non sussiste per $r = 3$ (perchè una superficie unirazionale in base al teorema di Castelnuovo è anche razionale), si verifica appena a partire da $r = 7$ oppure da valori più bassi della dimensione?

L'ipersuperficie generale di qualunque ordine è, per r opportunamente grande, unirazionale, oppure questa proprietà si arresta per il quarto ordine, o eventualmente per un certo ordine superiore?

1. Consideriamo un'ipersuperficie algebrica F , generale del quarto ordine, di uno spazio lineare S_r , con $r \geq 7$. Nella F sono allora contenuti degli spazi lineari S_2 (piani) e la dimensione dell'insieme di questi piani è $D = 3(r - 7)$ ⁽⁴⁾.

(1) Pervenuta all'Accademia il 18 settembre 1936.

(2) Questo fatto esplicitamente noto per $r = 4$ si estende facilmente, e in diversi modi, ad r qualunque. Presa una retta g della V_{r-1}^3 , sia λ_{r-1} coordinata non omogenea (in g) del punto generico A della g . L' S_{r-1} tangente alla V_{r-1}^3 in A , la taglia secondo una V_{r-2}^3 col punto doppio A . Questa V_{r-2}^3 si può rappresentare, con proiezione da A , birazionalmente mediante $r - 2$ parametri non omogenei $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-2}$ e con funzioni razionali anche di λ_{r-1} , coordinata dal centro di proiezione. Si ha così la cercata rappresentazione unirazionale della V_{r-1}^3 mediante gli $r - 1$ parametri non omogenei $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-2}, \lambda_{r-1}$; unirazionale per il fatto che per un punto generico della V_{r-1}^3 passano due S_{r-1} ad essa tangentì in un punto della retta g .

(3) Su questo classico problema si consideri la comunicazione fatta da G. FANO al Congresso internazionale dei Matematici in Bologna (1928), «Atti», to. IV.

(4) U. MORIN, *Sull'insieme degli spazi lineari contenuti in una ipersuperficie algebrica*. Questo volume dei «Rendiconti», p. 188.

Sia π un piano della F ed O_r un punto di π . Siano inoltre ξ_{r-2}, ξ_{r-1} coordinate non omogenee del punto generico Y di π . L' S_{r-1} tangente ad F in Y taglia la F secondo una V_{r-2}^4 col punto doppio Y . L'insieme delle generatrici del cono quadrico K tangente alla V_{r-2}^4 in Y si può riferire birazionalmente ad $r-3$ parametri non omogenei ξ_1, \dots, ξ_{r-3} , mediante funzioni razionali anche dei coefficienti di K (e quindi delle coordinate ξ_{r-2}, ξ_{r-1} del vertice Y) in quanto conosciamo la generatrice YO_r del cono quadrico K .

Una generatrice g di K ha in comune con la F , fuori del punto Y , un solo punto P . Le coordinate di P si possono calcolare dunque con funzioni razionali delle coordinate di g , cioè, con riferimento a quanto abbiamo detto sopra, di ξ_1, \dots, ξ_{r-3} e ξ_{r-2}, ξ_{r-1} . Abbiamo così una rappresentazione unirazionale delle F mediante gli $r-1$ parametri non omogenei ξ_1, \dots, ξ_{r-1} ; unirazionale per il fatto che per un punto generico P della F passano, come verrà precisato dalla trattazione analitica che segue, sei coni K .

2. Veniamo alla trattazione analitica. L'equazione della F sia

$$F_x \equiv F(x_0, x_1, \dots, x_r) = 0$$

ed il piano π della F sia il piano $O_0O_1O_2$ della piramide fondamentale delle coordinate in S_r .

Il cono K taglia l'iperpiano fisso di equazione $x_0 = 0$ in una quadrica per O_r , la cui equazione dipende razionalmente da $Y(y_0, y_1, y_2)$ e la cui rappresentazione parametrica è razionalmente possibile essendo noto O_r . Cominciamo pertanto a trovare la rappresentazione del punto generico di questa quadrica.

Si prenda un punto generico Z dell'iperpiano Γ di equazione $x_0 = 0$ e si determinino le intersezioni della retta YZ

$$(1) \quad x_0 = \lambda y_0, \quad x_1 = \lambda y_1 + \mu \zeta_1, \quad x_2 = \lambda y_2 + \mu \zeta_2, \quad x_i = \mu \zeta_i \quad (i = 3, 4, \dots, r)$$

con la F . Posto, col solito significato della potenza simbolica

$$(2) \quad \Delta_{\zeta}^b F_y \equiv \frac{(4-b)!}{4!} \left(\frac{\partial F}{\partial y_0} \zeta_0 + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_r} \zeta_r \right)^{(b)}$$

si ha lo sviluppo di Joachimsthal

$$(3) \quad F(x_0, x_1, \dots, x_r) \equiv 4 \lambda^3 \mu \Delta_{\zeta}^1 F_y + 6 \lambda^2 \mu^2 \Delta_{\zeta}^2 F_y + \\ + 4 \lambda \mu^3 \Delta_{\zeta}^3 F_y + \mu^4 F_{\zeta} = 0$$

in cui si è tenuto conto che $F_y = 0$.

Se ora vogliamo scegliere Z in modo che la retta YZ abbia con F *tre intersezioni nel punto Y*, dovrà essere

$$(4) \quad \Delta_{\zeta}^1 F_y = 0, \quad \Delta_{\zeta}^2 F_y = 0.$$

La prima delle (4) rappresenta in Γ , nelle variabili ζ_1, \dots, ζ_r un iperpiano S_{r-2} che passa per la retta $O_1 O_2$, intersezione di Γ con π . Possiamo riferire questo S_{r-2} a dei parametri omogenei $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-2}$.

$$(5) \quad \zeta_i = \varphi_i(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-2})$$

e disporre in modo che il punto O_1 corrisponda ai valori dei parametri $(1, 0, \dots, 0)$, le φ_i essendo naturalmente funzioni lineari omogenee delle λ e razionali nei coefficienti, cioè funzioni razionali di y_0, y_1, y_2 .

Sostituendo le (5) nelle (4) la prima sarà dunque identicamente soddisfatta e la seconda

$$(6) \quad \Delta_{\zeta}^2 F_y \equiv \Phi(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-2}) = 0$$

rappresenta nelle λ un'iperquadrica, di cui fa parte l'elemento $(1, 0, \dots, 0)$. Potremo perciò rappresentare birazionalmente la Φ mediante i parametri non omogenei $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-3}$,

$$(7) \quad \lambda_i = \psi_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-3}) \quad (i = 0, 1, \dots, r-2)$$

le ψ_i essendo funzioni razionali anche dei coefficienti della Φ , cioè funzioni razionali anche di y_0, y_1, y_2 .

Facciamo le posizioni

$$(8) \quad y_0 = 1, \quad y_1 = \xi_{r-2}, \quad y_2 = \xi_{r-1}.$$

Le (7) sostituite nelle (5), tenuto conto delle (8) e che sia le φ_i che le ψ_i sono funzioni razionali anche di y_0, y_1, y_2 , danno le

$$(9) \quad \zeta_i = Z_i(\xi_1, \dots, \xi_{r-3}, \xi_{r-2}, \xi_{r-1})$$

le Z_i essendo funzioni razionali delle ξ . La sostituzione delle (9) nella (3) dà luogo alla equazione lineare in λ, μ

$$(10) \quad 4\lambda\Delta_{\zeta}^3 F_y + \mu F_{\zeta} \equiv \lambda G(\xi_1, \dots, \xi_{r-1}) - \mu H(\xi_1, \dots, \xi_{r-1}) = 0,$$

con G e H funzioni razionali di ξ_1, \dots, ξ_{r-1} .

I valori di λ, μ ricavati dalla (10) e sostituiti nelle (1) ci forniscono la cercata rappresentazione parametrica della F

$$(11) \quad \begin{cases} x_0 = H \\ x_1 = H\xi_{r-2} + GZ_1 \\ x_2 = H\xi_{r-2} + GZ_2 \\ x_i = GZ_i \end{cases} \quad (i = 3, 4, \dots, r).$$

Lé (11) forniscono una rappresentazione unirazionale della F perché per un punto generico della F passa più di una retta che ha con la F un contatto tripunto in un punto del piano π . Infatti, se nelle (4) interpretiamo y_0, y_1, y_2 come incognite e le z_i come coordinate di un punto generico della F (la sostituzione della prima delle (1) con $x_0 = \lambda y_0 + \mu z_0$ non modifica la scrittura dei successivi sviluppi), abbiamo un sistema di un'equazione di terzo grado con una di secondo grado (come si verifica facilmente privo di soluzioni fisse e multiple⁽¹⁾), cioè le rette cercate sono sei.

Possiamo anche dire che le (11) rappresentano birazionalmente la F sopra un'involuzione del sesto ordine di un S_{r-1} .

(1) Se il sistema avesse una soluzione fissa, a questa dovrebbe corrispondere un punto triplo della F. E che non vi sono soluzioni multiple risulta dal caso particolare $F_x \equiv (x_0^3 - x_1^3)x_r + (x_0^2 - x_2^2)x_r^2$ e $z_0 = \dots = z_{r-1} = 0$, in cui il sistema (4) diviene $y_0^3 - y_1^3 = 0, y_0^2 - y_2^2 = 0$ ed ha sei soluzioni distinte.

Matematica. — *Invariante topologici relativi ai punti uniti delle trasformazioni regolari fra varietà sovrapposte.* Nota⁽¹⁾ di B. SEGRE, presentata dal Socio F. SEVERI.

Consideriamo una trasformazione \mathcal{T} regolare di una V_n in sé, ossia una trasformazione rappresentabile esprimendo le coordinate interne $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ di un punto P' (variabile in una certa regione) di V_n , come funzioni dotate di derivate prime continue delle coordinate (x_1, x_2, \dots, x_n) del punto P di V_n di cui P' è l'omologo; e supponiamo (per semplicità) che \mathcal{T} ammetta su V_n un punto unito O nel quale il suo jacobiano non si annulli, ciò che notoriamente assicura la biunivocità della \mathcal{T} nell'intorno di O .

È facile verificare per via analitica che i coefficienti, e quindi pure le radici, della seguente equazione algebrica in λ :

$$(1) \quad \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial x'_1}{\partial x_1}\right)_O - \lambda & \left(\frac{\partial x'_1}{\partial x_2}\right)_O & \cdots & \left(\frac{\partial x'_1}{\partial x_n}\right)_O \\ \left(\frac{\partial x'_2}{\partial x_1}\right)_O & \left(\frac{\partial x'_2}{\partial x_2}\right)_O - \lambda & \cdots & \left(\frac{\partial x'_2}{\partial x_n}\right)_O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial x'_n}{\partial x_1}\right)_O & \left(\frac{\partial x'_n}{\partial x_2}\right)_O & \cdots & \left(\frac{\partial x'_n}{\partial x_n}\right)_O - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

non dipendono dalle coordinate inizialmente scelte su V_n , e perciò forniscono n numeri invarianti di fronte alle trasformazioni topologiche regolari di V_n .

Questo risultato può forse ritenersi noto, quantunque — che io sappia — finora esso non sia stato esplicitamente enunciato; tanto meno mi consta, poi, che dei suddetti invarianti si conosca un'interpretazione geometrica che ne ponga adeguatamente in luce la proprietà d'invarianza, quale appunto io espongo nella presente Nota. In essa indico in pari tempo alcune delle molteplici applicazioni di geometria differenziale che ne conseguono, lasciando per brevità al Lettore la cura di sviluppare le non difficili dimostrazioni; ulteriori applicazioni alla geometria algebrica, verranno fatte in lavori successivi.

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1936.

1. È intanto senza restrizione lecito supporre che V_n sia (una porzione di) un S_n proiettivo, potendoci sempre ridurre a tal caso col rappresentare (comunque) regolarmente V_n su S_n [p. es. effettuando un'opportuna proiezione o, ancora più semplicemente, interpretando le (x) come coordinate curvilinee in S_n]. Poichè, com'è ben noto e come meglio preciseremo nel numero successivo, una trasformazione topologica regolare di un S_n in sè opera omograficamente nell'intorno del 1° ordine di una qualunque sua coppia di elementi omologhi, basterà dare un'interpretazione geometrica della (1) — inerente all'intorno del 1° ordine del punto O — la quale abbia carattere proiettivo.

Incominciamo a tal fine coll'osservare che, nelle ipotesi ammesse, la τ subordina una proiettività Ω non degenere fra le direzioni omologhe uscenti da O, di cui (1) è precisamente l'equazione caratteristica; dunque, poichè la definizione di Ω ha carattere intrinseco, i mutui rapporti fra le radici di quell'equazione risultano intanto degli *invarianti assoluti* di τ in O, definibili in modo noto come *birapporti* ⁽¹⁾.

Per stabilire l'invarianza delle singole radici suddette, fissiamone una, λ_i , che potrà esser qualunque se τ è analitica, ma che supporremo reale qualora la τ si ammetta definita solo nel campo reale; e sia r_i una retta per O unita nella Ω , che corrisponda alla radice $\lambda = \lambda_i$ della relativa equazione caratteristica (1), e che — per quanto sopra — può supporsi reale se τ opera soltanto fra punti reali. Consideriamo inoltre nell'intorno di O un qualsiasi punto P di S_n , che poi faremo tendere ad O in guisa che la retta OP abbia per limite r_i .

Detti P' e P'' rispettivamente l'omologo di P secondo τ ed il trasformato di P' mediante la τ , il *birapporto* formato dagli iperpiani proiettanti i punti O, P' , P'' , P da un S_{n-2} fisso sghembo con r_i ammette il limite $-\lambda_i$, quando P tende ad O nel modo suindicato e comunque sia stato scelto quell' S_{n-2} . Si può anche dire (evitando così la considerazione di P''), che $+\lambda_i$ è il limite del *birapporto* determinato dai tre iperpiani che proiettano da S_{n-2} i punti P' , P, O e da un quarto iperpiano, non passante per O, fissato arbitrariamente per S_{n-2} .

Il numero λ_i , di cui testè abbiamo assegnate due diverse interpretazioni geometriche che ne provano l'invarianza topologica, verrà denominato il *coefficiente di dilatazione di τ in O secondo la direzione unita r_i* .

2. Gli sviluppi del n. 1 forniscono già integralmente il risultato voluto, se si esclude il caso (che solo può presentarsi per n pari) in cui la τ sia definita unicamente nel campo reale e la (1) non ammetta alcuna radice reale. Un altro semplice significato geometrico delle radici della (1)

(1) Cfr., p. es., E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, 2^a ed. (Messina, Principato, 1923), p. 81.

— valido senza eccezioni — si ottiene in base alle seguenti considerazioni, che in pari tempo provano la non esistenza di ulteriori invarianti topologico-differenziali del 1° ordine.

Due trasformazioni regolari di un S_n in sè, τ e Θ , si diranno fra loro equivalenti nell'intorno (del 1° ordine) di un comune punto unito O , quando la trasformazione $\tau \cdot \Theta^{-1}$ subordina l'identità nella stella di centro O , ammettendo in O coefficiente di dilatazione unitario secondo tutte le direzioni; questa nozione di equivalenza, di manifesto carattere invariantivo, gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. Ciò premesso, si può enunciare che:

Presi in S_n una qualunque trasformazione topologica (regolare), esiste ivi una ed una sola omografia che ad essa equivalga nell'intorno di un dato suo punto unito O , e che inoltre ammetta come unito un iperpiano ω non passante per O arbitrariamente assegnato. Gli n invarianti assoluti di tale omografia — ai quali notoriamente si può dare il significato di bipartiti⁽¹⁾ — risultano indipendenti dall'iperpiano ω fissato, e non sono altro che le radici dell'equazione in λ considerata in principio.

Ne consegue in modo ovvio che:

Ogni invariante topologico-differenziale del 1° ordine della data trasformazione, inherente al punto unito O , risulta funzione degli n invarianti suddetti.

3. In relazione ai coefficienti di dilatazione in un punto unito di una trasformazione, sussistono le interessanti proprietà espresse dal seguente teorema:

Supponiamo che una trasformazione topologica τ di S_n , avente un punto unito O , sia tale che l'omografia da essa subordinata nella stella di centro O ammetta due diverse direzioni unite, r_1 ed r_2 , reali se τ è definita solo nel campo reale; e denotiamo rispettivamente con λ_1 e con λ_2 i coefficienti di dilatazione di τ in O secondo quelle direzioni. Una curva \mathcal{L} qualsiasi di S_n contenente O , che abbia in questo punto r_1 come tangente ed $r_1 r_2$ come piano osculatore, è mutata da τ in una curva \mathcal{L}' passante per O ed ivi (non solo tangente alla r_1 ; ma) osculante il piano $r_1 r_2$; l'invariante di SEGRE⁽²⁾ inherente alle curve \mathcal{L} ed \mathcal{L}' — dotate in O di tangente e piano osculatore comuni — non dipende da queste, e risulta sempre uguale a $\lambda_1^2 : \lambda_2$.

Scambiando nell'ultimo enunciato gli uffici di r_1 ed r_2 si ottiene una interpretazione geometrica del rapporto $\lambda_1^2 : \lambda_2$, la quale — insieme alla precedente relativa a $\lambda_1^2 : \lambda_2$ — fornisce nuove definizioni possibili per λ_1 e per λ_2 .

(1) Ved., p. es., E. BERTINI, loc. cit.

(2) Cfr. p. es. in proposito, anche per ulteriori indicazioni bibliografiche, B. SEGRE, Sugli elementi curvilinei che hanno comuni le origini ed i relativi spazi osculatori. Questi « Rendiconti », ser. 6°, to. XXII, 1935, p. 392.

4. I risultati dianzi esposti comportano naturalmente un vastissimo campo di applicazione; ed ora daremo alcuni esempi in proposito.

Consideriamo dapprima — fra due varietà ad n dimensioni V_n e V'_n — due trasformazioni topologiche regolari, τ e Θ , le quali associno ad un dato punto O di V_n un medesimo punto O' di V'_n . La trasformazione $\tau \cdot \Theta^{-1}$ muta allora manifestamente V_n in sè lasciando fisso il punto O , e perciò ammette in O i noti n invarianti topologici (nn. 1, 2), ai quali pure si giunge — com'è subito visto — col procedimento che da qui si deduce scambiando in pari tempo V_n e V'_n , τ e Θ^{-1} . Si ottiene così che:

In corrispondenza ad una coppia di elementi omologhi in due date trasformazioni topologiche (regolari) operanti fra le stesse varietà V_n , V'_n , esistono n e solo n invarianti topologico-differenziali del 1^o ordine (generalmente indipendenti), la cui interpretazione geometrica discende da quanto precede. Qualora V_n e V'_n siano entrambe varietà riemanniane, ad uno dei suddetti invarianti (e precisamente al prodotto delle radici della relativa equazione algebrica in λ) può attribuirsi il significato metrico di rapporto fra le densità delle due corrispondenze, inerenti alla loro coppia comune⁽¹⁾.

La prima parte del precedente enunciato può, in particolare, venir applicata al caso in cui V_n sia un S_n punteggiato e V'_n sia un S'_n d'iperpiani; si hanno in tal guisa n invarianti topologici, concernenti due trasformazioni dualistiche fra S_n , S'_n dotate di una coppia comune: ed uno di essi può anche ora venir espresso metricamente (nell'ipotesi che S_n ed S'_n siano spazi euclidei) come rapporto fra le densità delle corrispondenze dualistiche nella coppia comune (su ciò cfr., p. es., la Nota testé citata). Quest'ultimo rapporto è stato recentemente considerato dal TERRACINI, il quale — sotto certe ipotesi restrittive — ne ha assegnato una interpretazione proiettiva assai diversa e meno semplice della nostra⁽²⁾.

5. Date in uno spazio proiettivo S_{n+1} due ipersuperficie \mathcal{A} , \mathcal{A}' aventi in comune un punto semplice O ed il relativo iperpiano tangente ω , che supponiamo non abbia in O contatto stazionario né coll'una né coll'altra ipersuperficie, stabiliamo fra (gl'intorni di O su) esse il riferimento in cui si corrispondono due punti i cui iperpiani tangentì si taglino su di un iperpiano fisso π , scelto comunque in S_{n+1} purchè distinto da ω . Proiettando \mathcal{A} ed \mathcal{A}' su ω , da un punto P arbitrario di S_n non situato su questo iperpiano, si ottiene ivi una corrispondenza τ che manifestamente

(1) Per la nozione di densità di cui qui si fa uso, ved. B. SEGRE, *Invarianti differenziali relativi alle trasformazioni puntuali e dualistiche fra due spazi euclidei*. In corso di stampa nei «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo».

(2) Ved. A. TERRACINI, *Densità di una corrispondenza di tipo dualistico, ed estensione dell'invariante di Mehmke-Segre*. «Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino», to. 71, 1936, p. 310, nn. 7-9.

ammette il punto O come unito, e che — nelle ipotesi ammesse — risulta topologica regolare nell'intorno di O.

Si verifica tosto che gli n invarianti topologici di τ in O non dipendono né da π né da P, ond'essi costituiscono altrettanti *invarianti proiettivi di contatto* (del 2° ordine) di \mathcal{A} e \mathcal{A}' , che così risultano pure interpretati geometricamente. Dal punto di vista analitico, introdotte in S_{n+1} coordinate proiettive non omogenee $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ in modo che \mathcal{A} ed \mathcal{A}' si rappresentino con equazioni della forma

$$x_{n+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

l'equazione algebrica in λ — che colle sue radici (o coi mutui rapporti dei coefficienti) fornisce gli n invarianti suddetti — si scrive semplicemente uguagliando a zero il determinante:

$$\left| \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right)_O - \lambda \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \right)_O \right|_{i, k = 1, 2, \dots, n}.$$

Se \mathcal{A} ed \mathcal{A}' ammettono in O lo stesso cono quadrico asintotico, le n radici della precedente equazione risultano fra loro tutte uguali, onde si ottiene un solo *invariante proiettivo di contatto del 2° ordine*; questo è già stato considerato ed assai semplicemente interpretato dal BOMPIANI per $n = 2$, ossia nel caso particolare delle superficie⁽¹⁾. Sempre limitatamente a questo caso, ma nell'ipotesi che le due superficie non abbiano nel punto di contatto le medesime tangenti asintotiche, i due *invarianti* relativi sono stati precedentemente ottenuti da M. MASCALCHI seguendo una via del tutto diversa, che implicitamente suppone l'analiticità delle due superficie⁽²⁾. Infine, per n qualunque, il prodotto delle radici dell'equazione in λ dianzi considerata non è altro che l'*invariante di MEHMKE-SEGRE generalizzato*, di cui A. TERRACINI (nel n. 10 del suo lavoro citato) ha assegnato un'interpretazione proiettiva non molto dissimile dalla nostra, valida però solo nell'ipotesi che le \mathcal{A} , \mathcal{A}' ammettano in O due coni quadrici asintotici distinti.

6. Segnaliamo da ultimo una nuova elegante definizione geometrica possibile per un noto *invariante proiettivo di una congruenza di rette* di S_3 .

Fissato un generico raggio r di una data congruenza, siano A, B i fuochi ed α , β i piani focali relativi, talchè le due falde focali \mathcal{A} e \mathcal{B} della congruenza passeranno ordinatamente per i punti A e B, avendo in essi α e β come piani tangentì. Presa una qualunque delle ∞^4 quadriche (non

(1) Cfr. E. BOMPIANI, *Determinazioni proiettivo-differenziali relative ad una superficie dello spazio ordinario*. «Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino», to. 59, 1924, p. 409, § 4.

(2) Cfr. M. MASCALCHI, *Un nuovo invariante proiettivo di contatto di due superficie*. «Bollettino dell'Un. Mat. Ital.», to. 13, 1934, p. 45.

specializzate) contenenti r che ammettono rispettivamente β , α come piani tangentи in A , B , consideriamo la superficie \mathfrak{A}^* trasformata di \mathfrak{A} nella polarità individuata da quella; è chiaro che le superficie \mathfrak{B} ed \mathfrak{A}^* passano per B avendo ivi ambedue β come piano tangente, e perciò ammettono un certo invariante proiettivo di contatto di MEHMKE-SEGRE (n. 5).

Ebbene, si constata che questo invariante non muta al variare della quadrica inizialmente scelta, od anche scambiando in ciò che precede gli uffici delle superficie \mathfrak{A} e \mathfrak{B} : esso è appunto l'invariante proiettivo della data congruenza relativo ad r , al quale alludevamo in principio di questo numero.

Il suddetto invariante trovasi già (a prescindere da un fattore numerico inessenziale) in E. WAELSCH⁽¹⁾ e P. BUZANO⁽²⁾, che ne diedero definizioni di natura metrica; altre sue interpretazioni geometriche di carattere proiettivo, ma piuttosto complicate, trovansi invece in recenti lavori di E. BOMPIANI⁽³⁾ ed A. TERRACINI⁽⁴⁾.

(1) E. WAELSCH, *Zur Infinitesimalgeometrie der Strahlenkongruenzen und Flächen*. «Sitzungsber. der Wiener Akad. d. Wiss.», to. 100, 1891, p. 158; *Sur le premier invariant différentiel projectif des congruences rectilignes*. «Comptes Rendus», to. 118, 1894, p. 736.

(2) P. BUZANO, *Invariante proiettivo di una particolare coppia di elementi di superficie*. «Bollettino dell'Un. Mat. Ital.», to. 14, 1935, p. 93.

(3) E. BOMPIANI, *Invarianti proiettivi di una particolare coppia di elementi superficiali del 2º ordine*. «Bollettino dell'Un. Mat. Ital.», to. 14, 1935, p. 237.

(4) A. TERRACINI, *Invariante di Mehmke-Segre generalizzato e applicazione alle congruenze di rette*. «Bollettino dell'Un. Mat. Ital.», to. 15, 1936, p. 109; l'invariante J di questo A. (che, p. es., vale 16 volte l'invariante I del BUZANO) risulta precisamente uguale a quello del testo, pur essendo introdotto in modo completamente diverso.

Matematica. — *Un complemento al principio di corrispondenza, per le corrispondenze a valenza zero sulle curve algebriche.* Nota I⁽¹⁾ di B. SEGRE, presentata dal Socio F. SEVERI.

In base ad un risultato generale da me recentemente conseguito, una corrispondenza algebrica, τ , a punti uniti distinti sopra una curva algebrica, C , ammette certi coefficienti di dilatazione relativi ai suoi punti uniti, i quali risultano invarianti di fronte alle trasformazioni birazionali di C e possono venir definiti nel modo seguente. Si consideri su di un ramo \mathcal{L} determinato di C un punto U , che — come punto di \mathcal{L} — conti una sola volta nel gruppo dei punti uniti di τ , e si fissi comunque un parametro x che permetta di rappresentar \mathcal{L} al modo solito mediante serie di potenze; la τ ammette allora nell'intorno di U su \mathcal{L} un'equazione della forma $X = X(x)$, X denotando l'omologo di x : ebbene, il valore che $\frac{dX}{dx}$ assume in U risulta invariantivamente legato alla corrispondenza τ , ed è appunto il coefficiente di dilatazione di questa inherente al punto unito $U^{(2)}$.

È interessante rilevare che, sotto ipotesi molto late, i suddetti invarianti non sono fra loro indipendenti. Precisamente, come ci proponiamo di mostrare in questa Nota,

Se una corrispondenza sopra una curva algebrica — di indici (α, β) ed a valenza zero — ammette $\alpha + \beta$ punti U uniti distinti, gli $\alpha + \beta$ suoi coefficienti κ di dilatazione risultano tutti $\neq 1$ e verificano la:

$$(1) \quad \sum_{(U)} \frac{1}{1 - \kappa} = \beta.$$

Questa proposizione presenta un'estrema generalità nel caso delle curve razionali, in quanto ogni corrispondenza algebrica sopra una curva razionale può dirsi a valenza zero.

Il risultato si estende alle corrispondenze a valenza zero con punti uniti multipli, quando anche per tali punti uniti si introducano opportuni invarianti birazionali: il che verrà fatto nella successiva Nota II. In un altro lavoro, poi, il teorema suddetto riceverà eleganti applicazioni alla geometria sopra una superficie algebrica con due fasci di curve unisecantisi.

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1936.

(2) Cfr. B. SEGRE, *Invarianti topologici relativi ai punti uniti delle trasformazioni regolari fra varietà sovrapposte*. Questo volume dei «Rendiconti», p. 195, dove è pure data una semplice interpretazione geometrica di quell'invariante.

I. È intanto senza restrizione lecito riferirsi ad una curva \mathcal{C} piana, a singolarità ordinarie, di cui sia n l'ordine e.

$$(2) \quad f(x, y) = 0$$

l'equazione. Una corrispondenza τ a valenza zero di \mathcal{C} in sé, può notoriamente venir rappresentata mediante un solo legame algebrico

$$(3) \quad \theta(x, y ; X, Y) = 0$$

fra le coordinate (x, y) ed (X, Y) di due punti omologhi di \mathcal{C} ⁽¹⁾; denotiamo rispettivamente con a, b i gradi di θ in quei due gruppi di variabili, e supponiamo che i punti uniti di τ su \mathcal{C} contino ciascuno una volta sola nel relativo gruppo dei punti uniti.

Se nella (3) si fissano genericamente le x, y { le X, Y }, in modo beninteso che il punto (x, y) : il punto (X, Y) stia su \mathcal{C} , si ottiene — nelle X, Y { nelle x, y } come coordinate correnti — un'equazione rappresentante una curva \mathfrak{B} d'ordine b { una curva \mathfrak{A} d'ordine a }; questa incontra la \mathcal{C} in nb { in na } punti, dei quali $\beta\{\alpha\}$ — variabili col punto inizialmente scelto su \mathcal{C} — sono precisamente i trasformati di questo mediante τ { mediante τ^{-1} }, mentre i rimanenti $nb - \beta\{\alpha\}$ { i rimanenti $na - \alpha\}$ cadono in punti fissi di \mathcal{C} . Dunque, denotando con P il generico di questi punti fissi pensato come origine di un ramo determinato di \mathcal{C} , e dette rispettivamente $\mu \geq 0$ e $v \geq 0$ le molteplicità d'intersezione in P di tale ramo colle curve \mathfrak{A} e \mathfrak{B} , risulta:

$$(4) \quad \alpha = na - \sum_{(P)} \mu \quad , \quad \beta = nb - \sum_{(P)} v.$$

Sottoponendo eventualmente la \mathcal{C} ad un'opportuna trasformazione omografica preventiva, si può sempre far sì che tale curva ammetta n punti all'infinito distinti, e che nessuno di questi ultimi e nessuno dei punti di diramazione della funzione algebrica

$$(5) \quad y = y(x),$$

definita implicitamente dall'equazione (2) di \mathcal{C} , coincida con uno dei punti P suddetti o con uno dei punti U uniti di τ . Poichè τ è a valenza zero, sopra \mathcal{C} la $\theta(x, y ; x, y)$ non si annulla identicamente e, per quanto sopra, ammette $n(a + b)$ zeri tutti al finito; ciascun punto P figura fra tali zeri $\mu + v$ volte, ed i rimanenti $\alpha + \beta$ zeri sono precisamente i punti U uniti di τ , per ipotesi distinti fra loro, di cui tuttavia non resta escluso

(1) Ved., p. es., F. SEVERI, *Trattato di geometria algebrica*, to. I, parte 1^a (Bologna, Zanichelli, 1926), p. 199.

che qualcuno possa cadere in un punto P (nel qual caso un punto siffatto verrebbe a contare $\mu + \nu + 1$ volte, e non di più, nel suddetto gruppo di zeri) ⁽¹⁾.

2. Prendiamo sulla riemanniana \mathcal{R} ad n fogli della funzione algebrica (5) un qualunque punto proprio O(x_0, y_0) che non sia di diramazione, e che quindi risulti origine di un ramo \mathcal{L} determinato, rappresentabile esprimendo y come serie di potenze di $x - x_0$ (convergente per $|x - x_0|$ sufficientemente piccolo). Se in $\theta(x, y; X, Y)$ si sostituisce al posto di y questa serie di potenze di $x - x_0$, al posto di Y la medesima serie di potenze di $X - X_0$ (con $X_0 = x_0$), e se infine vi si pone $x = x_0 + (x - x_0)$, $X = X_0 + (X - X_0)$, si ottiene una serie di potenze di $x - x_0$, $X - X_0$:

$$(6) \quad \theta = (x - x_0)^\mu [b(X - X_0)^\nu + k(X - X_0)^{\nu+1} + \dots] + \\ + (x - x_0)^{\mu+1} [l(X - X_0)^\nu + \dots] + \dots;$$

qui μ e ν sono due interi ≥ 0 , i puntini stanno per indicare termini di grado superiore a quelli che li precedono, e non escludiamo che qualcuno dei coefficienti scritti possa annullarsi.

O non è intanto certamente né un punto P né un punto U, quando sia $\mu = \nu = 0$, $b \neq 0$. Se invece è $\mu > 0$ oppure $\nu > 0$, O risulta un punto P, per il quale i numeri μ e ν hanno precisamente il significato geometrico specificato nel n. 1. Finalmente O cade in un punto U (che in pari tempo è o non è un punto P secondochè $\mu + \nu > 0$ oppure $\mu = \nu = 0$), quando sia $b = 0$; in quest'ultimo caso l'equazione (3) di τ nell'intorno di O su \mathcal{L} si scrive:

$$k(X - X_0) + l(x - x_0) + \dots = 0,$$

onde l'ipotesi che O conti una volta sola nel gruppo dei punti uniti di τ si traduce nella diseguaglianza $k + l \neq 0$ (secondo la quale k ed l non possono risultar nulli contemporaneamente). Introducendo il coefficiente di dilatazione di τ in O:

$$\kappa = \left(\frac{dX}{dx} \right)_0 = -\frac{l}{k},$$

quella diseguaglianza si muta nella

$$\kappa \neq 1.$$

3. Posto per abbreviare $F = f(X, Y)$, consideriamo la funzione razionale

(1) Ved. F. SEVERI, op. cit., n. 72.

$$R(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\theta, F)}{\partial(X, Y)} \\ F_Y \cdot \theta \end{bmatrix}_{X=x, Y=y},$$

di cui ora vogliamo calcolare i residui nei singoli punti della superficie di RIEMANN \mathcal{R} .

È intanto subito visto che, nelle ipotesi ammesse al n. 1, in un qualunque punto di diramazione di \mathcal{R} la suddetta funzione $R(x, y)$ ha residuo uguale a zero.

Consideriamo in secondo luogo su \mathcal{R} un qualsiasi punto proprio $O(x_0, y_0)$, non di diramazione, per il quale conserviamo le notazioni del n. 2. Tenuto conto della (6), in un intorno di O su \mathcal{R} risulta:

$$(7) \quad [\theta]_{X=x, Y=y} = h(x - x_0)^{\mu + \nu} + (k + l)(x - x_0)^{\mu + \nu + 1} + \dots$$

ed inoltre

$$\begin{aligned} \frac{I}{F_Y} \frac{\partial(\theta, F)}{\partial(X, Y)} &= \frac{\partial\theta}{\partial X} - \frac{\partial\theta}{\partial Y} \frac{F'_X}{F'_Y} = \frac{d}{dX} [\theta]_{Y=y}(x) = \\ &= (x - x_0)^\mu [hv(X - X_0)^{\nu-1} + k(\nu + 1)(X - X_0)^\nu + \dots] + \\ &+ (x - x_0)^{\mu+1} [lv(X - X_0)^{\nu-1} + \dots] + \dots, \end{aligned}$$

donde si ricava:

$$(8) \quad \left[\frac{I}{F_Y} \frac{\partial(\theta, F)}{\partial(X, Y)} \right]_{X=x, Y=y} = hv(x - x_0)^{\mu+\nu-1} + \\ + [(k + l)\nu + k](x - x_0)^{\mu+\nu} + \dots$$

Le (7), (8) mostrano che la funzione $R(x, y)$ è regolare in O . se è $\nu = 0, h \neq 0$. In caso contrario essa ammette in O un polo del 1° ordine, il cui residuo vale:

$$\frac{hv}{h} = v \quad \text{se è } \nu = 0, h \neq 0,$$

oppure:

$$\frac{(k + l)v + k}{k + l} = v + \frac{I}{I - x} \quad \text{se è } \nu \geq 0, h = 0,$$

ed allora rispettivamente O è un punto P od un punto U (a sua volta sovrapposto ad un punto P per $v > 0$).

Nell'intorno di un punto all'infinito di \mathcal{R} la funzione $\theta(x, y; X, Y)$ può, similmente, venir sviluppata in una serie di potenze di $I : x$, $I : X$ (convergente per $|x|$ ed $|X|$ sufficientemente grandi); più precisa-

mente, mettendo solo in evidenza il termine di grado più basso in quelle due variabili, in virtù delle ipotesi fatte al n. 1 risulta:

$$\theta = cx^a X^b + \dots \quad \text{con } c \neq 0.$$

Ne consegue:

$$(9) \quad [\theta]_{X=x, Y=y} = cx^{a+b} + \dots$$

ed inoltre

$$\frac{\partial}{\partial Y} \frac{\partial(\theta, F)}{\partial(X, Y)} = \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \theta}{\partial Y} \frac{F'_X}{F'_Y} = \frac{d}{dX} [\theta]_{Y=y(x)} = bc x^{a+b-1} + \dots,$$

dove si ricava:

$$(10) \quad \left[\frac{\partial}{\partial Y} \frac{\partial(\theta, F)}{\partial(X, Y)} \right]_{X=x, Y=y} = bc x^{a+b-1} + \dots$$

Le (9), (10) mostrano che la funzione $R(x, y)$ ammette sempre uno zero del 1° ordine in ciascuno degli n punti all'infinito di \mathcal{R} , con residuo $-b$.

Scrivendo che — a norma di un classico teorema — è nulla la somma dei residui di $R(x, y)$ in tutti i punti (al finito ed all'infinito) di \mathcal{R} , si ottiene:

$$\sum_{(v)} \frac{-b}{1-x} + \sum_{(p)} v - nb = 0;$$

e, usufruendo della seconda equazione (4), da qui tosto si deduce la formula (1) preannunciata.

OSSERVAZIONE I. — Applicando la (1) alla trasformazione inversa τ^{-1} , ne risulta l'uguaglianza che si trae dalla (1) ponendo in essa $1:x$ in luogo di x ed α in luogo di β ; è subito visto, però, che il nuovo legame fra gli invarianti x non differisce da quello espresso dalla (1).

OSSERVAZIONE II. — Nel caso che τ abbia carattere involutorio (ossia coincida colla τ^{-1}), è $\alpha = \beta$ e tutti i coefficienti x di dilatazione sono uguali a -1 ; la formula (1) appare allora di verifica immediata, in quanto vien solo a significare che i punti uniti di τ sono in numero di $2\beta (= \alpha + \beta)$.

Une réctification nécessaire⁽¹⁾ de la Note: *L'opérateur S — opérateur de Schrödinger*, di R. L. GOMES, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA. (Questi « Rendiconti », vol. XXI, ser. 6^a, 1^o sem., fasc. 3, febbraio, 1935, pp. 179-186).

Dans cette Note, me proposant de résoudre l'équation de Schrödinger

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + H\Psi = 0,$$

le H étant dépendant du temps t , j'en avait proposé la solution

$$\Psi = e^{-\frac{2\pi i}{h} St} \varphi$$

en représentant par φ une déterminée fonction indépendante du temps et par S un opérateur vérifiant le système

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} = H \\ SH - HS = 0: \end{array} \right.$$

le système (3) de cette Note.

Il arrive, pourtant — comme l'a si bien remarqué M. Le prof. B. L. van der Waerden, « Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete », II. Band, Heft 4, S. 184 (8. Juli 1935) — que ce système n'est pas toujours possible (die Bedingungen (3) sich nicht immer befriedigen lassen).

Il suffit, par exemple, de faire, avec M. Le prof. van der Waerden, $H = H_0 + H_1 t$, les coefficients H_0 et H_1 n'étant pas commutables ($H_0 H_1 \neq H_1 H_0$), pour avoir immédiatement

$$HS - SH \neq 0$$

d'où l'impossibilité du système (3).

Cette réctification faite, je m'excuse devant M. Le prof. van der Waerden et tous les lecteurs de ces « Rendiconti », de ne pas l'avoir pris en considération au plus tôt, mais je suis été tout ce temps dans un hôpital, à Lisbonne, en complète inactivité.

RUY LUIS GOMÉS.

(1) Pervenuta all'Accademia il 18 settembre 1936.

Chimica (Chimica fisica). — *Sullo spettro Raman del tiofene.* Nota⁽¹⁾ di G. B. BONINO e R. MANZONI-ANSIDEI, presentata dal Socio M. BETTI.

Già nel 1934 avevamo pubblicati alcuni spettri Raman del tiofene, del furano e di alcuni loro derivati⁽²⁾. Precedentemente a noi aveva eseguito lo spettro Raman del tiofene Venkateswaran⁽³⁾ il quale pubblicava per lo spettro Raman del tiofene 10 righe Raman mentre noi nel citato lavoro indicavamo 11 righe sicure. Alcune difficoltà emerse nell'esecuzione di ulteriori studi nostri sui raffronti tra spettro Raman e spettro ultrarosso nel tiofene, iniziati per indagare più a fondo il problema della simmetria molecolare del tiofene stesso ci hanno portato a ripetere lo spettro Raman di questo composto eterociclico impiegando più forti eccitazioni e tempi di posa assai più lunghi. E ciò anche a rischio di ottenere delle righe corrispondenti a toni superiori o a frequenze di combinazione o anche a frequenze « proibite » dato che, come recentemente ha dimostrato Buchheim⁽⁴⁾, con delle forti sovraesposizioni è possibile ottenere nello spettro Raman dei liquidi anche delle cosiddette righe « proibite ». Ed invero le regole di selezione pare che allo stato liquido non siano rigorosamente osservate per cause inerenti ai forti campi intermolecolari che si verificano in tale stato. Abbiamo usato per queste ricerche tiofene purissimo sintetico essicato e frazionato nel vuoto con tutte le cure che sono necessarie in queste ricerche e su cui già ci siamo intrattenuti in altri lavori. Il tiofene veniva direttamente distillato nei microtubi Raman che erano immediatamente saldati alla lampada.

Nella tabella seguente diamo i valori delle righe Raman da noi trovate in queste ultime esperienze nella colonna 1). Nella colonna 2) sono date le frequenze corrispondenti ai massimi di assorbimento ultrarosso dati da Coblenz⁽⁵⁾. Nella colonna 3) vengono riportate le righe Raman pubblicate nel 1933 da Wenkateswaran⁽⁶⁾ con i relativi gradi di depolarizzazione riferiti nella colonna 4). Nella colonna 5) indichiamo i valori delle posizioni delle righe Raman da noi pubblicati nel 1934 per l' α -metiltiofene. Come al solito indichiamo con numeri fra parentesi le intensità apprezzate delle diverse righe Raman. Per i massimi ultrarossi indichiamo con dd. = debolissimi, ff. = fortissimi, f. = forte, d. = debole.

(1) Pervenuta all'Accademia il 9 settembre 1936.

(2) « Zeits. Phys. Chem. » (B), 25, 327 (1934).

(3) « Ind. J. Phys. », 5, 145 (1930).

(4) « Phys. Zeits. », 36, 694 (1935). Ved. pure KOHLRAUSCH, « Ibid. », 37, 58 (1936).

(5) *Investig. of Infrared Spectra.* « Carnegie Inst. » (1905).

(6) « Phil. Mag. », 15 (n. 97), 274 (1933).

TABELLA I.

Spettri Raman e ultrarossi del tiofene.

| 1) Tiofene Raman Bonino-Manzoni 1936 | 2) Tiofene ultrarosso Coblenz 1905 | 3) Tiofene Raman Venkateswaran 1933 | 4) Tiofene Raman, gradi depolarizzazione Venkateswaran 1933 | 5) α -Metiltiofene Raman Bonino-Manzoni 1934 |
|---|---|--|---|--|
| 3113 (8) | { 3100 (f.) | 3116 (6) | 0.3 | 3115 ($2\frac{1}{2}$) |
| 3085 (4) | | 3083 (3) | 0.9 | 3086 ($1\frac{1}{2}$) |
| 3003 ($1\frac{1}{2}$) | — | — | — | — |
| 2920 (o dif.) | — | — | — | 2922 (3) |
| — | — | — | — | 2862 (1) |
| — | 1590 (dd.) | — | — | — |
| — | 1540 (f.) | — | — | 1540 ($1\frac{1}{2}$) |
| 1495 (oo) | — | — | — | — |
| 1436 (o) | — | — | — | 1439 ($6\frac{1}{2}$) |
| 1405 (8) | { 1390 (ff.) | 1409 (6) | 0.3 | 1377 (2) |
| 1357 (8) | | 1361 (4) | 0.1 | 1350 (2) |
| — | 1240 (ff.) | — | — | 1240 ($1\frac{1}{2}$) |
| 1131 (o) | — | — | — | 1153 (o) |
| 1079 (8) | 1076 (ff.) | 1081 (4) | 0.3 | 1075 ($3\frac{1}{2}$) |
| 1031 (8) | 1030 (ff.) | 1035 (5) | 0.1 | 1033 (o) |
| — | — | — | — | 969 ($2\frac{1}{2}$) |
| 898 (o) | 901 (dd.) | — | — | — |
| 867 ($1\frac{1}{2}$) | — | 870 (1) | 0.9 | — |
| 832 (10) | 834 (ff.) | 835 (6) | 0.1 | 847 (3) |
| 749 (2) | — | 752 (1) | 0.9 | 739 ($3\frac{1}{2}$) |
| 692 (o) | — | 690 (o) | 0.8 | 661 (4) |
| — | — | — | — | — |
| 606 (4) | — | 607 (4) | 0.2 | — |
| 566 (o) | — | — | — | 556 ($1\frac{1}{2}$) |
| — | — | — | — | 546 ($2\frac{1}{2}$) |
| 452 (1) | — | 452 (o) | 0.7 | — |
| — | — | — | — | 301 ($2\frac{1}{2}$) |
| — | — | — | — | 237 (3) |

DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

a) *Paragone con le ricerche precedenti.* — La forte sovraesposizione ha portato in questo nuovo spettro Raman del tiofene ad apparire alcune deboli righe che non erano emerse negli spettri precedenti. Queste nuove deboli righe non hanno però una grande importanza. Noteremo fra queste l'apparire di una riga leggermente diffusa a 2920 cm^{-1} (intensità 0) e di una a 1436 cm^{-1} (intensità 0). In queste posizioni (in cui appaiono forti righe negli spettri dei composti contenenti gruppi CH_2 e CH_3) anche lo spettro Raman del pirrolo ottenuto con forti sovraesposizioni mostra qualche riga⁽¹⁾ che fu recentemente interpretata da Stern come dovuta al CH_2 della forma pirroleninica⁽²⁾. Il fatto però che anche lo spettro Raman del tiofene come pure quello del benzolo⁽³⁾ mostri in analoghe condizioni tali righe ci fa apparire la interpretazione di Stern come ancora discutibile. Tutte le righe Raman già da noi trovate nel 1934 nello spettro del tiofene sono pienamente confermate da queste nostre nuove esperienze.

b) *Paragone con lo spettro ultrarosso.* — Coblenz pubblicò nel 1905 uno spettro ultrarosso del tiofene che è riprodotto nella colonna 2) della tabella (le frequenze non sono riportate al vuoto). Il paragone fra spettro Raman e spettro ultrarosso richiede per il tiofene una speciale discussione. Mentre l'effetto Raman mostra 1 e 2 righe riferibili a oscillazioni di valenza del CH (una polarizzata a 3113 ed una depolarizzata a 3085 cm^{-1}) lo spettro ultrarosso mostra un solo massimo a 3100 cm^{-1} circa. Però da ciò non si può trarre la conclusione empirica che una delle due righe Raman suddette corrisponda ad una oscillazione «proibita» in ultrarosso perchè la differenza tra i due massimi eventuali nello spettro ultrarosso a 3113 e 3085 cm^{-1} corrisponderebbe nelle condizioni sperimentali usate da Coblenz ad uno spostamento di 30 secondi di cerchio nella rotazione del prisma dello spettrometro (v. citazione⁽⁴⁾ p. 143 e 151) mentre la larghezza delle fessure spettrometriche corrisponde per i due strumenti usati da Coblenz in queste ricerche rispettivamente a 2 primi e a 4 primi. Perciò i due massimi non potevano essere facilmente risolti. Così mentre lo spettro Raman del tiofene mostra due righe intense e polarizzate rispettivamente a 1405 e a 1357 cm^{-1} , lo spettro ultrarosso mostra un solo massimo forte di assorbimento a 1390 cm^{-1} circa. Anche in questo caso i due massimi dissterebbero nelle condizioni sperimentali di Coblenz in questa zona (piccolo spettrometro) di 2 primi di cerchio, mentre la larghezza delle fessure spettrometriche corrisponde a 4 primi di cerchio. Perciò non si può concludere

(1) Ved., per es., «La ricerca Scientifica», ser. II, a. VII, vol. I, nn. 11-12 (1936).

(2) «Zeits. f. Phys. Chem.» (B), 37, 403 (1936).

(3) «Zeits. f. Phys.», 86, 321 (1933).

sicuramente se una delle due suddette frequenze Raman manchi nell'assorbimento ultrarosso oppure se la banda ultrarossa a 1390 cm^{-1} intermedia alle due frequenze Raman 1405 e 1357 contenga, non risolti, i due massimi corrispondenti a due eventuali frequenze attive in ultrarosso. Altre indagini sono in corso onde chiarire meglio questo punto. Negli spettri del pirrolo accade un fatto analogo tanto che in un primo tempo abbiamo registrato come inattiva in ultrarosso la frequenza a 1382 cm^{-1} che appare in effetto Raman. Anche per il pirrolo un'analogia discussione verrà presto da noi pubblicata.

Viceversa le due intense righe Raman polarizzate a 1079 e 1031 cm^{-1} sono ambedue registrate con forti bande nell'assorbimento ultrarosso. Ma in questo caso la risoluzione delle due bande nello spettro ultrarosso era possibile senza dubbio a Coblenz in quanto i due massimi (come si deduce dalle tabelle di Coblenz) distano di 15 minuti primi di cerchio, mentre la fessura spettrometrica corrisponde a 4 primi. Come è noto a chi ha pratica in queste questioni di spettrometria ultrarosso il salgemma (di cui consta il prisma di Coblenz nel rilevamento dello spettro da noi indicato nella tabella) ha un minimo di dispersione verso i $3-4 \mu$.

La forte riga polarizzata dello spettro Raman del tiofene a 832 cm^{-1} trova riscontro in una forte banda ultrarossa con massimo a 834 cm^{-1} circa. Il paragone dei due spettri non è più possibile a frequenze minori dato che mancano i dati di assorbimento ultrarosso.

Un fatto importante per le discussioni ulteriori è quello che nell'assorbimento ultrarosso compaiono due forti massimi rispettivamente a 1540 e 1240 cm^{-1} che non trovano nessuna corrispondenza nell'effetto Raman nemmeno tra le righe deboli che si ottengono sovraesponendo fortemente gli spettri. Però nello spettro Raman dell' α -metiltiofene le due righe ricompaiono con notevole intensità.

Questo fatto merita una certa attenzione poiché porta ad alcune difficoltà nell'attribuire alla molecola del tiofene la solita simmetria che gli competerebbe per l'ordinaria formula chimica con la quale la si rappresenta. Infatti pure partendo dalla classica formula del tiofene (fig. 1) nel caso più

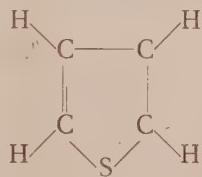


Fig. 1.

generale e considerando piana la molecola si dovrebbe attribuire alla stessa la simmetria C_{2v} costituita cioè da un asse binario di simmetria C_2 passante per l'etero atomo e da due piani di simmetria contenenti l'asse binario (un

piano σ_z è il piano della molecola e l'altro σ_y un piano perpendicolare al precedente che taglia la molecola in due parti simmetriche). Le caratteristiche di simmetria delle oscillazioni e le loro regole di selezione sarebbero date in tale caso dalla tabella seguente:

TABELLA II.

| C_2 | σ_y | σ_z | | Raman | Ultrarosso |
|----------------|----------------|----------------|-------|---------------|------------|
| simmetrica | simmetrica | simmetrica | A_1 | polarizzata | attiva |
| " | antisimmetrica | antisimmetrica | A_2 | depolarizzata | inattiva |
| antisimmetrica | " | simmetrica | B_1 | " | attiva |
| " | simmetrica | antisimmetrica | B_2 | " | " |

Per maggiori dettagli sulle regole di selezione in effetto Raman rinvendo ai lavori di Placzek⁽¹⁾. Altri particolari sull'applicazione alla molecola del tiofene verranno pubblicati in un prossimo lavoro.

Dalle regole di selezione suddette ne verrebbe che tutte le oscillazioni polarizzate in effetto Raman sono attive in assorbimento ultrarosso. Perciò una dimostrazione sicura della simmetria C_{2v} per la molecola del tiofene non si può ancora dare in quanto, come si è detto, alcune righe corrispondenti a oscillazioni simmetriche sono così vicine da non esser possibile la loro risoluzione nelle condizioni sperimentali di Coblenz nello spettro ultrarosso. Possiamo però notare che alle frequenze Raman polarizzate rispettivamente a 832, 1035, 1081 cm^{-1} corrispondono nettamente dei massimi di assorbimento ultrarosso e al posto delle due frequenze Raman polarizzate 1361 e 1409 cm^{-1} si ha una forte banda ultrarossa.

Ma le stesse regole di selezione per la simmetria C_{2v} ci segnalano che tutte le frequenze attive nello spettro ultrarosso devono essere attive in effetto Raman. Viceversa abbiamo i due notevoli massimi di assorbimento ultrarosso a 1540 e 1240 cm^{-1} che non hanno corrispondenti nello spettro Raman del tiofene, mentre compaiono nello spettro Raman dell' α -meltiolfene per la cui molecola si dovrà presumere certamente una simmetria inferiore a quella del tiofene non sostituito.

Questa grave difficoltà ci lascia ancora in dubbio sulla simmetria da assegnare alla molecola del tiofene. Occorrerebbe per procedere oltre sia approfondire le indagini teoriche sui possibili modelli attribuibili alla molecola del tiofene, sia allargando il materiale sperimentale relativo agli spettri ultrarossi per il tiofene e derivati. E ciò dimostra la nuova necessità che

(1) PLACZEK, *Rayleigh Streuhung und Raman-Effekt*. Leipzig, 1934.

si presenta nello studio della struttura molecolare di poter conoscere un più ampio materiale sperimentale nell'assorbimento ultrarosso. La semplice considerazione degli spettri Raman del tiofene può mostrare dei punti di appoggio per l'ipotesi di una simmetria molecolare concordante presso a poco con quella comunemente data alla molecola del tiofene dalle ordinarie formule chimiche (a parte la questione dei doppi legami tra C e C). Un più approfondito paragone con lo spettro d'assorbimento ultrarosso come abbiamo visto in questa Nota, ci porta invece ancora a delle difficoltà. Sarebbe perciò desiderabile, in linea generale, poter completare ed integrare oggi i molti dati sperimentali conosciuti nell'effetto Raman dei nuclei eterociclici a carattere aromatico con la conoscenza degli spettri ultrarossi dato che in questo campo il materiale sperimentale a disposizione è ancora esiguo e d'altra parte però ne è indispensabile la conoscenza per poter inquadrare con spirito fisico alcuni problemi fondamentali di struttura molecolare. Se i mezzi non ci mancheranno speriamo di portare un contributo sperimentale anche in questo senso. Nel frattempo in prossimi lavori uno di noi riprenderà la più approfondita discussione della simmetria molecolare del tiofene.

Chimica (Chimica fisica). — *Sulla presenza dell'idrogeno molecolare nelle macchie del Sole*⁽¹⁾. Nota I⁽²⁾ di G. PICCARDI, presentata dal Corrisp. L. ROLLA.

Partendo dall'equazione generale seguente, rappresentante l'equilibrio di dissociazione di una molecola biatomica simmetrica:

$$\log K = -\frac{5041 \cdot D}{T} + \frac{3}{2} \log T + \log \left(1 - e^{-\frac{1.432 \cdot \omega}{T}} \right) + \\ + 6.1 + \log \frac{(G_a)^2}{G_m} + \frac{1}{2} \log \frac{(M_a)^2}{M_m} - 2 \log r$$

(D = energia di dissociazione (in volta), ω = frequenza fondamentale di vibrazione (in cm⁻¹), r = distanza di equilibrio dei due atomi (in Å), M_a e M_m = massa atomica e massa molecolare, G_a e G_m = pesi statistici dei termini elettronici dell'atomo e della molecola, 6.1 = costante chimica)

ed introducendovi i dati relativi alla molecola H₂⁽³⁾

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Firenze e nel R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri.

(2) Pervenuta all'Accademia il 28 settembre 1936.

(3) W. JEVONS, *Report on Band-Spectra of Diatomic Molecules*. Cambridge, 1932.

($D = 4.465$ volta, $\omega = 4371 \text{ cm}^{-1}$, $r = 0.749 \text{ \AA}$,

$G_a = 2$, $G_m = 1$, $M_a = 1$, $M_m = 2$)

P. Swings⁽¹⁾ calcola per $T = 5000^\circ$, temperatura approssimativa di una macchia solare⁽²⁾, il valore della costante K relativo all'equilibrio $H_2 \rightleftharpoons 2 \cdot H$ ottenendo:

$$K = \sim 5 \cdot 10^7.$$

Tenendo conto delle condizioni di pressione esistenti nello strato invertente delle macchie solari, egli trova, in base al valore soprascritto, che la pressione parziale dell'idrogeno molecolare nelle macchie stesse è dell'ordine del 10^{-12} atm., cioè praticamente nulla.

Fondandosi su questo dato teorico lo Swings dichiara dimostrata l'insistenza della molecola H_2 nelle macchie solari.

Ora, nel caso dell'equilibrio $H_2 \rightleftharpoons 2 \cdot H$ esistono classiche esperienze⁽³⁾, condotte entro vastissimi limiti di temperatura e di pressione⁽⁴⁾, le quali hanno permesso di stabilire con precisione, secondo ben noti procedimenti termodinamici (dai quali derivano si può dire tutte le formule usate in astrofisica per la ionizzazione e la dissociazione) la seguente espressione di K in funzione di T (Langmuir⁽⁵⁾):

$$\log K = -\frac{21.200}{T} + 1.765 \log T - 9.85 \cdot 10^{-5} \cdot T - 0.256$$

alla quale io ricorsi, come alla più perfetta, quando volli stabilire se si doveva o no ritenere presente la molecola H_2 nelle macchie solari⁽⁶⁾.

Fatti i debiti calcoli ho potuto constatare facilmente che i valori numerici di K forniti dalla formula dello Swings non sono neanche lontanamente raffrontabili con quelli sperimentalì, rappresentati dalla formula di Langmuir. Basti dire che per $T = 5000^\circ$ il valore reale della costante K è circa 35 mentre secondo lo Swings è $\sim 5 \cdot 10^7$, cioè un milione di volte più grande. Anche a temperature più basse i valori teorici di K si mantengono presso a poco un milione di volte più grandi di quelli reali.

Fatta questa constatazione mi sembra inutile confutare oltre la « dimostrazione teorica » offerta dallo Swings.

(1) P. SWINGS, « Bull. Acad. Roy. Belgique », p. 132, 1934.

(2) Superiore di circa 300° a quella generalmente ammessa.

(3) I. LANGMUIR, « Zeitschr. f. Elektr. », 20, 498, 1914; T. ISNARDI, « Zeitschr. f. Elektr. », 21, 405, 1915; I. LANGMUIR, « Zeitschr. f. Elektr. », 23, 217, 1917; I. LANGMUIR, « Ind. Eng. Chemistry », 19, 667, 1927.

(4) Fra 800° e 3500° K di temperatura e fra 1 e 10^{-5} atm. di pressione.

(5) I. LANGMUIR, « Ind. Eng. Chemistry », 19, 967, 1927.

(6) G. PICCARDI, « Memorie della Società Astronomica Italiana », 4, 1, 1929.

Mi è doveroso ricordare a questo riguardo che il Russell⁽¹⁾, trasformando e riducendo alla forma seguente, praticissima per il calcolo numerico:

$$\log K = A - \frac{I}{2} \log T + \frac{B}{T} \quad (A, B \text{ costanti})$$

la formula di Gibson e Heitler⁽²⁾

$$\ln K = \frac{D}{kT} + \frac{3}{2} \ln \frac{\pi m kT}{h^2} - \ln \frac{8\pi^2 I}{h^2} + \ln \left(1 - e^{-\frac{hv}{kT}} \right) + \ln 2 + 2 \ln \cdot g$$

(D = potenziale di dissociazione, I = momento d'inerzia della molecola, m = massa atomica, v = frequenza limite di vibrazione, g = peso dello stato fondamentale dell'atomo).

la cui validità era stata pienamente confermata sui dati sperimentali relativi all'equilibrio $J_2 \rightleftharpoons 2 \cdot J$, trova, nel caso dell'idrogeno⁽³⁾:

$$\log K = 4.59 + \frac{I}{2} \log T - \frac{23.580}{T}.$$

Questa espressione di K in funzione di T dà risultati numerici concordanissimi con quelli sperimentali, a differenza della formula dello Swings, come appare dalla seguente tabella:

| T° | Log K | | |
|------|----------|---------|------------|
| | LANGMUIR | RUSSELL | SWINGS (1) |
| 1000 | 17.7 | 18.5 | 12.8 |
| 2000 | 6.8 | 6.5 | 0.5 |
| 3000 | 2.5 | 2.5 | 4.5 |
| 4000 | 0.4 | 0.5 | 6.5 |
| 5000 | - 1.5 | 1.7 | 7.7 |

(1) La curva $\log K$, T dei valori dello SWINGS è sovrapponibile a quella dei valori del RUSSELL con una semplice traslazione di 6 unità.

Ciò costituisce veramente un brillante successo della teoria.

Tanto i dati sperimentali quanto l'espressione del Russell (la quale, come ho accennato, si fonda su di una formula controllata dall'esperienza)

(1) H. N. RUSSELL, « Astr. Jour. », 79, 281, 1934.

(2) G. E. GIBSON e W. HEITLER, « Zeitschr. f. Phys. », 49, 465; 1928.

(3) Adottando i soliti dati relativi alla molecola H_2 (W. JEVONS, loc. cit.).

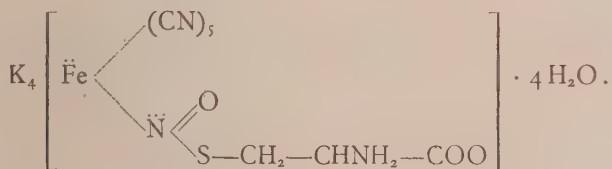
portano ad ammettere la presenza di ingenti quantità di idrogeno molecolare nelle macchie solari. Lo stesso Russell afferma che nel sole, macchie e disco, la molecola più abbondante è H₂.

Dal punto di vista chimico-fisico nessuna riserva è accettabile riguardo all'esistenza della molecola H₂ nelle macchie solari.

Per quanto riguarda la parte spettroscopica, identificazione ed interpretazione, seguirà una Nota a parte.

Chimica. — *Sulla reazione cromatica fra nitroprussiato e glutatione⁽¹⁾.* Nota⁽²⁾ di G. SCAGLIARINI e G. AVONI, presentata dal Socio M. BETTI.

In una breve comunicazione ed in una Nota precedente venne da uno di noi⁽³⁾ chiarita la costituzione del complesso colorato che si genera nella reazione fra nitroprussiato e cisteina, al quale venne attribuita la formula:



Questa reazione, come è noto, è però data da molti altri composti contenenti il gruppo SH e perciò, per quanto meno stabilmente, anche dal glutatione ridotto, che accompagna la cisteina in molti tessuti animali.

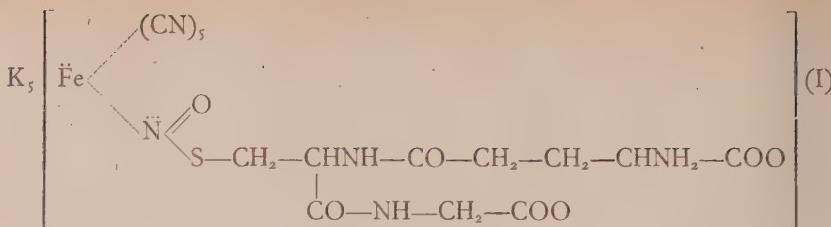
In considerazione dell'importanza che al glutatione si va oggi attribuendo nei processi biologici di ossidazione (respirazione cellulare), tanto che esso viene chiamato dal Meyerhof « corpo respiratorio », ci parve perciò interessante approfondire anche lo studio della reazione cromatica fra glutatione e nitroprussiato.

Essendo il glutatione ridotto una cisteinil-glutaminil-glicina, era logico pensare che, col nitroprussiato in ambiente alcalino per potassa caustica, dovesse dare, collo stesso meccanismo della cisteina (loc. cit.), un prodotto della probabile costituzione:

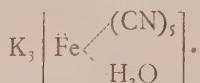
(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della Università di Ferrara.

(2) Pervenuta all'Accademia il 28 settembre 1936.

(3) « Atti del V Congresso Nazionale di Chimica pura ed applicata », p. 546. Sardegna, maggio-giugno 1935; « Giornale di Biologia industriale, agraria ed alimentare », vol. VI, 1936.



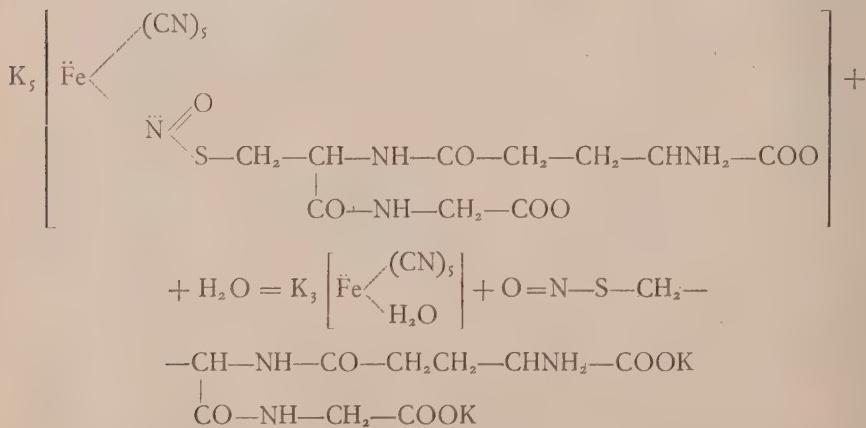
Senonchè il prodotto intensamente colorato che si forma in ambiente acquoso-metilalcoolico, assai prontamente si altera volgendo al giallo e dalla soluzione si va separando una sostanza gialla che all'analisi risultò essere acquoferropentacianuro potassico:



Ciò induceva ad ammettere un fenomeno secondario di idrolisi del prodotto primitivamente originatosi nella reazione, idrolisi concomitante al cambiamento di colore e segnalata da esso.

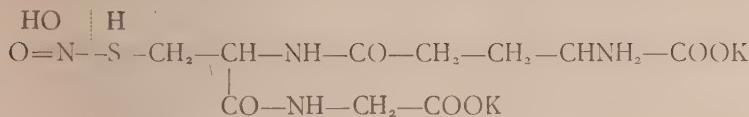
Per potere risalire alla costituzione del complesso intensamente colorato in rosso era necessario perciò individuare gli altri frammenti della molecola che si originano nella idrolisi di esso; metodo già altre volte sperimentato favorevolmente da uno di noi a proposito della reazione cromatica fra nitroprussiato e creatinina⁽¹⁾.

Si poteva pertanto pensare che le acque madri dalle quali si separa l'acquoferropentacianuro potassico contenessero o un nitrosoderivato originatosi per idrolisi del complesso rosso (I) secondo la seguente equazione:



(1) Questi «Rendiconti», vol. X, ser. 6^a, 2^o sem., p. 261 (1929).

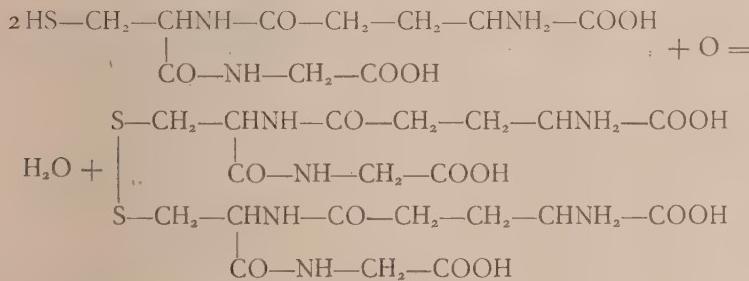
oppure i prodotti di una ulteriore e più progredita idrolisi di questo, secondo lo schema:



e cioè nitrito alcalino e glutatione salificato, dato l'ambiente alcalino del liquido della reazione. Questa seconda ipotesi pareva anzi più probabile poiché i composti che contengono l'aggruppamento $\text{O}=\text{N}-\text{S}-\text{R}$ sono notoriamente poco stabili.

Tali previsioni ebbero piena conferma nella esperienza, ed infatti, anche facendo reagire un eccesso di glutatione sul nitroprussiato⁽¹⁾, nelle acque madri si riscontrò sempre la presenza di notevoli quantità di nitrito alcalino.

D'altra parte siccome il glutatione si ossida con estrema facilità secondo lo schema:



e fa ciò tanto più facilmente in ambiente spiccatamente ossidante per presenza di nitrito alcalino, così per poterlo identificare nelle acque madri mediante la nota reazione cromatica del nitroprussiato, era necessario ridurre prima il liquido che lo conteneva.

Accertata in tale modo la presenza dei vari prodotti di demolizione del complesso colorato, rimaneva stabilita la formula che abbiamo dato per esso (I).

PARTE SPERIMENTALE.

Reazione fra glutatione e nitroprussiato.

Ad una soluzione acquoso-metilalcoolica di glutatione concentrata e fredda, venne aggiunta una soluzione metilalcoolica pure concentrata e fredda

(1) Si è fatto avvenire la reazione anche con difetto di nitroprussiato in modo da essere sicuri che tutto avesse reagito col glutatione, poiché il nitroprussiato decomponendosi dà pure nitrito alcalino.

di nitroprussiato sodico e quindi a goccia a goccia, mantenendo raffreddato il liquido, una soluzione di potassa caustica in alcool metilico. Dapprima si ottenne una intensa colorazione rossa che rapidamente scompare volgendo al bruno per dare infine luogo ad un precipitato giallo. La sostanza gialla separata per filtrazione dalle acque madri, venne purificata sciogliendola ripetute volte in acqua e facendola precipitare con alcool metilico, nel quale è praticamente insolubile.

Essicata nel vuoto su acido solforico fino a peso costante, dette all'analisi i seguenti risultati che corrispondono a quelli che si calcolano per l'acquoferropentacianuro potassico:

| Calcolato per $K_3 Fe \begin{smallmatrix} (CN)_5 \\ H_2O \end{smallmatrix}$ | | | Trovato |
|---|--|--|-------------|
| % K 36.54 | | | 36.30 36.75 |
| % Fe 17.38 | | | 17.75 17.80 |

Il composto è solubilissimo nell'acqua con colorazione giallo-scuro, dà tutte le reazioni di Hoffmann per gli acquoferropentacianuri⁽¹⁾ e corrisponde per tutte le sue proprietà all'acquoferropentacianuro potassico già descritto da L. Cambi⁽²⁾.

Le acque madri vennero concentrate a bagno maria fino a eliminazione dell'alcool metilico; il residuo venne ripreso con acqua e su tale soluzione aquosa si procedette alla ricerca del nitrito alcalino con le ben note reazioni. Il reperto fu sempre positivo anche quando si impiegò un difetto di nitroprussiato rispetto al glutatione, in modo che esso venisse completamente consumato reagendo col glutatione per la formazione del composto rosso.

Un'altra porzione delle acque madri, liberata pure dall'alcool metilico nel modo sopra accennato, servì alla ricerca del glutatione.

La reazione, eseguita senz'altro sul liquido, risulta del tutto negativa. Ma questa soluzione, resa alcalina con potassa caustica, fu allora ridotta con polvere di zinco (od anche con alluminio o con lega di Devarda) ed in tale modo si poté avere nettissima la colorazione rossa col nitroprussiato, dovuta al glutatione.

(1) «Liebigs Annalen», 312 (1900), p. 55.

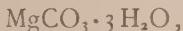
(2) «Gazz. Chim. Ital.», vol. 41 (1911), p. 163.

Mineralogia. — *Ricerche sui carbonati naturali neutri e basici di magnesio idrati⁽¹⁾.* Nota⁽²⁾ di M. FENOGLIO, presentata dal Socio F. MILLOSEVICH.

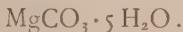
Scopo della presente Nota è quello di riassumere per sommi capi i risultati più salienti da me ottenuti nella revisione di un gruppo notevole di rari carbonati naturali di magnesio idrati, la cui costituzione chimica ed individualità mineralogica erano ancora oggetto di discussione. L'occasione per questa revisione sistematica mi fu offerta dal rinvenimento della maggior parte dei minerali in questione nell'importante e noto giacimento di ferro magnetico alpino di Cogne in Val d'Aosta⁽³⁾, che mi fornì un materiale abbondante ed eccezionalmente bello, che mi permise di eseguire lo studio mineralogico completo delle importanti specie minerali.

Era stata descritta come carbonato neutro di magnesio idrato la nesquehonite: $MgCO_3 \cdot 3 H_2O$, e carbonati basici di magnesio idrati erano ritenuti la lansfordite: $3 MgCO_3 \cdot Mg(OH)_2 \cdot 21 H_2O$, l'artinite: $MgCO_3 \cdot Mg(OH)_2 \cdot 3 H_2O$ e l'idromagnesite, per cui apparivano possibili le formule brute: $4 MgO \cdot 3 CO_2 \cdot 4 H_2O$ e $5 MgO \cdot 4 CO_2 \cdot 5 H_2O$.

I risultati di ricerche chimiche accurate da me condotte su materiale ben cristallizzato e assolutamente puro confermarono per la nesquehonite⁽⁴⁾ la formula:



mentre dimostrarono che la lansfordite⁽⁵⁾, al pari della prima, è da ritenersi un carbonato neutro di magnesio idrato, con una formula assai più semplice di quella attribuitale, identificandosi essa con il carbonato neutro di magnesio penta'idrato:



Per l'artinite⁽⁶⁾, sinora non ancora ottenuta per via sintetica, fu confermata la formula:



(1) Lavoro eseguito negli Istituti di Mineralogia delle Regie Università di Torino e di Messina.

(2) Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1936.

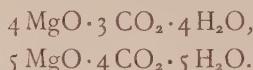
(3) M. FENOGLIO, *Sulla lansfordite delle miniere di Cogne in Val d'Aosta.* « Periodico di Mineralogia », n. 3, 1933, p. 443.

(4) M. FENOGLIO, *Ricerche sulla nesquehonite delle miniere Cogne in Val d'Aosta.* « Periodico di Mineralogia », n. 1, 1935, p. 1.

(5) M. FENOGLIO, *Sulla lansfordite delle miniere di Cogne in Val d'Aosta.* « Periodico di Mineralogia », n. 3, 1933, p. 443.

(6) M. FENOGLIO, *Ricerche sull'artinite delle miniere di Cogne in Val d'Aosta.* « Periodico di Mineralogia », n. 1, 1936, p. 47.

I risultati dello studio chimico dell'idromagnesite⁽¹⁾ non hanno consentito di risolvere il problema della vera formula da attribuire al minerale, lasciando aperta la via alle solite due possibilità:



Come vedremo più sotto però i risultati dell'indagine röntgenografica hanno reso verosimile l'ultima formula, determinata del resto recentissimamente per composti artificiali identificati con l'idromagnesite.

All'incertezza sulla costituzione chimica dei nostri minerali corrispondeva per la maggior parte di essi una conoscenza morfologica ed ottica delle più discordanti, delle più discusse, tanto che la simmetria assegnata ad alcuni appariva quanto mai incerta, ed in qualche caso addirittura inverosimile. Il problema della simmetria si presentava perciò estremamente arduo, delicato, e per la sua soluzione, pur non trascurando i metodi classici che la tecnica mineralogica moderna offre, mi valse altresì dell'indagine röntgenografica, che non solo mi fu di valido ausilio per stabilire, o precisare la vera simmetria, ma fornì altresì dati preziosi per la conoscenza della struttura dei minerali stessi.

Così per la nesquehonite, ascritta al sistema rombico, in base a pochi e mal sicuri dati goniometrici, fu confermata la simmetria rombica D_{2h} , precisata la classe bipiramidale, e vennero calcolate nuove costanti cristallografiche:

$$a:b:c = 0.6444 : 1 : 0.45151,$$

che sono in perfetto accordo con il rapporto assiale:

$$a:b:c = 0.6438 : 1 : 0.45180$$

che si calcola dalle costanti reticolari:

$$a_0 = 7.68 \text{ \AA} \quad , \quad b_0 = 11.93 \text{ \AA} \quad , \quad c_0 = 5.39 \text{ \AA}.$$

I risultati dello studio röntgenografico consentirono inoltre di attribuire alla nesquehonite il reticolo rombico semplice (Γ) e il gruppo spaziale D_{2h}^1 .

La lansfordite, descritta come triclinia, ad un'accurata indagine cristallografica, ottica e röntgenografica rivelò invece la simmetria monoclinoprismatica C_{2h} con costanti cristallografiche:

$$\begin{aligned} a:b:c &= 1.6520 : 1 : 0.96812 \\ \beta &= 78^\circ 11', \end{aligned}$$

(1) M. FENOGLIO, *Ricerche sull'idromagnesite*. «Periodico di Mineralogia», n. 3, 1936.

identiche a quelle del carbonato di magnesio pentaidrato artificiale, con cui venne identificata. Queste costanti sono poi in ottimo accordo con il rapporto parametrico:

$$a:b:c = 1.6529 : 1 : 0.97218$$

che si calcola dalle costanti reticolari:

$$a_0 = 12.48 \text{ \AA} , \quad b_0 = 7.55 \text{ \AA} , \quad c_0 = 7.34 \text{ \AA} .$$

A conclusioni meno decisive condussero i risultati delle ricerche sull'artinite, la cui simmetria rimane tutt'ora alquanto incerta, poichè, se da un canto le proprietà ottiche potrebbero anche autorizzarci ad ascriverla al sistema rombico, gli scarsissimi ed incerti dati goniometrici la renderebbero verosimilmente monoclinica. L'analisi röntgenografica in questo caso non consentì di risolvere il problema, poichè, trattandosi di un minerale fibroso, non fu possibile che determinare il periodo di identità lungo l'asse di rotazione parallelo all'allungamento, che risultò uguale a 3.14 \AA , e per mezzo del metodo delle polveri confermare l'esistenza della specie.

Feconde di risultati veramente decisivi ed importanti per la conoscenza della specie si rivelarono le ricerche cristallografiche, ottiche e röntgenografiche, condotte sull'idromagnesite, che appariva indubbiamente il minerale più mal conosciuto di tutti gli altri di questo gruppo. Infatti disparatissime erano le opinioni sulla simmetria dell'idromagnesite, poichè, se a taluni mineralisti apparve rombica, altri non esitarono ad ascriverla al sistema monoclinico, e monoclinica figurava nei trattati di maggiore autorità.

La revisione sistematica, completa delle proprietà morfologiche ed ottiche dell'idromagnesite di alcuni giacimenti autorizzò a porre fuori dubbio la simmetria rombica del nostro minerale, di cui fu possibile, in base ai risultati delle figure di corrosione, precisare la classe bipiramidale.

I risultati dell'analisi röntgenografica confermarono in pieno la simmetria rombica D_{2h} .

Il rapporto assiale, determinato per via goniometrica, risultò:

$$a:b:c = 1.0379 : 1 : 0.4652 ,$$

mentre per quello calcolato dalle costanti reticolari:

$$a_0 = 9.32 \text{ \AA} , \quad b_0 = 8.98 \text{ \AA} , \quad c_0 = 8.42 \text{ \AA}$$

si ricavò:

$$a:b:c = 1.0378 : 1 : 0.9376 ,$$

dove evidentemente c ha un valore doppio di quello che ha nel primo rapporto; l'accordo però fra i due rapporti parametrici si ristabilisce, facendo $y = \{122\}$ anzi che $y = \{121\}$, poichè allora il primo diventa:

$$a:b:c = 0.0379 : 1 : 0.9298 .$$

La discussione dei risultati dello studio röntgenografico autorizzò ad attribuire all'idromagnesite il reticolo rombico semplice (I') e il gruppo spaziale D_{2h} .

Nel calcolo del numero di molecole assorbite dalla cella elementare, che è uguale a 2, si constatò che la formula dell'idromagnesite, che meglio si accorda con le costanti reticolari trovate, è:



Concludendo, i risultati delle mie ricerche chimiche, cristallografiche, ottiche e röntgenografiche sui carbonati naturali di magnesio idrati consentirono di mettere fuori discussione:

1° la reale esistenza in natura di due carbonati neutri di magnesio idrati:

- a) nesquehonite $\text{MgCO}_3 \cdot 3 \text{H}_2\text{O}$,
- b) lansfordite $\text{MgCO}_3 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$,

corrispondenti rispettivamente ai due noti carbonati artificiali: il carbonato di magnesio triidrato e il carbonato di magnesio pentaedrato, con i quali vennero identificati;

2° l'esistenza in natura di due carbonati basici di magnesio idrati:

- a) artinite $\text{MgCO}_3 \cdot \text{Mg(OH)}_2 \cdot 3 \text{H}_2\text{O}$,
- b) idromagnesite $4 \text{MgCO}_3 \cdot \text{Mg(OH)}_2 \cdot 4 \text{H}_2\text{O}$.

L'artinite non si è sinora potuta ottenere in laboratorio, mentre l'idromagnesite viene identificata con il carbonato basico di magnesio artificiale: $5 \text{MgO} \cdot 4 \text{CO}_2 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$.

La nesquehonite e l'idromagnesite si rivelarono rombiche bipiramidali, mentre la lansfordite risultò monoclinopiramidale; non fu possibile stabilire se l'artinite sia monoclinica o rombica.

Biologia. — *Pressione osmotica dei colloidii dell'umor vitreo⁽¹⁾.*
Nota⁽²⁾ di C. LENTI, presentata dal Socio A. HERLITZKA.

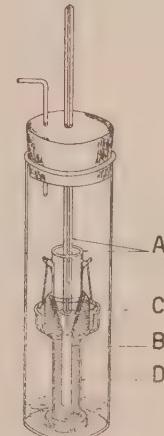
La pressione osmotica dei colloidii dell'umor vitreo non è stata ancora oggetto d'indagine, per quanto possa fornire dati atti a chiarire le cause della pressione intraoculare, argomento tuttora assai discusso e che ha dato luogo alla formazione di svariatissime ipotesi.

Adoperai il metodo diretto con membrane semipermeabili di collodio, a forma di tubo, preparate da una soluzione di collodio 8% in alcool-etero in parti eguali, secondo il procedimento descritto da Krogh e Nakazawa⁽³⁾.

Eseguii le determinazioni per mezzo di un semplice apparecchio che feci costruire, il quale ricorda, in scala ridotta, l'osmometro di Sörensen⁽⁴⁾.

Il mio osmometro è rappresentato nella figura.

Il Tubo di collodio, B, è cilindrico nella parte funzionante da membrana semipermeabile, e si continua in alto a forma di tronco di cono, chè ha lo scopo di tener fissata la membrana, per mezzo del sostegno di vetro C, ad un tubo di vetro A, a tronco di cono nella parte inferiore, al quale è saldato il tubo di vetro capillare. Il capillare ha una lunghezza di 250 mm. e un diametro interno di 0.6 mm. Il sacchetto di collodio, limitatamente alla parte cilindrica, ha una lunghezza di 30 mm. e un diametro di 5 mm. Per eseguire la determinazione, sono necessari 0.5 cc. circa del liquido in esame, quantità lievemente superiore a quanto occorre per riempire la parte cilindrica del tubo. Innestando la parte A dell'osmometro, il liquido, posto in eccesso, penetra nel capillare. La chiusura è assicurata da due lacci. Il tubo di collodio viene quindi immerso completamente nel liquido esterno contenuto nel vasetto di vetro D, nella quantità di ca 1.6 cc. L'apparecchio montato è posto in un tubo di vetro E. Liquido esterno passa attraverso la membrana semipermeabile nell'interno del tubo di collodio, determinando nel capillare la salita del liquido in esame fino ad un determinato livello. La pressione osmotica, che è data dall'altezza del livello del liquido nel ca-



(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia della R. Università di Torino.

(2) Pervenuta all'Accademia il 10 ottobre 1936.

(3) KROGH e NAKAZAWA, « Bioch. Zeit. », 188, 241 (1927).

(4) SÖRENSEN S. P. L., « Zeit. phisiol. Chem. », 106, 1 (1919).

pillare sul livello del liquido nel quale il tubo di collodio è immerso, è letta mediante un catetometro. Dal valore misurato, si sottrae l'altezza del liquido dovuta alla capillarità, e da ultimo, per avere la pressione osmotica in mm. di acqua, si moltiplica il valore corretto per il peso specifico del liquido. Di solito, si faceva una prima lettura dopo 14-15 ore, e una seconda un'ora dopo. Quando le due letture non risultavano uguali, si facevano altre letture fino a raggiungere l'uguaglianza nelle due ultime.

Alle determinazioni della pressione colloido-osmotica, ho fatto precedere misure della pressione osmotica totale dell'umor vitreo, compiute determinando l'abbassamento del punto di congelamento mediante il crioscopio di Dekhuyzen⁽¹⁾. Valendomi dei valori ottenuti, ho preparato una soluzione di NaCl con pressione osmotica uguale alla pressione osmotica totale media dell'umor vitreo, da adoperare come liquido esterno alla membrana di collodio.

In alcuni casi, determinai pure l'indice di rifrazione, facendo uso del refrattometro ad immersione Zeiss, il residuo secco e il contenuto di azoto totale mediante il micrometodo di Kjaldahl (secondo Bang), allo scopo di vedere se esistono eventuali rapporti tra questi valori e la pressione colloido-osmotica.

RISULTATI.

La pressione osmotica dei colloidii dell'umor vitreo di bovini, indicata in mm. di acqua, oscilla tra un minimo di 6,75 e un massimo di 23,36, presentando un valore medio di 12,42. I risultati delle singole determinazioni sono indicati nella tabella che segue:

(1) DEKHUYZEN, M. C., « Bioch. Zeit. », 11, 346 (1908).

TABELLA.

| N. d'ord. | Press. osm. colloidì umor vitreo | Δ | p. sp. | n_D | r. s. |
|-----------|--|----------|--------|----------|-------|
| 1 | 23.36 | 0.55 | 1.007 | — | — |
| 2 | 10.07 | 0.54 | 1.007 | — | — |
| 3 | 20.10 | 0.55 | 1.008 | — | — |
| 4 | 11.58 | 0.50 | 1.007 | 1.335206 | 1.33 |
| 5 | 10.97 | 0.54 | 1.007 | 1.335206 | 1.16 |
| 6 | 14.19 | 0.55 | 1.007 | 1.335168 | 1.09 |
| 7 | 14.21 | 0.57 | 1.008 | 1.335282 | 1.18 |
| 8 | 6.75 | 0.53 | 1.008 | 1.335206 | 0.72 |
| 9 | 7.95 | 0.49 | 1.007 | 1.335168 | 1.62 |
| 10 | 11.18 | 0.55 | 1.008 | 1.335206 | 1.38 |
| 11 | 13.59 | 0.53 | 1.007 | 1.335206 | 0.80 |
| 12 | 8.76 | 0.54 | 1.007 | 1.335130 | 1.12 |
| 13 | 8.35 | — | 1.007 | 1.335403 | 0.57 |
| 14 | 13.69 | 0.51 | 1.007 | 1.335244 | 1.37 |
| 15 | 11.39 | 0.52 | 1.008 | 1.336052 | 1.52 |
| 16 | 16.91 | — | 1.007 | 1.336017 | 1.15 |
| 17 | 11.88 | — | 1.007 | 1.335364 | 1.17 |
| 18 | 8.66 | — | 1.007 | 1.335130 | 1.10 |

Δ = abbassamento punto congelamento.

p. sp. = peso specifico.

n_D = indice di rifrazione.

r. s. = residuo secco.

L'abbassamento del punto di congelamento è di $0^{\circ}490$ – $0^{\circ}585$, con un valore medio di $0^{\circ}538$.

Il peso specifico è 1007–1008.

L'indice di rifrazione a $17^{\circ}5$, varia fra 1.335130 e 1.336052.

Il residuo secco, ottenuto a 100°, è di grammi 0.57-1.62 per 100 cc. di humor vitreo.

L'azoto totale si aggira tra valori di 19.45 e 34.65 mmg. per 100 cc.

La pressione colloido-osmotica dell'umor vitreo non presenta rapporti con i valori riscontrati dell'indice di rifrazione, del residuo secco, mentre invece è evidente un rapporto con il contenuto di azoto totale.

Riporto qui i valori misurati:

| Pressione colloido-osmotica in mm. di acqua | Azoto totale mmg. per 100 | Pressione osmotica | |
|---|------------------------------|--------------------------|------------------------------|
| | | per mmg. di N per 100 | per g. di protide per 100 |
| 8.66 | 19.45 | 0.45 | 7.2 |
| 11.88 | 19.91 | 0.59 | 9.4 |
| 13.69 | 21.42 | 0.63 | 10.0 |
| 16.91 | 34.65 | 0.49 | 7.8 |

Da questa tabella si vede che la pressione osmotica è proporzionale — nei limiti di esattezza del metodo — all'azoto esistente nel liquido: la pressione dovuta a 1 g. di protide sciolto in 100 cc. di solvente, oscilla tra 7,2 e 10 mm. di acqua. Ora è da ricordare che nel siero di sangue la pressione osmotica dovuta ai collodi oscilla tra 30 e 40 mm. con un contenuto di 8-9 % di proteine corrispondenti, in cifra tonda, a 5 mm. per una soluzione all'1 %. D'altro canto è stata calcolata per l'emoglobina una pressione osmotica di 10,2 mm. di Hg. per una soluzione all'1 %, se il peso molecolare fosse quello corrispondente a un atomo di ferro, cioè di 16.700; in realtà si trova una pressione di 2.6, cioè corrispondente a un peso uguale a quello della somma di 4 molecole semplici, cioè di 68.000; espresse in mm. di acqua, si avrebbe, per una soluzione all'1 % di emoglobina, una pressione di ca. 35. Per il vitreo, troviamo un valore molto vicino a quello del siero, ma alquanto più elevato, corrispondente a un peso molecolare di circa la metà, in confronto a quello dei protidi del sangue. Naturalmente i dati sono ancora troppo scarsi per tentare un calcolo di questo peso molecolare.

Ponendo i risultati ottenuti in queste ricerche, in relazione al meccanismo di produzione della pressione intraoculare, possiamo considerarne come un fattore l'affinità tra le particelle colloidali dell'umor acqueo e l'acqua, che ci è indicata dai valori della pressione colloido-osmotica. Sarebbe interessante, se si disponesse del materiale adattato, controllare i rapporti esistenti tra i due valori nei casi di variazioni patologiche della pressione endo-oculare.

Biologia (Biologia marina). — *Allevamento di una larva pelagica di «Cerianthus» fino all'acquisto di caratteri definitivi⁽¹⁾.* Nota⁽²⁾ preliminare di L. SANZO, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Riescono non infrequenti nel plankton dello stretto di Messina, larve di *Ceriantari* ed *Actinari* di sconosciuta pertinenza specifica.

Tentativi di coltura infruttuosi per una lunga serie di anni, sono riusciti finalmente positivi in seguito ad una fortuita osservazione che mi mise sulla via di potere alimentare e tenere per lungo tempo in coltura alcune di tali larve. In una di esse che si trovava nello stesso recipiente di cultura di uova di Teleostei potè, per trasparenza, rilevarsi che la cavità gastrica era in gran parte occupata da uno di quelle uova. Osservazioni successive assodarono nella cavità gastrica i resti dell'uovo in digestione e la espulsione di parti capsulari attraverso l'apertura orale.

I tentativi di allevamento di larve pelagiche di *Ceriantari* ed *Actinari*, tenendole in recipienti con circolazione di pura acqua marina, nei quali si tenevano in coltura uova pelagiche di Teleostei, aggiungendone ogni 2-3 giorni altre di rimpiazzo, onde mantenere un continuo e fresco materiale nutritivo per i *Ceriantari* ed *Actinari* in via di sviluppo, ebbero pieno successo. Si poterono per tale via allevare fino a completa trasformazione, ben cinque specie di larve fra cui due ebbero a trasformarsi in due diverse specie di *Cerianthus* con costruzione di rispettive diverse gallerie, e le altre in *Actinari*.

Una di esse due larve di *Cerianthus* potè essere allevata per oltre un anno dalla data di cattura. Si può pescare dalla fine di gennaio a tutto maggio, raccogliendone 1-2 esemplari al mese. Ha forma ovoidale (fig. I) con parte aborale arrotondata, disco boccale piuttosto largo e con cono boccale. In riposo misura sul disco intorno ad 1 mm. di diametro ed ancora meno in altezza.

Ci si presenta generalmente con incipiente formazione di quattro tentacoli sotto forma di altrettante protuberanze mammellonari, caratteristicamente pigmentate in rosso mattone. Analogo pigmento trovasi nella regione peristomale ed alla parte opposta aborale. Poco trasparente; si riesce tuttavia ad individuare all'interno due filamenti spesso in movimento.

La larva si nutre sia delle uova che delle larve che ne schiudono. Le une o le altre, venute a contatto della larva di *Cerianthus* vi restano

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Centrale di Biologia marina in Messina.

(2) Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1936.

attaccate evidentemente mercé il secreto adesivo dell'ectoderma, mentre il movimento delle ciglia vibratili le porta all'apertura boccale. I pesciolini vengono ingeriti per la loro parte cefalica. Delle uova, quelle non potute ingerire per la loro grandezza, vengono, dopo i primi tentativi, lasciate andare.



Fig. I. — Larva pelagica di *Cetrianthus* pescata in marzo nello stretto di Messina.

Fig. II. — La stessa larva al 4° giorno di cultura.

Sviluppatisi i tentacoli, la larva si avvale anche di questi organi di presa e superato il periodo più difficile per l'alimentazione, ottenuta solo a base di uova e larve di Teleostei, si può alimentare anche con pezzettini di carne di pesce: la coltura non esige allora le precauzioni necessarie di prima.

Accrescimento. Al 4° giorno dalla cattura, una larva, pescata il 27 marzo, presenta le quattro protuberanze mammellonari decisamente allungate in quattro tentacoli colorati in rosso mattone e disposti in due coppie simmetricamente al piano mediano passante per la fessura boccale. Si accenna un terzo paio di tentacoli anch'essi con pigmento rosso-mattone (fig. II).

Dopo 18 giorni la larva, notevolmente accresciuta in grandezza, presenta nove tentacoli marginali ed un piccolo tentacolo direttivo. Persiste il color rosso-mattone su ciascun tentacolo e nella zona peristomale. Assenza di tentacoli labiali.

Al 38° giorno (5 maggio), la larva in massima distensione misura mm. 25 mentre era appena di 1 mm. all'inizio della coltura. I tentacoli marginali si sono accresciuti a dodici. I tre più piccoli si presentano tutti e tre interposti fra due tentacoli, nella loggia di moltiplicazione. Sono comparsi dodici piccoli tentacoli labiali più intensamente colorati in rosso che non i marginali.

Da questo stadio in poi la larva predilige la parte più profonda del recipiente di coltura fino a raggiungerne il fondo, su cui manifesta un irrequieto strisciamento. Portata delicatamente in altro recipiente di vetro sul cui fondo era stato posto uno strato di sabbia alto 4-5 cm. la larva si va approfondando fino a scomparire totalmente nella sabbia.

Avendo avuta l'accortezza di fare insabbiare la larva in vicinanza della parete verticale del recipiente di vetro, si sono potute seguire le modalità di costruzione della galleria (fig. III). Appena insabbiata la larva secerne da tutto il corpo un'abbondante sostanza mucosa che viene a raggigliarsi

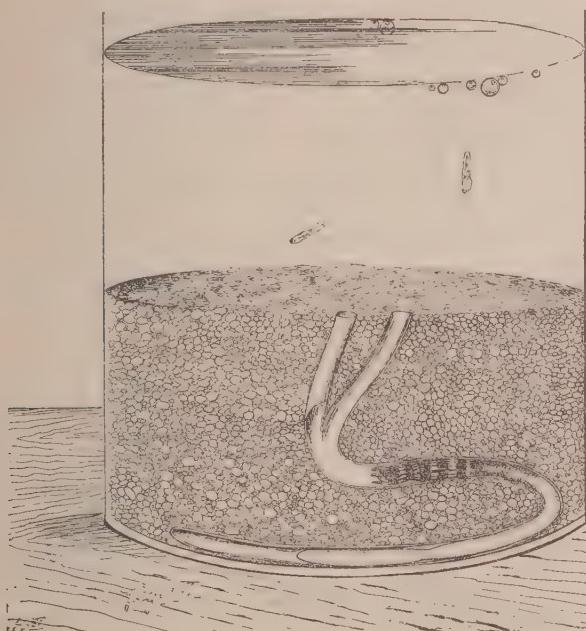


Fig. III. — Giovane *Cerianthus* ottenuto dalla larva di fig. I,
dopo sette mesi di cultura.

e ad includere tutto attorno dei granuli di sabbia. Al 5° giorno dall'insabbiamento la galleria misura poco più di 2 cm.; il suo prolungamento continua rapidamente così che al 10° giorno dall'insabbiamento, la galleria presenta un tratto verticale di cm. 4, della stessa altezza cioè, dello spessore della sabbia, ed un tratto orizzontale sul fondo del recipiente di vetro della lunghezza di cm. 7; una lunghezza totale cioè di cm. 11, mentre l'animale non misura che cm. 3,5.

L'entrata della galleria è perfettamente circolare e l'animale predilige la porzione più lontana dall'apertura di entrata.

Al 20° giorno dall'insabbiamento la galleria risulta ancora più sviluppata nel suo tratto orizzontale raggiungendo nei due tratti la lunghezza complessiva di 15 cm., mentre il piccolo *Cerianthus* non raggiunge, nella sua massima distensione, che 5,5 cm. di lunghezza. Tale lunghezza della galleria non fu sorpassata in tutto il resto del periodo di più di un anno in cui l'animale fu tenuto in coltura.

Tolto dalla sua galleria, l'animale è pronto a costruirsi subito un'altra. È stato assodato varie volte l'abbandono spontaneo della galleria ed il rifacimento di una nuova. Certo, col crescere dell'animale, la prima galleria diviene insufficiente e l'animale deve costruirne una nuova di diametro maggiore.

In due esemplari potuti allevare fino alla metamorfosi, la galleria si è presentata, nell'uno al settimo mese e nell'altro al nono mese, costituita come a fig. III a modo di Y, di cui le due branche si aprono alla superficie sabbiosa. Una tale conformazione deve riuscire vantaggiosa all'animale specialmente nei casi di ostruzione di una delle due aperture. Se si ostruisce artificialmente una di esse, l'animale tenta di riaprirla, servendosi dei suoi tentacoli che insinua, quando è possibile, fra il materiale di sbarramento. Se non vi riesce, si avvale dell'altra branca. Ostruendo le due aperture, si è constatato che l'animale si fa strada con la parte posteriore del fondo della galleria ed affiorando alla superficie della sabbia vien fuori per poi insabbiarsi nuovamente.

Tolta la possibilità di insabbiamento in un recipiente privo di fondo sabbioso la larva cresce ed aumenta il numero dei suoi tentacoli, ma mantiene forma a trasparenza dello stato pelagico. Tenuta così allo stato pelagico una larva per ben 4 mesi, venne a mancare nei tentacoli quella striatura trasversale di pigmento che si afferma in esemplari coetanei appena insabbiati. Nell'acqua si sono liberate dalla larva che vi è in sospensione delle membrane mucose: la secrezione mucosa che serve di cemento nella costruzione della galleria, si manifesta anche fuori da ogni stimolo tattile da parte della sabbia.

Entro la galleria il piccolo *Cerianthus* evolve il suo sviluppo. Al 20° giorno di insabbiamento misura, in massima distensione, poco meno di cm. 5,5, di cui 1 cm. quasi, è dato dalla lunghezza dei tentacoli. Presenta ancora 12 tentacoli marginali ed altrettanti labiali, quanti nella larva appena insabbiata. Sui tentacoli marginali il primitivo pigmento rosso-mattone si presenta ora distinto in due zone anulari intercalate da altrettante zone chiare.

Nel successivo periodo tali zone trasversali di pigmento alternate con zone chiare si accrescono di numero; le zone di ciascun tentacolo coincidono con quelle degli altri tentacoli. Tale coincidenza è ben rilevabile nell'animale per intero entro la galleria in cui i tentacoli riescono avvicinati a pennello tra loro.

L'esemplare di fig. III, esaminato il 6 ottobre, a più di sei mesi di coltura, misura in massima distensione da 5-6 cm.; i tentacoli marginali sono aumentati a 14 e tutti presentano presso a poco la medesima lunghezza; quelli labiali nello stesso numero che quelli marginali si presentano ancora piccoli e fortemente colorati in bruno.

A metà dicembre lo stesso esemplare in riposo entro la galleria misura cm. 10 di cui cm. 2,2 appartenenti ai tentacoli.

Nel marzo successivo, ad un anno di coltura il *Cerianthus* presenta 17 tentacoli marginali lunghi intorno a cm. 2,5, e traversati da macchie rosso-mattone, alternate con macchie chiare. Ancora piccoli e coloriti in bruno più intenso si presentano i tentacoli labiali. Il diametro della colonna misura da 5-6 mm.

Sono in corso tentativi di trapianto di piccoli *Cerianthus* ottenuti per coltura delle larve pelagiche, in adatte zone acquee vicine alla sede dell'Istituto da dove possano frequentemente essere controllate.

Della pertinenza specifica di questa e di una seconda forma di *Cerianthus* verrà trattato in un lavoro a parte.

Biologia. — *Tentativi d' impianti di tessuti nel vitreo dell'occhio di cavia*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di C. KOCH, B. SCHREIBER e G. SCHREIBER, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Riferiamo in questa Nota sui particolari di tecnica ed alcuni risultati d'impianti di tessuti diversi nel corpo vitreo dell'occhio vivente; impianti eseguiti con lo scopo di saggiare l'accrescimento dei tessuti in questo ambiente così singolare, il quale, secondo le ricerche manometriche di Fischer⁽³⁾ manca del ricambio respiratorio.

Il vitreo infatti, non consuma ossigeno né produce anidride carbonica; nel mentre non sono ancora note le sue capacità glicolitiche.

La nostra intenzione era quella di portare nel vitreo il tessuto o frammento di organo in attivo accrescimento e proliferazione (cute, intestino embrionale, glandola mammaria secernente, utero ecc.) allo scopo di vedere se e quali elementi istologici vi si accrescono; ed inoltre se le modalità di questo accrescimento risultassero morfologicamente simili a quelle degli espianti «in vitro» oppure presentassero qualche atipia riferibile al carattere asfittico del ricambio di questo mezzo.

La scarsa proliferazione dei tessuti così innestati ci ha costretti a rinunciare ai trapianti in serie e alle ricerche di controllo sul metabolismo dell'innesto, inizialmente progettati.

Ci sembra però utile dare alcune informazioni sulla tecnica d'impianto e cenni sui risultati ottenuti.

Ritagilate con i comuni accorgimenti di asepsi brevi fettucce dei materiali di impianto, queste vengono introdotte nel lume di un grosso ago da siringa armato di mandrino esattamente calibrato, secondo la tecnica di Erlich⁽⁴⁾ per i trapianti in serie di tumori.

(1) Lavoro eseguito negli Istituti di Zoologia e Anatomia comparata della R. Università di Padova e di Zoologia della R. Università di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 24 settembre 1936.

(3) H. FISCHER v. BÜNAU, «Arch. f. Augenheilk.», 106, 1932.

(4) P. ERLICH, «Arb. a. d. K. Inst. f. Exper. Ther.», 1906 e «Z. f. Krebsf.», 5, 1907.

Nel frattempo una cavia viene posta in leggera narcosi eterea e fissata a mano. Lussato il globo oculare fuori dell'orbita, viene praticata una piccola incisione nella cornea onde far uscire l'acqueo. Quest'accorgimento di tecnica è necessario per eliminare l'aumento di pressione endo-oculare, che potrebbe ostacolare l'introduzione del materiale ed espellere il pezzo dopo ritirato l'ago.

Si esegue ora un breve taglio nella sclera infiggendovi un cortellino del Graefe con la lama orientata in senso meridiano. È opportuno eseguire tale incisione con la punta della lama rivolta verso il polo posteriore dell'occhio per rispettare il cristallino ed in uno dei meridiani obliqui onde evitare le fibre dei muscoli oculomotori retti. Poi, attraverso questo taglio s'introduce la cannula innescata del tessuto e si spinge il mandrino.

Seguendo l'operazione all'oftalmoscopio, si vede facilmente liberarsi dalla cannula e spostarsi nel vitreo il pezzo di impianto che talvolta rimane sospeso in questo, altre volte, ritirata rapidamente la cannula, si avvicina alla ferita e ivi rimane.

Frequentemente, a 7-10 giorni dall'innesto si stabilisce un distacco parziale o totale della retina. Fra le pieghe della retina distaccata si nasconde talvolta il pezzo innestato e non è quindi più possibile controllarne all'oftalmoscopio il comportamento successivo.

Abbiamo sinora eseguiti sette innesti di parete del corno uterino di cavia giovane, undici di mammella di cavia allattante, sette di pelle di feto di cavia e due di testicolo di cavia neonata.

L'occhio contenente l'innesto fu asportato dopo tempi variabili da 4 a 32 giorni. Per il prelevamento del pezzo, l'occhio venne enucleato e fissato intero in Zenker acetico o in Bouin. Dopo circa 12 ore di permanenza nel fissativo venne asportato, con taglio tangenziale una calotta di cornea e attraverso l'apertura, asportato il cristallino con delicata manovra. Dopo una ulteriore permanenza nel fissativo l'occhio venne incluso in paraffina e tagliato in serie.

Una fonte di errore per la corretta interpretazione dei reperti istologici sta nel fatto che dalla ferita si infiltrano nel vitreo delle gettate di fibroblasti che derivano probabilmente in parte del tessuto connettivo sottocongiuntivale. Altri gruppi di fibroblasti derivano dal frammento di organo impiantato nel vitreo. La provenienza di fibroblasti dalla congiuntiva osservato già dal Campos⁽¹⁾ come conseguenza di cauterizzazioni perforanti della sclera dell'occhio di coniglio, si presenta a nostro avviso già di per se interessante in quanto l'aspetto di questi fibroblasti infiltratisi a lamina nel vitreo, ricorda molto da vicino quello delle lame di fibroblasti in coltura.

La figura 1 rappresenta infatti parte di una di queste lame costituite da fibroblasti in assetto sinciziale e nuclei elisoidi e con estremità libere del protoplasma a forma di propaggini lamellari. Nel citoplasma e fra i

(1) R. CAMPOS, « Ann. Ottalm. », 62, 1934.

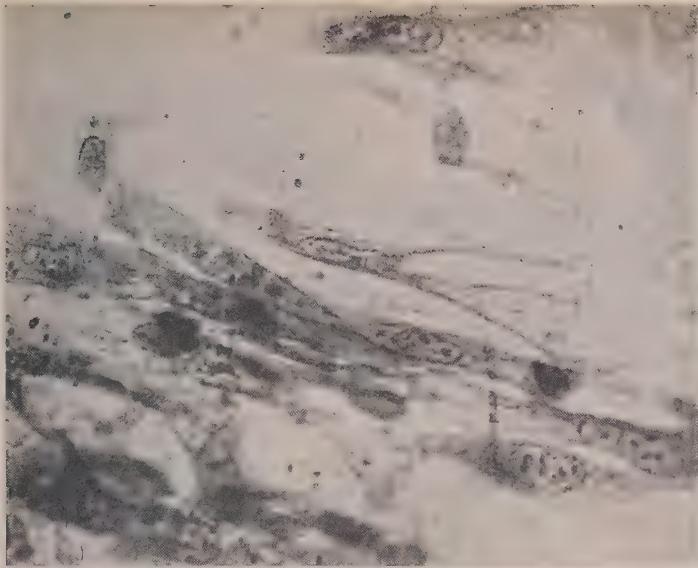


Fig. 1
Fibroblasti nel vitreo di cavia, cresciuti in un caso di innesto di ghiandola mammaria.
26 giorni dopo l'innesto.
(Esp. 50. Prep. 80 x 800).



Fig. 2
Veduta d'insieme del pezzo di corno uterino
innestato nel vitreo di cavia.
Alla periferia gruppi di miocellule isolate.
Inferiormente formazione pseudocistica del-
l'endometrio.
(Esp. 22. Prep. 18/3 x 58).



Fig. 3
Fibre muscolari lisce cresciute nel corpo vitreo
da un innesto di utero.
36 giorni dall'innesto.
(Esp. 12. Prep. 18/3 x 600).

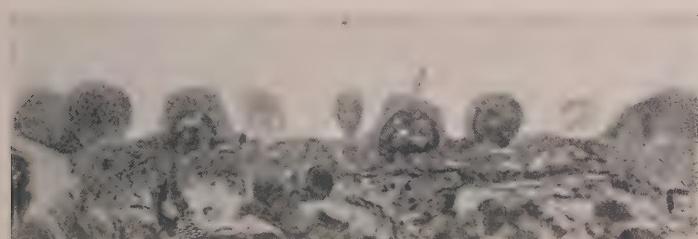


Fig. 4
Fibre muscolari lisce cresciute nel corpo vitreo da un impianto di utero,
sulla superficie di un coagulo e sezionate trasversalmente.
(Esp. 22. Prep. 18/3 x 1000).

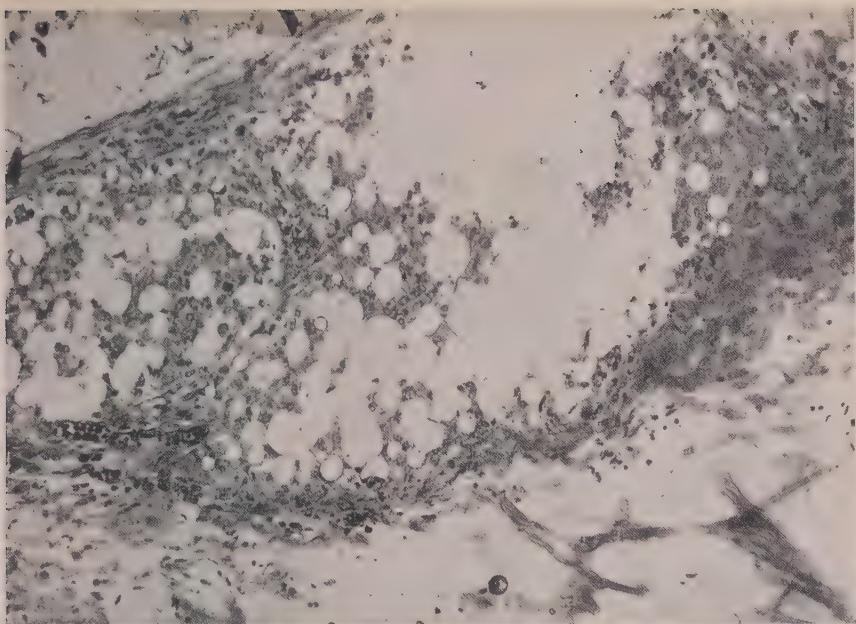


Fig. 5

Epitelio di ghiandola mammaria cresciuto nel corpo vitreo di cavia. Accrescimento a lamine sinciziali.
Sono visibili alcuni capillari sanguigni e zaffi di fibroblasti cresciuti dal bordo della ferita.
(Esp. 51 Prep. 77 x 140).

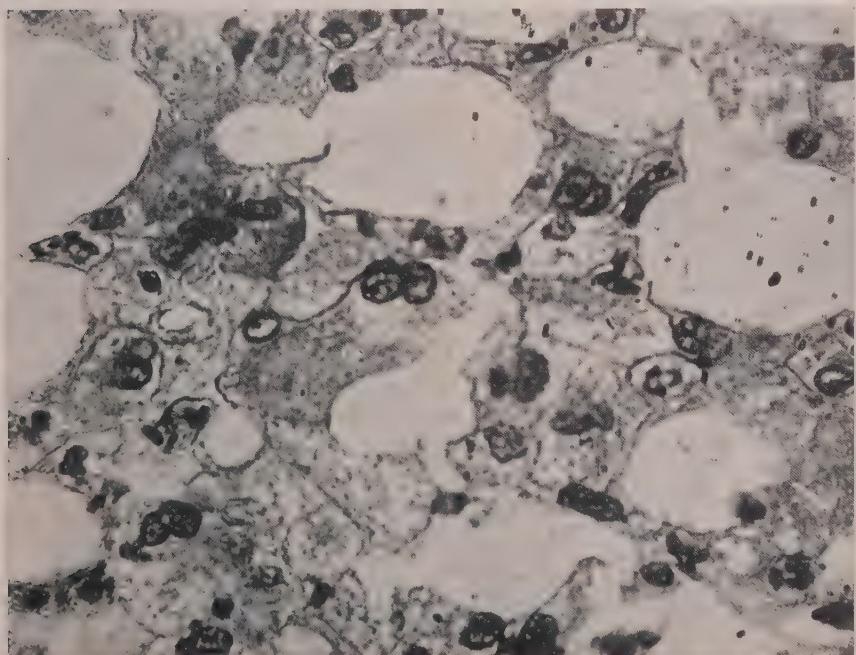


Fig. 6

Epitelio di ghiandola mammaria cresciuto nel corpo vitreo di cavia. 21 giorni dopo l'innesto.
(Esp. 51 Prep. 77 x 800).
Si vedono cellule binucleate ed altre in divisione diretta.

fibroblasti si rilevano con la colorazione di Malory caratteristiche fibrille connettivali. Mancano in questi gruppi di fibroblasti figure mitotiche.

Tra i vari tessuti innestati, ricorderemo due casi particolarmente significativi. Un frammento di corno uterino di cavia giovane, il quale dopo 36 giorni di innesto in cavia adulta mostrava una proliferazione a zaffi radiali di elementi riferibili a fibrocellule liscie del miometro in attiva proliferazione mitotica (figg. 2, 3, 4).

Questi elementi in dati punti del preparato s'inoltrano in un coagulo sanguigno e si adagiano sulla sua superficie. L'identificazione delle fibre muscolari e la loro differenziazione dai fibroblasti riesce facile nei punti dove queste, colpite trasversalmente, appaiono a sezione approssimativamente circolare, con le miofibrille nettamente visibili entro il citoplasma attorno al nucleo (fig. 4). I fibroblasti appaiono invece quali sottili lame. Altri criteri differenziali rilevabili dalle figure 1, 3, 4, sono la forma stessa della cellula, la forma del nucleo e la disposizione della cromatina. Va ricordata inoltre, una formazione pseudo cistica chiusa, affiancata al frammento innestato nel vitreo, derivata dall'endometrio con le proprie ghiandole tubulari. Nella parete di questa cavità le numerose mitosi attestano una attiva proliferazione delle cellule epiteliali.

Facciamo seguire ora una breve relazione su di un innesto di ghiandola mammaria di cavia allattante prelevato al 21° giorno dopo l'impianto fatto nel vitreo pure di cavia allattante.

Il pezzo in questo caso, a differenza del caso precedente, ove il frammento innestato era isolato nel vitreo, è rimasto aderente alla cicatrice sclerale, dalla quale si sono insinuati travate di fibroblasti e capillari sanguigni neoformati.

L'aspetto più notevole di quest'innesto è dato dall'accrescimento a lamina sinciziale dell'epitelio ghiandolare con formazione di lacune circolari. Il quadro istologico ricorda molto da vicino l'accrescimento degli epitelii nelle culture *in vitro* (figg. 5, 6).

Entro tale sincizio le cellule si presentano polimorfiche e frequentemente binucleate; si vedono alcuni nuclei in divisione diretta; mancano del tutto figure mitotiche. Sono assenti granuli di secrezione. Analogamente a quanto ebbero ad osservare Francescon e Zambelli⁽¹⁾ nelle culture *in vitro* di ghiandola mammaria espiantata tre giorni dopo il parto, anche nel nostro caso si nota in vari punti delle sezioni una netta separazione fra elementi epiteliali accresciuti a lamina e fibroblasti⁽²⁾.

(1) A. FRANCESCON e ZAMBELLI, « Boll. Soc. Ital. Biolog. Sperim. », VIII, pp. 577 e 1268, 1933 e « Atti Soc. Med. Chir. Padova », XI, p. 242, 1933.

(2) Queste ricerche vennero in parte eseguite durante l'estate 1935 nei Laboratori dell'Ospedale « Regina Elena » e nel Manicomio Provinciale di Trieste. Ci è grato poter esprimere qui i più sentiti ringraziamenti ai primari dottori E. Ferrari, C. Sai ed E. Licen, per l'ospitalità e la cortesia usateci.

Sugli innesti di epidermide, di intestino embrionale ecc. riferiremo in una Nota successiva.

Concludendo, intendiamo rilevare che, con questa tecnica relativamente semplice, siamo riusciti ad impiantare frammenti d'organo nel vitreo dell'occhio vivente di cavia.

Abbiamo potuto seguire gl'innesti per un tempo variabile da pochi giorni ad un mese ed abbiamo potuto osservare anzitutto la sopravvivenza di elementi di frammenti d'organo innestati e lo sviluppo, seppure stentato, di cellule connettivali (fibroblasti) epiteliali, e muscolari liscie.

Volendo interpretare questi risultati, va tenuto conto delle peculiari condizioni di ricambio del corpo vitreo già ricordate, condizioni che non sono le più favorevoli all'accrescimento dei tessuti normali.

Riteniamo però che le condizioni sono diverse in quei casi nei quali dalla ferita sclerale si sono insinuati capillari neoformati nel pezzo innestato. In successive nostre ricerche utilizzeremo quest'ultima circostanza, favorendo di proposito con opportuni accorgimenti di tecnica, la vascolarizzazione del frammento innestato.

Verremo così a realizzare la coincidenza di un frammento d'organo coltivato in condizioni simili a quello di un espianto *in vitro*, allacciato alla rete vascolare del portatore per mezzo dei vasi congiuntivali.

Servendoci di queste condizioni particolari potremo sperare di accelerare ed aumentare l'accrescimento per ora lento ed esiguo dei tessuti innestati nel vitreo e completare così lo studio dei problemi morfologici relativi. Le ricerche sui frammenti completamente isolati nel vitreo, se ulteriormente proseguite e perfezionate, potranno invece contribuire alla soluzione di problemi inerenti alla patogenesi dei tumori, rappresentando il nostro, un tentativo di agire sull'accrescimento di un tessuto coltivandolo in un ambiente a ricambio respiratorio ridotto o mancante.

Fisiologia. — *L'azione dell'adrenalina e dell'atropina sull'alcoolemia provocata⁽¹⁾.* Nota⁽²⁾ di S. MINZ e E. SERIANNI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Le ricerche di uno di noi riferite in una Nota precedente⁽³⁾ hanno dimostrato che la curva alcoolemica provocata a digiuno risulta notevolmente abbassata se la ingestione della bevanda alcoolica è preceduta da una iniezione di 20 U. di insulina.

Tali risultati inducevano a saggiare l'eventuale azione sull'alcoolemia provocata di altri ormoni o sostanze agenti sul sistema neurovegetativo.

Le presenti ricerche sono state eseguite sull'uomo, in 6 soggetti giovani e sani a digiuno, sui quali, dopo aver osservato la curva alcoolemica provocata normale, è stata saggia l'azione su questa della adrenalina (1 cc. di cloridrato di adrenalina al millesimo) o dell'atropina (milligr. 0.3-0.5 di solfato di atropina) somministrate per via sottocutanea prima dell'ingestione della soluzione idroalcoolica (cc. 0.5 di alcool a 95° per Kg. di peso corporeo in soluzione al 20%).

In alcuni dei soggetti le prove sono state ripetute più volte nelle stesse condizioni sperimentali.

I dosaggi dell'alcoolemia sono stati eseguiti su doppio campione di sangue col micrometodo di Widmark modificato⁽⁴⁾.

Dall'esame comparativo delle curve alcoolemeche provocate a digiuno normalmente o dopo somministrazione di atropina o di adrenalina (v. tabelle) sembrerebbe potersi concludere che, almeno con le dosi da noi adoperate, non si riesce a mettere in evidenza una netta e costante azione delle due sostanze sull'alcoolemia provocata.

Per due soggetti (F. F. e D. P.) si potrebbe forse ammettere un'azione opposta delle due sostanze: determinando l'adrenalina un netto abbassamento dell'acme della curva e, al contrario, l'atropina un lieve aumento di esso (abbassamenti percentuali nei casi D. P. e F. F. relativi all'adrenalina rispettivamente 20-25%; aumenti relativi all'atropina rispettivamente 20-25%; per ciò che riguarda quest'ultimo caso l'azione dell'atropina risulta

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia umana della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 16 settembre 1936.

(3) E. SERIANNI, *L'azione dell'insulina sull'alcoolemia provocata nell'uomo normale.* «Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei», XXI, p. 394, 1935.

(4) A. GALAMINI e L. BRACALONI, *Modificazione al micrometodo di Widmark per il dosaggio dell'alcool nel sangue.* «Arch. Farm. Sper.», 45, p. 97, 1928.

| Soggetto età, peso | Data | Quantità di alcool ingerito | Condizioni delle esperienze | Tassi alcolemici successivi all'ingestione di alcool espressi in °/oo |
|------------------------------|------------|-----------------------------------|--|--|
| T. B., a. 26 p. kg. 86 | 19-IX-1934 | 43 cc. | Curva normale | |
| Idem | 12-X-1934 | 43 cc. | 25' dopo ingestione di 40 gocce di bellafolina | 0' 5' 16' 26' 39' 52' 69' 84' 104' 119' 0.03 0.29 0.37 0.66 0.65 0.54 0.48 0.44 0.39 0.33 |
| Idem | 28-X-1934 | 43 cc. | 5' dopo iniezione sottocutanee di cc. 1 di adrenalina al °/oo | 10' 20' 30' 53' 73' 88' 98' 0.37 0.67 0.61 0.42 0.51 0.45 0.45 |
| Idem | 31-X-1934 | 43 cc. | 10' dopo iniezione di 0.3 mgr. di solfato di atropina | 10' 20' 30' 40' 55' 75' 0.28 0.51 0.56 0.55 0.62 0.54 |
| F. F., a. 29 p. kg. 88 | 24-IX-1934 | 44 cc. | Curva normale; in questo soggetto l'alcool veniva ingerito in 3 aliquote uguali, a distanza di 10 m.; l'inizio dell'esperienza corrisponde alla prima ingestione | 5' 13' 22' 32' 45' 65' 95' 125' 0.07 0.25 0.46 0.79 0.55 0.52 0.26 0.19 |
| Idem | 19-X-1934 | 44 cc. | 3' dopo l'iniezione di cc. 1 di cloridato di adrenalina al °/oo | 12' 22' 32' 42' 52' 67' 77' 92' 0.16 0.54 0.59 0.59 0.42 0.43 0.38 0.29 |
| Idem | 3-XI-1934 | 44 cc. | 5' dopo iniezione di 0.6 mgr. di solfato di atropina | 15' 25' 35' 50' 70' 90' 120' 0.32 0.57 0.83 0.69 0.68 0.59 0.46 0.36 |
| D. P. E., a. 24 p. kg. 80 | 25-IX-1934 | 40 cc. | Curva normale | 0' 5' 15' 25' 35' 48' 63' 85' 0.02 0.25 0.47 0.53 0.70 0.62 0.55 0.38 |
| Idem | 28-X-1934 | 40 cc. | 10' dopo l'iniezione di 1 cc. di cloridato di adrenalina al °/oo | 6' 16' 26' 36' 50' 70' 100' 0.24 0.31 0.50 0.48 0.56 0.44 0.42 |
| Idem | 31-X-1934 | 40 cc. | 7' dopo l'iniezione di 0.3 mgr. di solfato di atropina | 5' 15' 30' 40' 50' 70' 100' 130' 0.29 0.81 0.84 0.52 0.42 0.37 0.28 0.30 |

| Soggetto età, peso | Data | Quantità di alcool ingerito | Condizioni delle esperienze | Tassi alcolemici successivi all'ingestione di alcool espressi in % | | | | | | | | |
|------------------------------|-------------|-----------------------------------|---|---|------|------|------|------|------|------|------|------|
| | | | | 0' | 5' | 15' | 30' | 35' | 50' | 70' | 89' | 114' |
| D. A. L., a. 23 p. kg. 68 | 6-XII-1934 | 34 cc. | Curva normale | 0.07 | 0.30 | 0.67 | 0.65 | 0.62 | 0.61 | 0.54 | | |
| Idem | 14-XII-1934 | 34 cc. | Idem | 10' | 20' | 44' | 59' | 74' | 89' | | | |
| Idem | 6-II-1935 | 34 cc. | 25' dopo iniezione di 0.75 mgr. di sol- fato di atropina | 0.42 | 0.46 | 0.57 | 0.54 | 0.64 | 0.53 | 0.46 | | |
| Idem | 18-XII-1934 | 34 cc. | 10' dopo iniezione di cc. 1 di adrena- linina al 0/oo | 0.39 | 0.57 | 0.64 | 0.61 | 0.64 | 0.62 | 0.46 | 90' | 0.42 |
| Idem | 23-I-1935 | 34 cc. | 30' dopo iniezione di 1 cc. di adre- nalina al 0/oo | 0.45 | 0.67 | 0.66 | 0.62 | 0.64 | 0.50 | 0.53 | 94' | 0.38 |
| L. G. G., a. 25 p. kg. 65 | 6-XII-1934 | 33 cc. | Curva normale | 0.01 | 0.31 | 0.61 | 0.62 | 0.62 | 0.61 | 0.56 | | |
| Idem | 11-XII-1934 | 33 cc. | Idem | 20' | 25' | 40' | 50' | 60' | 75' | 90' | | |
| Idem | 14-XII-1934 | 33 cc. | 11' dopo iniezione di 1 cc. di adre- nalina al 0/oo | 0.83 | 0.80 | 0.70 | 0.67 | 0.62 | 0.39 | 0.49 | 110' | 0.50 |
| Idem | 18-XII-1934 | 33 cc. | 15' dopo iniezione di 0.5 mgr. di sol- fato di atropina | 0.57 | 0.68 | 0.62 | 0.73 | 0.65 | 0.54 | 0.46 | 103' | 0.40 |
| T. I., a. 41 p. kg. 52 | 15-VI-1935 | 26 cc. | Curva normale | 0.12 | 0.29 | 0.42 | 0.46 | 0.46 | 0.41 | 0.41 | 100' | 0.20 |
| Idem | 17-VI-1935 | 26 cc. | 45' dopo iniezione di 0.5 mgr. di sol- fato di atropina | 0.25 | 0.40 | 0.41 | 0.42 | 0.41 | 0.39 | 0.39 | 95' | 0.22 |

non tanto dal modico aumento dell'acme, quanto dal decorso della curva che ha presentato in tutte le sue fasi valori nettamente superiori a quelli della curva normale).

Negli altri quattro casi invece sia dal confronto degli acmi rispettivi, sia da quello relativo al decorso delle curve, non sembra potersi rilevare alcuna sicura azione dell'atropina o della adrenalina sulla curva alcoolemica.

N. P.

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 1° novembre 1936 Anno (XV)

Presidenza del prof. F. MILLOSEVICH

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulle equazioni delle estremanti nei problemi di Lagrange.* Nota⁽¹⁾ del Corrisp. L. TONELLI.

Proseguendo nell'indirizzo da me indicato nella Nota *Sulle equazioni delle estremanti nei problemi di Mayer*⁽²⁾, mi propongo di ottenere per i problemi di Lagrange risultati analoghi a quelli conseguiti per i problemi di Mayer.

I PROBLEMI IN FORMA PARAMETRICA.

1. Supporremo sempre che $F(x, y, x', y', u)$ e $G(x, y, x', y', u)$ siano due funzioni finite e continue, insieme con le loro derivate parziali del primo ordine, per ogni punto (x, y) di un dato campo A, per ogni coppia (x', y') di numeri non ambedue nulli e per ogni u appartenente ad un dato intervallo (finito o infinito) Δ ; supporremo, inoltre, che tali funzioni siano sempre, nel dominio indicato, positivamente omogenee, di grado 1.

Data l'equazione

(1) ; $u' = F(x, y, x', y', u),$

chiameremo *curve ordinarie* ad essa relative le curve continue e rettificabili

$$\mathcal{C} : x = x(s) \quad , \quad y = y(s) \quad , \quad 0 \leq s \leq L,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 ottobre 1936.

(2) Questi «Rendiconti», ser. 6^a, vol. XXIV, 2^o sem., 1936, pp. 180-187.

— dove s rappresenta la lunghezza dell'arco variabile di \mathcal{C} ed L la lunghezza di tutta la curva — appartenenti al campo A e tali che l'equazione differenziale $u'(s) = F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), u(s))$ ammetta in quasi tutto l'intervallo $(0, L)$ una soluzione — che indicheremo con $u_{\mathcal{C}}(s)$ — assolutamente continua in tutto $(0, L)$ e soddisfacente alle condizioni che $u_{\mathcal{C}}(0)$ sia uguale ad un valore fissato u_0 di Δ e che i valori di $u_{\mathcal{C}}(s)$ appartengano tutti a Δ .

Per ogni curva ordinaria \mathcal{C} porremo

$$\mathfrak{J}_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} G(x(s), y(s), x'(s), y'(s), u_{\mathcal{C}}(s)) ds.$$

2. Vale la seguente proposizione:

Se $\mathcal{C}_0[x = x_0(s), y = y_0(s), 0 \leq s \leq L_0]$ è una curva estremante per l'integrale $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}}$ in una data classe \mathfrak{K} di curve ordinarie relative all'equazione (1) e se essa soddisfa alla condizione che i valori di $u_{\mathcal{C}_0}(s)$ siano sempre interni all'intervallo Δ , ogni suo arco α_0 , i cui punti, esclusi al più quelli terminali, siano tutti interni al campo A e di indifferenza rispetto al campo A ed alla classe $\mathfrak{K}^{(1)}$, verifica le equazioni

$$(1) \quad \int_0^s H_x ds - \frac{d}{ds} \int_0^s H_{x'} ds = c_1 (\text{cost.}), \quad \int_0^s H_y ds - \frac{d}{ds} \int_0^s H_{y'} ds = c_2 (\text{cost.}),$$

dove si è posto $H \equiv G + \lambda F$, con

$$\lambda(s) = \int_0^{L_0} G_u(x_0(\sigma), y_0(\sigma), x'_0(\sigma), y'_0(\sigma), u_{\mathcal{C}_0}(\sigma)) \left[\exp. \int_\sigma^s F_u(x_0(\tau), \dots) d\tau \right] d\sigma^{(2)}.$$

Considerato uno degli archi α_0 , sia α'_0 una sua parte che non contenga nessuno dei punti terminali di α_0 e che sia sufficientemente piccola affinché esista un numero $\rho > 0$ tale che tutti i punti del piano (x, y) distanti non più di ρ da α'_0 appartengano al campo A, e che ogni curva ottenuta da \mathcal{C}_0 sostituendo α'_0 con un qualsiasi arco continuo e rettificabile, avente gli stessi punti terminali e appartenente all'intorno (ρ) di α'_0 , appartenga, qualora risulti una curva ordinaria, alla classe \mathfrak{K} . Essendo $\varphi(s)$ una qualsiasi funzione lipschitziana sull'intervallo (s'_1, s'_2) corrispondente all'arco α'_0 e soddisfacente

(1) Per la definizione di *punti di indifferenza* vedasi la mia Nota citata (n. 1).

(2) Questa proposizione coincide con quella dimostrata da B. MANIÀ in *Proprietà delle estremanti nei problemi di Lagrange*. (« Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa », ser. II, vol. V, 1936, pp. 89-126), perché i termini $(G_u + \lambda F_u + \lambda') F_{x'}$ e $(G_u + \lambda F_u + \lambda') F_{y'}$, contenuti sotto i primi integrali delle due equazioni scritte dal Manià in luogo delle (1), sono identicamente nulle, per essere, su \mathcal{C}_0 , $G_u + \lambda F_u + \lambda' \equiv 0$.

alla condizione $\varphi(s_1) = \varphi(s_2) = 0$ e pure sempre nulla fuori dell'intervallo (s_1, s_2) , formiamo la curva α'_γ definita dalle equazioni

$$x = x_0(s) + \gamma\varphi(s), \quad y = y_0(s), \quad s_1 \leq s \leq s_2.$$

Se $\bar{\gamma}$ è un numero positivo sufficientemente piccolo, per ogni γ tale che $|\gamma| \leq \bar{\gamma}$ la curva \mathcal{C}_γ che si ottiene da \mathcal{C}_0 sostituendo in essa l'arco α'_0 con α'_γ , è (in virtù di noti teoremi sull'esistenza degli integrali delle equazioni differenziali e sulla loro continuità rispetto a parametri contenuti nelle equazioni ⁽¹⁾) una curva ordinaria e appartiene alla classe \mathcal{K} . Per $\gamma = 0$ la \mathcal{C}_γ si riduce alla \mathcal{C}_0 ; e siccome \mathcal{C}_0 è una estremante per $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}}$ in \mathcal{K} , deve avversi

$$(2) \quad \left[\frac{d}{d\gamma} \mathfrak{J}_{\mathcal{C}_\gamma} \right]_{\gamma=0} = 0.$$

Ora si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\gamma} \mathfrak{J}_{\mathcal{C}_\gamma} &= \frac{d}{d\gamma} \int_{s_1}^{s_2} G(x_0 + \gamma\varphi, y_0, x'_0 + \gamma\varphi', y'_0, u_{\mathcal{C}_\gamma}) ds + \\ &+ \frac{d}{d\gamma} \int_{s_1}^{s_2} G(x_0, y_0, x'_0, y'_0, u_{\mathcal{C}_\gamma}) ds \end{aligned}$$

e perciò

$$(3) \quad \left[\frac{d}{d\gamma} \mathfrak{J}_{\mathcal{C}_\gamma} \right]_{\gamma=0} = \int_{s_1}^{s_2} \left\{ G_x \varphi + G_{x'} \varphi' + G_u \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} u_{\mathcal{C}_\gamma} \right)_{\gamma=0} \right\} ds + \\ + \int_{s_2}^{s_2} G_u \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} u_{\mathcal{C}_\gamma} \right)_{\gamma=0} ds,$$

dove gli argomenti di $G_x, G_{x'}, G_u$ sono $x_0(s), y_0(s), x'_0(s), y'_0(s), u_{\mathcal{C}_0}(s)$.

Ma dalla

$$u_{\mathcal{C}_\gamma}(s) = u_0 + \int_0^s F(x_0 + \gamma\varphi, y_0, x'_0 + \gamma\varphi', y'_0, u_{\mathcal{C}_\gamma}) ds.$$

segue, per $s \geq s_1$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \gamma} u_{\mathcal{C}_\gamma} \right)_{\gamma=0} = \int_{s_1}^s \left\{ F_x \varphi + F_{x'} \varphi' + F_u \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} u_{\mathcal{C}_\gamma} \right)_{\gamma=0} \right\} ds,$$

(1) C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*. Leipzig, 1918, p. 665 e seguenti.

e perciò, ponendo

$$\psi(s) = \exp. - \int_0^s F_u(x_0, y_0, x'_0, y'_0, u_{C_0}) ds,$$

si ha, per $s'_1 \leq s \leq s'_2$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \gamma} u_{C_\gamma} \right)_{\gamma=0} = \psi^{-1}(s) \int_{s'_1}^s (F_x \varphi + F_{x'} \varphi') \psi ds,$$

e per $s'_2 \leq s \leq L_0$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} u_{C_\gamma} \right)_{\gamma=0} &= \left[\frac{\partial}{\partial \gamma} u_{C_\gamma}(s'_2) \right]_{\gamma=0} + \int_{s'_2}^{L_0} F_u \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} u_{C_\gamma} \right)_{\gamma=0} ds = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial \gamma} u_{C_\gamma}(s'_2) \right]_{\gamma=0} \left(\exp. \int_{s'_2}^{L_0} F_u ds \right). \end{aligned}$$

Dunque, per (2) e (3),

$$(4) \quad 0 = \int_{s'_1}^{s'_2} \left\{ G_x \varphi + G_{x'} \varphi' + G_u \psi^{-1} \int_{s'_1}^s (F_x \varphi + F_{x'} \varphi') \psi ds \right\} ds + \\ + \psi^{-1}(s'_2) \left\{ \int_{s'_1}^{s'_2} (F_x \varphi + F_{x'} \varphi') \psi ds \right\} \int_{s'_2}^{L_0} G_u \left(\exp. \int_{s'_2}^s F_u ds \right) ds.$$

Integrando per parti e ponendo

$$\Lambda(s) = \int_{s'_1}^s G_u \psi^{-1} ds$$

si ha

$$\begin{aligned} \int_{s'_1}^{s'_2} G_u \psi^{-1} \left[\int_{s'_1}^s (F_x \varphi + F_{x'} \varphi') \psi ds \right] ds &= \Lambda(s'_2) \int_{s'_1}^{s'_2} (F_x \varphi + F_{x'} \varphi') \psi ds - \\ &- \int_{s'_1}^{s'_2} (F_x \varphi + F_{x'} \varphi') \psi \Lambda ds, \end{aligned}$$

e la (4) diventa così

$$(5) \quad 0 = \int_{s'_1}^{s'_2} \{ G_x \varphi + G_{x'} \varphi' + (F_x \varphi + F_{x'} \varphi') \psi [\Lambda(s'_2) - \Lambda(s) + \psi^{-1}(s'_2) \lambda(s'_2)] \} ds$$

ossia, per essere $\Lambda(s'_2) - \Lambda(s) + \psi^{-1}(s'_2)\lambda(s'_2) = \Lambda(L_0) - \Lambda(s) = \psi^{-1}(s)\lambda(s)$,

$$\int_{s_1}^{s_2} \{ G_x \varphi + G_{x'} \varphi' + (F_x \varphi + F_{x'} \varphi') \lambda \} ds = 0,$$

vale a dire

$$\int_{s_1}^{s_2} (H_x \varphi + H_{x'} \varphi') ds = 0.$$

Di qui segue la prima delle (I) nel solito modo.

Analogamente si procede per la seconda delle (I).

I PROBLEMI IN FORMA ORDINARIA.

3. Consideriamo ora, in luogo dell'equazione (1) e dell'integrale \mathcal{I}_C , l'equazione

$$(6) \quad u' = f(x, y, y', u)$$

e l'integrale

$$I_C = \int_C g(x, y, y', u) dx,$$

dove supponiamo che $f(x, y, y', u)$ e $g(x, y, y', u)$ siano due funzioni finite e continue, insieme con le loro derivate parziali del primo ordine, per ogni punto (x, y) di un dato campo A, per ogni valore finito di y' e per ogni u appartenente ad un dato intervallo (finito o infinito) Δ . Chiameremo *curve ordinarie*, relative all'equazione (6) e all'integrale I_C , le curve

$$C : y = y(x), \quad a \leq x \leq b$$

— con $y(x)$ funzione assolutamente continua — appartenenti al campo A e tali che l'equazione differenziale $u'(x) = f(x, y(x), y'(x), u(x))$ ammetta in quasi tutto (a, b) una soluzione — che indicheremo con $u_C(x)$ — assolutamente continua in tutto (a, b) e soddisfacente alle condizioni che $u_C(a)$ sia uguale ad un valore fissato u_0 di Δ , che i valori di $u_C(x)$ appartengano tutti a Δ , e che esista (finito) l'integrale

$$I_C = \int_a^b g(x, y(x), y'(x), u_C(x)) dx.$$

4. Supponiamo che le funzioni $f(x, y, y', u)$ e $g(x, y, y', u)$ soddisfino alla seguente ipotesi: ad ogni parte limitata e chiusa A' del campo A e ad ogni

intervallo finito e chiuso Δ' interno a Δ , si possano far corrispondere due numeri maggiori di zero, M e N , in modo che sia, per tutti i punti (x, y) di A' , per ogni y' , per ogni u di Δ' , e per tutti i φ_1 e φ_2 tali che $|\varphi_1| < M$, $|\varphi_2| < M$ e che $(x, y + \varphi)$ sia un punto di A e $u + \varphi_2$ un punto di Δ ,

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & |f_y(x, y + \varphi_1, y', u)| + |g_y(x, y + \varphi_1, y', u)| + \\ & + |f_u(x, y + \varphi_1, y', u + \varphi_2)| + |g_u(x, y + \varphi_1, y', u + \varphi_2)| \leq \\ & \leq N \{ 1 + |y'| + |f(x, y, y', u)| + |g(x, y, y', u)| \}. \end{aligned}$$

Allora, se $C_0[y = y_0(x), a \leq x \leq b]$ è una curva estremante per l'integrale I_C in una data classe K di curve ordinarie, relative all'equazione (6) e all'integrale I_C , e se essa soddisfa alla condizione che i valori $u_{C_0}(x)$ siano tutti interni all'intervallo Δ , ogni suo arco α_0 , i cui punti, esclusi al più quelli terminali, siano interni al campo A e di indifferenza rispetto al campo A ed alla classe K , verifica l'equazione

$$(II) \quad \int_{a_0}^x h_y dx - \frac{d}{dx} \int_{a_0}^x h_{y'} dx = c \text{ (cost.)},$$

dove si è posto $h \equiv g + \lambda f$, con

$$\lambda(x) = \int_x^b g_u(\xi, y_0(\xi), y'_0(\xi), u_{C_0}(\xi)) \left(\exp. \int_{\xi}^x f_u(\eta, y_0(\eta), y'_0(\eta), u_{C_0}(\eta)) d\eta \right) d\xi$$

a_0 essendo l'ascissa del primo punto terminale di α_0 ⁽¹⁾.

Per la dimostrazione di questo teorema basta procedere in modo analogo a quanto abbiamo fatto nel n. 1 della nostra Memoria *Sulle proprietà delle estremanti*⁽²⁾ e utilizzare considerazioni corrispondenti a quelle già sfruttate qui nel n. 2.

OSSERVAZIONE. — La conclusione del teorema qui dato sussiste indipendentemente dalla ipotesi relativa alla (α) se su tutto l'arco α_0 la funzione $y_0(x)$ è lipschitziana.

5. Supponiamo che le funzioni $f(x, y, y', u)$ e $g(x, y, y', u)$ soddisfino alla seguente ipotesi: ad ogni parte limitata e chiusa A' del campo A e ad ogni intervallo finito e chiuso Δ' interno a Δ , si possano far corrispondere due numeri maggiori di zero, M e N , in modo che sia, per tutti i punti (x, y) di A , per

(1) Questo teorema estende, contenendoli tutti come casi particolari, quelli dati da B. MANIÀ, nella sua citata Memoria: *Proprietà delle estremanti nei problemi di Lagrange*, ai nn. 10, 11, 12, perché l'espressione $g_u + \lambda f_u + \lambda'$ che figura nelle equazioni ottenute dal Manià è identicamente nulla sulla C_0 .

(2) «Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa», ser. II, vol. III, 1934, pp. 213–237.

ogni y' , per ogni u di Δ' e per tutti i φ_1 e φ_2 tali che $|\varphi_1| < M$, $|\varphi_2| < M$ è che $(x + \varphi_1, y)$ sia un punto di A e $u + \varphi_2$ un punto di Δ ,

$$\begin{aligned} (\alpha') \quad & |f_x(x + \varphi_1, y, y', u)| + |g_x(x + \varphi_1, y, y', u)| + \\ & + |f_u(x + \varphi_1, y, y', u + \varphi_2)| + |g_u(x + \varphi_1, y, y', u + \varphi_2)| \leq \\ & \leq N \{ 1 + |y'| + |f(x, y, y', u)| + |g(x, y, y', u)| \}. \end{aligned}$$

Allora, se $C_0[y = y_0(x), a \leqq x \leqq b]$ è una curva estremante per l'integrale I_C in una data classe K di curve ordinarie relative all'equazione (6) e all'integrale I_C , e se essa soddisfa alla condizione che i valori $u_{C_0}(x)$ siano tutti interni all'intervallo Δ , ogni suo arco α_0 , i cui punti, esclusi al più quelli terminali, siano interni al campo A e di indifferenza rispetto al campo A ed alla classe K , verifica l'equazione

$$(III) \quad \int_{a_0}^x b_x dx - \frac{d}{dx} \int_{a_0}^x (b - y' h_{y'}) dx = c \text{ (cost.)},$$

dove si è posto $b \equiv g + \lambda f$, con

$$\lambda(x) = \int_x^b g_u(\xi, y_0(\xi), y'_0(\xi), u_{C_0}(\xi)) \left(\exp \int_\eta^\xi f_u(\eta, y_0(\eta), y'_0(\eta), u_{C_0}(\eta)) d\eta \right) d\xi,$$

a_0 essendo l'ascissa del primo punto terminale di α_0 ⁽¹⁾.

Anche per questo teorema la dimostrazione si ottiene procedendo in modo analogo a quanto abbiamo fatto nel n. 11 della nostra Memoria già citata (loc. cit. in ⁽²⁾ a p. prec.) e utilizzando considerazioni corrispondenti a quelle già sfruttate in quanto precede.

Vale anche qui un'osservazione analoga a quella posta alla fine del n. 4.

(1) Questo teorema estende, contenendoli tutti come casi particolari, quelli dati da B. MANIÀ in loc. cit. in ⁽¹⁾ a p. prec. ai nn. 15, 16, 17, perché l'espressione $g_u + \lambda f_u + \lambda'$, che figura nelle equazioni ottenute dal Manià, è ancora identicamente nulla sulla C_0 .

Meccanica. — *Notevole complemento delle condizioni del Love e sue applicazioni.* Nota⁽¹⁾ del Socio G. A. MAGGI.

§ 1. Le note «condizioni del Love», alla fronte d'onda di una successione di onde elettromagnetiche,

$$(1) \quad \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{E} = -\operatorname{grad} n \wedge \mathbf{H} \quad , \quad \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H} = \operatorname{grad} n \wedge \mathbf{E} \quad ,$$

sono dedotte dallo stesso Love dalle equazioni di Maxwell-Hertz⁽²⁾

$$(2) \quad \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathbf{H} \quad , \quad \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E} \quad .$$

Invochiamo ora le condizioni ad una superficie di discontinuità, che completano il quadro delle equazioni fondamentali del campo elettromagnetico⁽³⁾,

$$(3) \quad \operatorname{rot}^* \mathbf{E} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot}^* \mathbf{H} = 0$$

esprimenti la continuità del componente tangenziale di \mathbf{E} e di \mathbf{H} .

Applicate alla fronte d'onda, a valle della quale \mathbf{E} ed \mathbf{H} sono intese ricevere in ogni punto il valor zero, e a monte valori generalmente diversi dallo zero⁽⁴⁾, esse ci dicono che, nei punti della fronte d'onda, deve essere nullo il componente tangenziale di \mathbf{E} e di \mathbf{H} .

Ma, per le (1), i vettori \mathbf{E} e \mathbf{H} , nei punti della fronte d'onda, saranno o nulli o paralleli al piano tangente, con che si confonderanno col loro componente tangenziale.

Si conclude che, negli stessi punti, \mathbf{E} ed \mathbf{H} non potranno essere altri-menti che nulli⁽⁵⁾.

(1) Presentata nella seduta del 1º novembre 1936.

(2) A. E. LOVE, *Motions with discontinuities at wave-front.* « Proc. of the London Math. Soc. », vol. I (2) 1904.

(3) G. A. MAGGI, *Teoria fenomenologica del campo elettromagnetico.* (Milano, Hoepli, 1931).

(4) Il termine «fronte d'onda» potrà eventualmente estendersi ad una «retrofronte», che lasci lo spazio imperturbato dietro di sè, nei punti della quale naturalmente si verificheranno le stesse condizioni.

(5) Secondo la teoria delle caratteristiche, per cui ved. T. LEVI-CIVITA, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa* (Bologna, Zanichelli, 1931), § 7, colla aggiunta delle (3) alle (1), si ottengono tutte le condizioni sulla fronte d'onda.

Ho con questo riprodotto il contenuto della mia *Piccola Nota*, nel «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana»⁽¹⁾, consentendolo la sua brevità. Mi propongo qua di mostrarne alcune dirette applicazioni, cui mi sembra conferire un certo interesse potersi reputare, nelle relative questioni, come definitive.

§ 2. In primo luogo, sia

$$(4) \quad \mathbf{F} = \Sigma f(P) \mathcal{F}(\tau) \quad (\mathbf{F} = \mathbf{E}, \mathbf{H}),$$

$$(5) \quad \tau = \alpha \left(\frac{n}{a} - t \right),$$

col noto significato dei simboli. E con questo sia

$$(6) \quad \tau = k$$

l'equazione della fronte d'onda.

Condizione perchè nei punti della fronte d'onda sia

$$(7) \quad \mathbf{F} = \mathbf{o},$$

risulta

$$(8) \quad \mathcal{F}(k) = \mathbf{o}.$$

Restano quindi disponibili le $f(P)$, per soddisfare alle (2), in tutto il campo, e, con (6), alle (1). E regge così l'obbiezione della mia Nota *Sulla propagazione delle onde di forma qualsivoglia nei mezzi isotropi* dei «Rendiconti dei Lincei» del 1920⁽²⁾ alle limitazioni della forma delle onde soddisfacenti l'equazione del d'Alembert, a cui perviene il Somigliana nella sua Nota *Sulla relazione fra il principio di Huygens e l'ottica geometrica* degli «Atti della R. Accademia di Torino» del 1919⁽³⁾; obbiezione consistente nel rilevare che tali limitazioni sono subordinate all'ipotesi che la quantità che si propaga per onde non dipenda da P che per mezzo di n .

§ 3. In secondo luogo, siano le onde armoniche, e precisamente

$$(9) \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_1(P) \cos \tau + \mathbf{F}_2(P) \sin \tau \quad (\mathbf{F} = \mathbf{E}, \mathbf{H}),$$

con τ dato dalla (5).

Troviamo, per necessaria e sufficiente condizione che si verifichi (7),

$$(10) \quad \mathbf{F}_1(P) = \mathbf{o} \quad , \quad k = \mathbf{o}.$$

(1) Anno XV, n. 3, giugno 1936.

(2) Vol. XXIX (5). Riprodotta nel volume *Selecta*. (Milano, E. S. T., 1932).

(3) Vol. LIV. Riprodotta nel volume *Memorie Scelte*. (Torino, Lattes, 1936).

La (9) fornisce con questo

$$(11) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_2(P) \sin \alpha \left(\frac{n}{a} - t \right), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_2(P) \sin \alpha \left(\frac{n}{a} - t \right).$$

Introducendo le quali espressioni in (2), se ne ricava⁽¹⁾

$$(12). \quad \begin{cases} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{E}_2 = -\operatorname{grad} n \wedge \mathbf{H}_2, & \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}_2 = \operatorname{grad} n \wedge \mathbf{E}_2, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_2 = 0 & \operatorname{rot} \mathbf{H}_2 = 0, \end{cases}$$

le quali valgono in tutti i punti P del campo, e le superiori per la superficie d'onda generica, passante per P.

E queste equazioni conducono alla conclusione che, *in campo regolare, cioè salvo singolarità dei vettori in uno o più punti del campo*, un campo limitato da superficie d'onda non può essere altrimenti che imperturbato, e le superficie d'onda non possono essere altrimenti che piani — se illimitati, a coefficienti costanti — o calotte sferiche, che non possono raggiungere la superficie sferica intera⁽²⁾.

§ 4. Queste limitazioni comprendono quelle che, per la prima volta, furono enunciate dal prof. Sona⁽³⁾. Col quale, *sulla pura base delle condizioni del Love* — e cioè senza il nuovo complemento — fu oggetto di discussione la costante k della (6), a cui, per le onde armoniche rappresentate da (9), egli prescrive più tardi il valore zero, invece che reputarla suscettibile di un valore arbitrario, col disporre a piacere della base della successione di onde, donde si conta n ⁽⁴⁾.

Col complemento, si rende ragione di quella prescrizione, riducendosi, come s'è veduto, le (9) a

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 \sin \alpha \left(\frac{n}{a} - t \right) \quad (\mathbf{F} = \mathbf{E}, \mathbf{H}),$$

(1) G. A. MAGGI e B. FINZI, *Condizioni sulla fronte d'onda e onde elettromagnetiche*. «Rendic. della R. Acc. dei Lincei», vol. XXIII (6), 1936, § 5.

(2) G. A. MAGGI e B. FINZI, *Condizioni d'esistenza delle onde elettro-magnetiche armniche*. «Rendic. del R. Ist. Lomb.», vol. LXVII (2), 1934-XII, § 3; G. A. MAGGI, *Onde elettromagnetiche armniche*. «Rendic. del Seminario Matematico e Fisico di Milano», vol. IX, 1935, § 11.

(3) L. SONA, *Un'osservazione riguardante la propagazione delle onde elettromagnetiche*. «Rendic. della R. Acc. dei Lincei», vol. XIX (6), 1934.

(4) G. A. MAGGI e B. FINZI, *Una questione relativa alle onde elettromagnetiche*. «Rendic. della R. Acc. dei Lincei», vol. XII (6), 1935.

con

$$\frac{n}{d} - i = 0$$

per equazione della fronte d'onda.

§ 5. Ancora, coi precedenti risultati, riesce messa in disparte la questione da me originariamente posta colla mia Nota dell'« Istituto Lombardo », *Sul problema della riflessione e della rifrazione delle onde elettromagnetiche armoniche di forma qualsivoglia ad una superficie piana*⁽¹⁾, già nel caso delle onde elettromagnetiche armoniche emananti da un punto, che succede immediatamente a quella delle onde piane. Difatti, le onde riflesse sono mezze superficie sferiche, soddisfacenti quindi la precedente limitazione (§ 3): ma le onde rifratte sono superficie parallele ed un iperboloido a due falde, o ad un ellissoide di rotazione; tali quindi da non poter esser rappresentate dalla (11), e, in ultima analisi, dalla (9).

§ 6. È questo un saggio della scarsa applicazione che consentono le ricordate limitazioni. Per cui non mi sembra fuor di luogo chiudere col richiamare sommariamente un saggio, alla sua volta, di contornare l'ostacolo, per trar profitto di formole risultate abbastanza conformi all'esperienza. Qual'è la costruzione del Love, nell'articolo citato a nota⁽²⁾ di p. 246 (§§ 21-24 e Summary), delle onde emanate da un oscillatore del Hertz, colla quale procura di conciliare la soluzione dello stesso Hertz⁽³⁾ colle condizioni al contorno — fronte e retrofronte (cfr. nota⁽⁴⁾ a p. 246) — alle quali « non potè trovare che egli abbia fatto attenzione ». Le onde del Hertz sono armoniche, sferiche, con infinito dei due vettori nel centro: invadono un campo imperturbato e lasciano un campo imperturbato dietro di sè. Il Love assegna onde somiglianti a queste per **H**, ma per **E**, la combinazione di onde somiglianti a queste col campo creato da un doppietto elettrico posto nel centro, trascinato da esse. I vettori **E** e **H** così rappresentati soddisfanno (2) e (1), non però (3), e la parte armonica si presta a surrogare i vettori del Hertz. Orbene, concependo la propagazione, non nel vuoto, ma in uno spazio dove preesiste un campo eguale e contrario a quello creato dal doppietto elettrico, questo si elimina al passaggio delle onde, per trovarsi a valle, e ricomparire a monte di esse. Notisi, già col Hertz, la presenza di un punto d'infinito, e, col Love, l'abbandono della propagazione nello spazio imperturbato⁽⁵⁾.

(1) « Rendic. del R. Ist. Lomb. », vol. LXVI (2), 1933.

(2) H. HERTZ, *Die Kräfte elektrischer Schwingungen behandelt nach der Maxwell'schen Theorie. Gesammelte Werke.* (Leipzig, 1895), Band. II, p. 147.

(3) Per particolari, ved. anche L. SONA, *Complemento alla Nota "Sulle vibrazioni elettromagnetiche di carattere armonico semplice".* « Atti del R. Istituto Veneto », to. XLIV, 1934-35.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Complemento al principio di corrispondenza, per le corrispondenze a valenza con punti uniti di molteplicità qualsiasi.* Nota II⁽¹⁾ di B. SEGRE, presentata dal Socio F. SEVERI.

Mi propongo ora di estendere il teorema conseguito nella Nota I⁽²⁾, alle corrispondenze algebriche a valenza $\leqslant 0$ — dotate di punti uniti semplici o multipli — fra due curve algebriche sovrapposte.

Incomincio a tal uopo coll'indicare in un paragrafo preliminare, avente interesse a sè, come una corrispondenza τ (non identica) su di una curva \mathcal{L} — in relazione ad uno U dei suoi punti uniti (di molteplicità n qualunque) — ammetta sempre un carattere geometrico intrinseco ω , determinato e finito, sotto convenienti ipotesi di regolarità aventi senso nel campo reale (e soddisfatte se \mathcal{L} e τ si suppongono algebriche od anche soltanto analitiche regolari). Per brevità, denomino quell'invariante ω il *residuo* della corrispondenza nel punto unito considerato; nel caso particolare in cui U sia un punto unito semplice di τ , esso risulta legato al coefficiente x di dilatazione di τ in U mediante la formula

$$(1) \quad \omega = \frac{1}{1-x}.$$

Passo quindi (nel § II) ad approfondire lo studio del residuo ω di una corrispondenza τ sopra una curva \mathcal{L} nell'ipotesi che τ ed \mathcal{L} siano analitiche regolari, giungendo fra l'altro ad una semplice interpretazione geometrica di ω avente carattere invariantivo, la quale infine mi permette (§ III) di ottenere con un sol tratto di penna l'estensione voluta.

§ I. — RESIDUO IN UN QUALUNQUE PUNTO UNITO DI UNA CORRISPONDENZA REGOLARE SOPRA UNA CURVA QUAISIASI.

1. Sia \mathcal{L} una curva il cui punto si esprima come funzione invertibile di un parametro x (reale o complesso); funzione che ammettiamo definita

(1) Pervenuta all'Accademia il 5 ottobre 1936.

(2) B. SEGRE, *Un complemento al principio di corrispondenza, per le corrispondenze a valenza zero sulle curve algebriche.* Questo volume dei «Rendiconti», p. 201.

per $|x - x_0|$ sufficientemente piccolo, e dotata di derivate fino all'ordine $2n-1$ incluso ($n \geq 1$). Consideriamo su Ω una corrispondenza regolare τ , rappresentabile cioè con un'equazione

$$(2) \quad \theta(x, X) = 0$$

fra le coordinate x ed X di due punti omologhi di Ω , il cui primo membro possegga tutte le derivate parziali d'ordine $2n-1$ continue; e supponiamo che τ abbia nel punto $U(x_0)$ di Ω un punto unito, multiplo secondo n , ossia che risulti

$$(3) \quad \theta(x_0, x_0) = 0$$

ed inoltre (se $n > 1$)

$$(4) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X} \right)^i \theta_0 = 0 \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, n-1,$$

ma:

$$(5) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X} \right)^n \theta_0 \neq 0$$

[nelle (4), (5) e nelle formule che seguono la potenza dell'operatore scritto entro parentesi donde ha l'usuale significato convenzionale, mentre l'indice o denota che tutte le derivate vanno calcolate nel punto $x = x_0, X = x_0$].

Nelle ipotesi ammesse, diremo che il numero (reale o complesso, ma sempre determinato e finito):

$$(6) \quad \omega = \left| \frac{n!}{\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X} \right)^n \theta_0} \right|^n \times \\ \times \begin{vmatrix} \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X} \right)^{n-1} \theta_0 & \frac{1}{(n-2)!} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X} \right)^{n-2} \theta_0 & \dots & \frac{\partial}{\partial X} \theta_0 \\ \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X} \right)^{n+1} \theta_0 & \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X} \right)^n \theta_0 & \dots & \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X} \right)^2 \theta_0 \\ \frac{1}{(n+2)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X} \right)^{n+2} \theta_0 & \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X} \right)^{n+1} \theta_0 & \dots & \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X} \right)^3 \theta_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(2n-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X} \right)^{2n-1} \theta_0 & \frac{1}{(2n-2)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X} \right)^{2n-2} \theta_0 & \dots & \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X} \right)^n \theta_0 \end{vmatrix}$$

è il *residuo* di τ nel punto U . Mediante facili calcoli, un po' laboriosi, si constata che il numero suddetto non muta tanto se su Ω si cambia comunque il parametro x , quanto se si altera θ per un fattore funzione arbitraria di x, X , non nullo per $x = x_0, X = x_0$ e dotato nell'intorno di tale punto di derivate parziali d'ordine $2n-1$ continue. Questo dimostra che:

Il residuo di una corrispondenza in un punto unito è un carattere intrinseco della corrispondenza, invariante di fronte alle trasformazioni topologiche regolari della curva sostegno,

ciò che verrà pure in seguito provato per altra via, nell'ipotesi che Ω e τ siano analitiche.

Ora ci limitiamo ad aggiungere che per $n = 1$, e cioè quando U sia un punto unito semplice di \mathfrak{F} , la (6) diventa

$$\omega = \frac{\partial}{\partial X} \theta_o : \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X} \right) \theta_o$$

ed equivale proprio alla (1), in quanto il coefficiente α di dilatazione di T in U è dato da:

$$\kappa = - \frac{\partial}{\partial x} \theta_o : \frac{\partial}{\partial X} \theta_o .$$

Dunque, il fatto che x è un carattere topologico di τ in U (di significato geometrico noto)⁽¹⁾, implica già il carattere geometrico intrinseco di ω nel caso suddetto.

2. Il residuo ω^* della corrispondenza τ' inversa della τ nel punto U , si ha ovviamente dalla (6) scambiando fra loro gli uffici delle lettere x ed X ; con ciò si vengono solo ad alterare gli elementi della prima orizzontale del determinante che figura in quella formula, onde tosto si trae:

$$\omega + \omega^* = \left[\frac{n!}{\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right)^n \theta_0} \right]^n \times$$

$$(n-1)! \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right)^{n-1} \theta_0 \quad \frac{1}{(n-2)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right)^{n-2} \theta_0 \dots \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right) \theta_0$$

$$\times \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right)^{n+1} \theta_0 \quad \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right)^n \theta_0 \dots \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right)^2 \theta_0$$

$$\frac{1}{(n+2)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right)^{n+2} \theta_0 \quad \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right)^{n+1} \theta_0 \dots \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right)^3 \theta_0$$

$$\dots$$

$$\frac{1}{(2n-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right)^{2n-1} \theta_0 \quad \frac{1}{(2n-2)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right)^{2n-2} \theta_0 \dots \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right)^n \theta_0$$

L'ultimo determinante si riduce al suo termine principale, poichè, in forza delle (4), esso ha nulli tutti gli elementi al disopra della diagonale principale; perciò risulta semplicemente $\omega + \omega^* = n$, ossia:

(1) Cfr. B. SEGRE, *Invarianti topologici relativi ai punti uniti delle trasformazioni regolari fra varietà sovrapposte*. Questo volume dei «Rendiconti», p. 195.

La somma dei due residui relativi ad un punto unito per una corrispondenza qualsiasi e per l'inversa di questa, è sempre uguale alla molteplicità di detto punto unito.

Avuto riguardo al n. 1, si ottiene così incidentalmente una verifica del carattere intrinseco della molteplicità di un punto unito per una corrispondenza (regolare) qualunque.

§ II. — I PUNTI UNITI ED I RESIDUI DELLE CORRISPONDENZE
SOPRA UNA CURVA NEL CAMPO ANALITICO.

3. Conservando le notazioni del n. 1, supponiamo più particolarmente che la curva \mathfrak{L} e la corrispondenza \mathfrak{T} siano analitiche regolari, ammettiamo cioè l'olomorfismo di tutte le funzioni ivi considerate, e dimostriamo che:

Il residuo di \mathfrak{T} nel punto $U(x_0)$ può venir semplicemente definito come il residuo, in tale punto, della funzione

$$(7) \quad \varphi(x) = \left[\frac{\partial}{\partial X} \log \theta(x, X) \right]_{X=x} .$$

Assunto infatti per semplicità x_0 uguale allo zero, com'è ovviamente lecito senza restrizione, sviluppiamo la $\theta(x, X)$ in serie di potenze di $x, X - x$; avendo riguardo alle (3), (4), (5), e scrivendo esplicitamente solo i termini che ci interessano, si avrà:

$$(8) \quad \begin{aligned} \theta(x, X) &= (\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n+1} + \cdots + \alpha_{n-1} x^{2n-1} + \cdots) \\ &\quad + (X - x)(a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1} + \cdots) + \cdots \end{aligned} \quad \text{con } \alpha_0 \neq 0,$$

dove i puntini fuori delle parentesi indicano termini contenenti come fattore $X - x$ almeno a 2° grado. Dalle (7), (8) si trae senz'altro

$$\varphi(x) = \frac{a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1} + \cdots}{\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n+1} + \cdots + \alpha_{n-1} x^{2n-1} + \cdots} ;$$

ed il residuo di questa funzione per $x = 0$, che — com'è facile vedere — vale

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \hline \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \cdots & \alpha_0 \end{array} ,$$

si identifica precisamente col secondo membro della (6), quando si tenga conto della (8).

Notiamo che, nell'ipotesi che τ non ammetta $U(x_0)$ come punto unito, e cioè supposto $\theta(x_0, x_0) = 0$, la funzione (7) risulta regolare in tale punto, onde il relativo residuo ha il valore zero. Con opportuna estensione del linguaggio, converremo pertanto di dire che *una corrispondenza τ sopra una curva \mathcal{L} ha residuo nullo, in ogni punto di \mathcal{L} che per essa non sia unito.*

Se infine ci si riferisce ad una corrispondenza τ somma di altre due corrispondenze τ_1 e τ_2 , aventi su \mathcal{L} le equazioni $\theta_1(x, X) = 0$ e $\theta_2(x, X) = 0$, può supporci $\theta(x, X) \equiv \theta_1(x, X) + \theta_2(x, X)$, onde:

$$\left[\frac{\partial}{\partial X} \log \theta(x, X) \right]_{X=x} = \left[\frac{\partial}{\partial X} \log \theta_1(x, X) \right]_{X=x} + \left[\frac{\partial}{\partial X} \log \theta_2(x, X) \right]_{X=x}.$$

Ne consegue che:

In ogni punto di una data curva, il residuo della corrispondenza somma di due o più corrispondenze qualsiasi è sempre uguale alla somma dei residui di queste ultime.

La proposizione sussiste anche nel campo reale, e può venir stabilita in tutta la sua generalità poggiando sulla (6); il calcolo che a tal uopo sarebbe necessario può però evitarsi, quando si osservi ch'esso nel campo analitico si ridurrebbe ad una mera verifica e si rammenti il principio di permanenza delle proprietà formali.

4. Ferme restando le ipotesi fatte al principio del n. 3, consideriamo ora su \mathcal{L} una corrispondenza analitica regolare τ_t dipendente con continuità da un parametro t (reale o complesso) e che, p. es. per $t \rightarrow 0$, ammetta come limite τ . Se

$$\theta(x, X; t) = 0$$

è l'equazione di τ_t [con θ funzione continua dei suoi 3 argomenti ed olomorfa rispetto ai primi 2 in un conveniente intorno di $(x_0, x_0, 0)$], i punti uniti di questa corrispondenza sono forniti dalla

$$(9) \quad \theta(x, x; t) = 0;$$

e l'aver τ in $U(x_0)$ un punto unito n -plo, si traduce nella condizione che la (9) possegga per $t = 0$ la radice n -pla $x = x_0$. In base al teorema sulla continuità delle radici di un'equazione analitica⁽¹⁾, si può per-

(1) Cfr., p. es., É. PICARD, *Traité d'analyse*, to. II, 3^a ed. (Paris, Gauthier-Villars, 1925), pp. 278-280; qui vien supposto che il primo membro dell'equazione presa a considerare sia olomorfo nelle 2 variabili da cui dipende: ma la dimostrazione sussiste inte-

tanto trovare un numero τ reale positivo e determinare sul piano della variabile complessa x un cerchio Γ di centro x_0 e contorno \mathcal{C} , per modo che — preso comunque t in modulo $\leq \tau$ — la funzione $\theta(x, X; t)$ risulti olomorfa per x ed X in Γ , mentre la $\theta(x, x; t)$ non si annulli mai su \mathcal{C} ed abbia nell'interno di Γ un certo numero m (≥ 1 e $\leq n$) di zeri

$$(10) \quad x_1(t), \quad x_2(t), \quad \dots, \quad x_m(t),$$

tutti tendenti ad x_0 per $t \rightarrow 0$.

La funzione

$$\varphi(x, t) = \left[\frac{\partial}{\partial X} \log \theta(x, X; t) \right]_{X=x}$$

è di conseguenza continua per x variabile su \mathcal{C} e $|t| \leq \tau$; essa è inoltre meromorfa entro Γ , sempre per $|t| \leq \tau$, dove ha come uniche singolarità polari i punti (10) od alcuni di essi. Dunque intanto:

$$(11) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \varphi(x, t) dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \varphi(x, 0) dx,$$

intendendo che le due integrazioni vadano estese al contorno \mathcal{C} di Γ , percorso una sola volta nel verso positivo. Il secondo membro della (11) non è che il residuo di $\varphi(x, 0)$ nel punto x_0 , ossia — in base al n. 3 — esso è precisamente uguale al residuo di τ in $U(x_0)$; l'espressione sotto il segno di limite nel primo membro della (11) vale parimente (per t fissato ed in valor assoluto $\leq \tau$) la somma dei residui di $\varphi(x, t)$ nei punti (10), ed uguaglia quindi la somma dei residui di τ in tali punti. Si conclude che:

Quando su di un ramo \mathfrak{L} di curva analitica una trasformazione analitica regolare τ_t — variando con continuità — tende ad una trasformazione analitica regolare τ , un punto unito U di τ risulta limite di alcuni U_1, U_2, \dots, U_m dei punti uniti di τ_t ; ebbene, la somma dei residui di τ_t in questi ultimi punti ammette sempre un limite determinato e finito, dipendente unicamente da τ , ed uguale precisamente al residuo di τ nel punto U .

OSSERVAZIONE I. — Va rilevato che i singoli residui di τ_t nei punti U_1, U_2, \dots, U_m suddetti hanno generalmente per limite ∞ , onde non sarebbe lecito sostituire nel precedente enunciato al limite della loro somma la somma dei loro limiti. Così, p. es., se τ_t è una proiettività iperbolica sulla retta, i coefficienti κ_1 e κ_2 di dilatazione di τ_t nei suoi due

gralmente anche se si ammette soltanto che quel primo membro sia continuo nelle due variabili ed olomorfo rispetto ad una opportuna di esse.

punti uniti non sono altro che i due valori — fra loro reciproci — della caratteristica di τ_i ; quando questa proiettività (variando con continuità) tende ad una proiettività parabolica, x_1 e x_2 ammettono per limite l'unità, ed i residui relativi $1:(1-x_1)$ ed $1:(1-x_2)$ tendono entrambi ad ∞ .

OSSERVAZIONE II. — Applicando l'ultimo teorema tanto alla τ_i variabile quanto alla sua inversa τ_i^{-1} , e ricordando il n. 2, si trae incidentalmente il fatto noto che la molteplicità per τ del punto unito U risulta uguale alla somma delle molteplicità dei punti uniti di τ_i che tendono ad U.

5. Nell'enunciato stabilito al numero precedente può, in particolare, ovviamente sempre supporsi che la corrispondenza τ_i variabile sia unicamente dotata di punti uniti semplici, mentre invece τ sia una trasformazione analitica arbitraria di \mathcal{L} in sè, non vincolata a soddisfare a tale condizione. Poichè già è stata assodata l'invarianza topologica del residuo di una corrispondenza in un suo punto unito semplice (n. 1), la proposizione suddetta viene senz'altro a dimostrare il carattere geometrico intrinseco del residuo di una corrispondenza analitica regolare in un suo qualunque punto unito multiplo, offrendo in pari tempo un'interessante interpretazione geometrica di detto residuo (che può, p. es., servire a dare una nuova prova, di carattere sintetico, pel teorema finale del n. 3).

§ III. — LE CORRISPONDENZE A VALENZA (CON PUNTI UNITI SEMPLICI O MULTIPLI) SULLE CURVE ALGEBRICHE.

6. L'estensione del risultato conseguito nella Nota I alle corrispondenze algebriche a valenza zero dotate di punti uniti multipli si effettua ora senza alcuna difficoltà, nell'uno o nell'altro dei due modi seguenti.

Si può intanto ripetere passo passo la dimostrazione svolta nella Nota citata, togliendo solo la restrizione che la corrispondenza che si considera non debba avere che punti uniti semplici, ed usufruendo del primo teorema stabilito nell'attuale n. 3.

Oppure, data sopra una curva algebrica una qualunque corrispondenza τ a valenza zero, d'indici (α, β) e dotata di punti uniti multipli, si può considerare il sistema continuo di corrispondenze algebriche cogli stessi indici ed a valenza zero a cui essa appartiene. La generica § di queste corrispondenze ha $\alpha + \beta$ punti uniti distinti⁽¹⁾, e la somma dei rela-

(1) Cfr. F. SEVERI, *Trattato di geometria algebrica*, vol. I, parte 1^a. (Bologna, Zanichelli, 1926), p. 226.

tivi residui è costantemente uguale a β , in virtù appunto della Nota I; non v'è dunque che da far tendere \mathfrak{S} a \mathfrak{T} , applicando opportunamente il teorema del n. 4, per vedere che anche la somma dei residui di \mathfrak{T} vale β . In conclusione:

Una qualunque corrispondenza algebrica (α, β) a valenza zero sopra una curva algebrica, ammette sempre nei suoi punti uniti (semplici o multipli) residui aventi per somma β .

7. Proviamo infine, più generalmente, che:

Sopra una curva algebrica di genere p , una qualunque corrispondenza algebrica (α, β) a valenza $\gamma = 0$ ammette nei suoi punti uniti (semplici o multipli) residui aventi per somma $\beta + \gamma p$.

Questa proposizione (che per $\gamma = 0$ si identifica con quella del n. 6) è intanto di verifica immediata per le corrispondenze elementari \mathcal{E} a punti uniti semplici [corrispondenze $(n - 1, n - 1)$, associanti fra loro punti che appartengono ad un medesimo gruppo di una g_n^1 generica]; una corrispondenza \mathcal{E} è infatti a valenza 1 e, poichè essa ha carattere involutorio, i residui nei suoi $[2n + 2p - 2]$ punti uniti valgono tutti $1/2$. La suddetta proposizione sussiste altresì per una generica corrispondenza (ad indici uguali ed a valenza — 1) prodotto di due corrispondenze elementari; invero, i punti uniti di una corrispondenza $\mathfrak{F} = \mathcal{E}_1 \cdot \mathcal{E}_2$ siffatta sono forniti dalle coppie di punti che si corrispondono tanto in \mathcal{E}_1 quanto in \mathcal{E}_2 , ed è facile vedere che la somma dei residui di \mathfrak{F} nei due punti di una di tali coppie vale sempre 1.

Si stabilisce allora il risultato enunciato, per una corrispondenza algebrica \mathfrak{T} arbitraria a valenza $\gamma < 0$ o > 0 , applicando il teorema del n. 6 alla corrispondenza a valenza zero che si ottiene sommando \mathfrak{T} con $|\gamma|$ corrispondenze rispettivamente (a valenza $+1$ o -1) del primo o del secondo dei due tipi dianzi considerati, e ricordando il teorema finale del n. 3.

Va da sè, poi, come sopra una curva algebrica possa similmente indursi un COMPLEMENTO al principio generale di corrispondenza, relativo a due o più corrispondenze algebriche fra loro dipendenti⁽¹⁾.

(1) Su tale principio ved. p. es. F. SEVERI, op. cit., n. 79.

Matematica. — *Sulle corrispondenze funzionali inverse di-
ramate: teoria generale e applicazioni ad alcune equazioni fun-
zionali non lineari e al problema di Plateau.* Nota I⁽¹⁾ di
R. CACCIOPPOLI, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Nel problema generale dell'inversione di una corrispondenza tra spazi funzionali rientrano spontaneamente come casi particolari numerosi problemi esistenziali dell'Analisi: per le quistioni di esistenza « in piccolo » si tratta di corrispondenze fra intorni, per l'esistenza « in grande » dell'inversione completa di trasformazioni tra spazi o varietà comunque estesi. Ed una fondamentale distinzione che si presenta è quella fra i casi di unicità della soluzione, che danno luogo a corrispondenze biunivoche, ed i casi in cui, la soluzione non essendo generalmente unica, l'inversione conduce ad una trasformazione polidroma.

I problemi della prima categoria sono sinora stati prevalentemente oggetto di studio, e sopra tutto quello tipico dei valori al contorno per le equazioni ellittiche a derivate parziali; le ricerche di Bernstein e di Lichtenstein sull'argomento sono ben note. Ho sviluppato in alcuni lavori precedenti⁽²⁾ la teoria generale delle corrispondenze biunivoche, applicandola al problema generalizzato di Dirichlet, ed ho ottenuto in proposito, tanto per le equazioni in due che per quelle in n variabili, i risultati più generali fin qui conosciuti. Ho considerato altresì alcune classi di equazioni integrali non lineari; altri casi sono stati esaminati da Scorza-Dragoni⁽³⁾.

Più riposti sono i problemi della seconda categoria, p. es., quelli relativi ad equazioni integrali e ad equazioni a derivate parziali non verificanti la condizione di unicità⁽⁴⁾. Ma fra essi ve n'è anche qualcuno di fondamentale importanza: tipico è il problema, generalizzante quello di Plateau, delle superficie estremali, a contorno assegnato, di un integrale doppio regolare di forma parametrica. Lo studio delle equazioni ellittiche « in forma para-

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 ottobre 1936.

(2) « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », III (1932). Questi « Rendiconti », vol. XVI [6] (2° sem., 1932); vol. XVIII [6] (2° sem., 1933); vol. XIX [6] (1° sem., 1934); vol. XXII [6] (2° sem., 1935).

(3) Questi « Rendiconti », vol. XXII [6] (2° sem., 1935); « Boll. Un. Mat. Italiana », XV (1936); « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », VII (1936).

(4) Questi ultimi sono stati recentemente trattati da LERAY e SCHAUDER, mediante considerazioni topologiche che estendono la nozione di grado di una trasformazione secondo Brouwer a certe trasformazioni degli spazi funzionali lineari (« Ann. Éc. Normale », to. 51 [3], 1934).

metrica » è stato iniziato da Miranda⁽¹⁾, che ha trattato la quistione della esistenza « in piccolo », sotto la condizione di unicità; per indagare l'esistenza « in grande » occorre abbandonare tale condizione, e prendere a considerare una corrispondenza funzionale non biunivoca.

In questa Nota e nella successiva presento una teoria generale dell'inversione, locale e completa, delle corrispondenze funzionali univoche in un sol senso: teoria semplice al possibile, ma praticamente generalissima, e indirizzata alle applicazioni, delle quali indico alcune fra le più immediate e notevoli. Nei risultati circa l'inversione intorno ai punti ove viene a mancare la condizione fondamentale di biunivocità locale (punti *critici*, o *diramazioni*) si inquadrono quelli di Schmidt⁽²⁾ sulla risoluzione in piccolo delle equazioni integrali non lineari, e gli analoghi di Lichtenstein sulle equazioni ellittiche a derivate parziali⁽³⁾.

Considero dapprima per semplicità, come nelle mie precedenti ricerche, spazi lineari: la facile estensione a spazi molto più generali mi occorre poi per includere il caso delle menzionate equazioni di forma parametrica. Fra le applicazioni di questi ultimi risultati segnalo quella al problema di Plateau, inteso nel senso della geometria differenziale, cioè come problema dell'esistenza di una superficie minima *regolare* dotata di un contorno assegnato⁽⁴⁾.

I. Siano Σ e Σ' due spazi lineari, metrici e completi, di punti generici φ e φ' : la *distanza* tra due punti φ_1 e φ_2 , *norma* della differenza $\varphi_1 - \varphi_2$, si indichi con $\|\varphi_1 - \varphi_2\|$. Faremo inoltre l'ipotesi, semplice e di agevole verificazione pratica, che data in Σ una qualunque varietà lineare, passante per l'origine e ad un numero finito di dimensioni V , si possa trovare una varietà lineare U , avente con V soltanto l'origine in comune, tale che ogni punto φ si lasci mettere nella forma $\psi + \chi$, dove χ appartenga a V e ψ ad U ; una siffatta decomposizione sarà poi ovviamente unica. Analoga ipotesi faremo per Σ' , e diremo brevemente che gli spazi Σ e Σ' sono *decomponibili*.

Consideriamo una corrispondenza

$$(1) \qquad \varphi' = T[\varphi]$$

tra Σ e Σ' , continua e differenziabile con continuità, sicchè si abbia $\delta\varphi' = D[\varphi, \delta\varphi]$, a meno di infinitesimi di ordine superiore, D essendo lineare in $\delta\varphi$ e continua in φ (uniformemente al variare di $\delta\varphi$ in un campo limitato). Se φ_o, φ'_o sono punti corrispondenti, e l'operazione lineare $D[\varphi_o, \omega]$

(1) « Mem. della R. Acc. d'Italia », vol. VI (1935).

(2) « Math. Annalen », Bd. 65 (1908).

(3) « Monatsh. für Math. und Phys. », Bd. 28 (1917).

(4) Queste nuove considerazioni sul problema di Plateau sono state già esposte, con un cenno delle teorie generali, in una mia conferenza, tenuta il 23 febbraio 1935 al Seminario Matematico dell'Università di Roma.

è invertibile, la corrispondenza T è biunivoca intorno a φ_0, φ'_0 . Ammettiamo che quando ciò non accada, φ'_0 sia un punto critico ordinario della T^{-1} , secondo la definizione che andiamo a stabilire.

Siano $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ n punti indipendenti di Σ , e analogamente $\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_n$ n punti indipendenti di Σ' . In virtù della supposta decomponibilità di Σ, Σ' , avremo per due punti qualunque φ e φ'

$$\varphi = \psi + x_1 \varphi_1 + \dots + x_n \varphi_n \quad , \quad \varphi' = \psi' + x'_1 \varphi'_1 + \dots + x'_n \varphi'_n,$$

V e V' essendo descritte dalle combinazioni lineari delle φ_i e delle φ'_i rispettivamente, U ed U' da ψ e da ψ' . Se φ e φ' sono legate dalla (1), i parametri x'_1, \dots, x'_n saranno, con ψ' , funzioni dei parametri x_1, \dots, x_n e di ψ ; in particolare porremo

$$\varphi_0 = \psi_0 + a_1 \varphi_1 + \dots + a_n \varphi_n \quad , \quad \varphi'_0 = \psi'_0 + a'_1 \varphi'_1 + \dots + a'_n \varphi'_n.$$

La relazione lineare $\delta\varphi' = D[\varphi_0, \delta\psi]$, ottenuta differenziando la (1) in φ_0 , si potrà risolvere nelle seguenti

$$\delta\psi' = \Delta[\varphi_0, \delta\psi, \delta x_1, \dots, \delta x_n] \quad , \quad \delta x'_i = X_i[\varphi_0, \delta\psi, \delta x_1, \dots, \delta x_n] \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

le operazioni Δ e X_i essendo lineari in $\delta\psi$ e nelle δx . Ora noi supporremo che si possano sempre determinare il numero n e le varietà lineari V, V', U, U' in modo che la relazione lineare tra $\delta\psi$ e $\delta\psi'$, $\delta\psi' = \Delta[\varphi_0, \delta\psi, 0, \dots, 0]$ sia invertibile. Diremo che il punto critico φ'_0 è ordinario: dalla (1) potrà allora ricavarsi, per risoluzione rispetto a ψ ,

$$(2) \quad \psi = \Psi[\varphi_0, \psi', x_1, \dots, x_n]$$

limitando convenientemente $\|\psi - \psi_0\|, \|\psi' - \psi'_0\|, |x_i - a_i|$, dopo di che la (1) stessa fornirà ancora n relazioni del tipo

$$(3) \quad x'_i = A_i[\varphi_0, \psi', x_1, \dots, x_n]$$

che definiranno una trasformazione fra gli n -spazi V e V' , dipendente oltre che da φ_0 anche dal parametro ψ' . La inversione della T intorno ai punti φ_0 e φ'_0 è così ricondotta ad una questione analoga relativa a spazi ad un numero finito di dimensioni.

2. Il punto φ_0 sia isolato fra i corrispondenti di φ'_0 nella T^{-1} : ci chiediamo sotto quali condizioni potrà affermarsi che i corrispondenti dei punti di un intorno di φ_0 esauriscono un intorno di φ'_0 . Consideriamo all'uopo le n equazioni

$$(4) \quad x'_i = A_i[\varphi_0, \psi'_0, x_1, \dots, x_n]$$

precisando il campo di variabilità C delle x con la condizione che esso contenga tutti i punti $P(x_1, \dots, x_n)$ tali che

$$x_1 \varphi_1 + \dots + x_n \varphi_n + \Psi[\varphi_o, \psi_o, x_1, \dots, x_n]$$

appartenga ad un ben determinato intorno I di φ_o ⁽¹⁾. Il punto $P'(x'_1, \dots, x'_n)$ descrive una varietà W' (eventualmente composta di più parti), distesa su V' , il cui contorno Γ' corrisponde al contorno Γ di C ; Γ' non può passare per (a'_1, \dots, a'_n) , chè altrimenti φ'_o corrisponderebbe ad un punto della frontiera di I , contro l'ipotesi che φ_o (interno ad I) sia isolato fra i corrispondenti di φ'_o . Risulta quindi definito l'ordine topologico di (a'_1, \dots, a'_n) rispetto a Γ' ⁽²⁾; se esso è $= 0$, in particolare se è *dispari*, le (4) saranno soddisfatte da almeno un punto P di C , per ogni punto P' sufficientemente vicino a (a'_1, \dots, a'_n) , ed altrettanto potrà dirsi delle (3), purchè $\|\psi' - \psi'_o\|$ sia abbastanza piccola: la (2) associerà poi a P , per ogni ψ' , una unica determinazione di ψ . I corrispondenti dei punti di I esauriranno in questo caso un intorno di φ'_o .

Si vede subito che questa deduzione conserva la sua validità anche quando, φ_o non essendo isolato, l'intorno I (sempre convenientemente ristretto) contenga nel suo interno altri punti aventi φ'_o per corrispondente. Ma v'ha di più: un risultato affatto analogo sussiste anche nel caso che a φ_o subentri un continuo Φ_o , chiuso e compatto, trasformato da T in φ'_o . Invero, nell'ipotesi che φ'_o sia punto critico ordinario in quanto corrispondente di un qualunque punto di Φ_o potremo, per la continuità del differenziale di T e la compattezza di Φ_o , assegnare le varietà V' e U' , nonchè una quantità positiva ε in modo che la (2) possa stabilirsi, sotto le limitazioni $\|\varphi - \varphi_o\| < \varepsilon$, $\|\psi' - \psi'_o\| < \varepsilon$, comunque si scelga φ_o su Φ_o , determinando poi opportunamente le varietà V e U . Preso allora un intorno sufficientemente ristretto I di Φ_o , si considererà la varietà W' , distesa su V' , immagine dell'insieme dei punti di I per i quali $\psi' = \psi'_o$. Il contorno Γ' di W' non passerà per (a'_1, \dots, a'_n) ; e rispetto a Γ' si cercherà come precedentemente l'ordine di (a'_1, \dots, a'_n) .

Sono fondamentali ora le osservazioni seguenti: 1) l'ordine topologico così definito relativamente al punto φ'_o di Σ' e ad un intorno I di un punto o continuo (compatto) corrispondente di φ'_o nella T^{-1} non varia per piccoli spostamenti di φ'_o (che non possono fare acquistare a questo punto corrispondenti sul contorno di I); 2) se H è un qualunque insieme di Σ trasformato in φ'_o , chiuso e compatto (nonchè isolato), comunque si prenda un intorno I di H ,

(1) Si prenderà così ristretto che le x non escano dal campo di validità della (2).

(2) Cfr., p. es., la Nota di Hadamard in TANNERY, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, to. II. Prescindiamo dal segno dell'ordine, non interessandoci di questo che il valore assoluto, anzi la sola parità.

spezzato nelle porzioni connesse I_1, I_2, \dots , la parità della somma degli ordini definiti relativamente a φ_o' e I_1, I_2, \dots è costante.

3. Abbiamo ottenuto così il nostro risultato principale: *Ad ogni punto φ_o' di Σ' e ad ogni insieme compatto isolato H suo corrispondente nella T^- si associa, nelle ipotesi fatte su T , una ben determinata parità; nel caso dispari tutto un intorno di φ_o' appartiene all'immagine di $\Sigma^{(1)}$.* Se H consta di tutti i corrispondenti di φ_o' si dirà che questo punto è di *prima specie* nel caso dispari, di *seconda specie* nel caso pari.

Per giungere ad un *teorema generale sull'inversione completa* di T aggiungiamo alle precedenti l'ipotesi che *ogni insieme di Σ , trasformato da T in un insieme compatto, sia compatto*⁽²⁾. Ne segue che i punti di Σ' dovranno essere tutti di prima o tutti di seconda specie. Basta invero provare che la specie di un punto φ' si conserva per una piccola variazione di questo: ma ciò è ovvio, poiché per una simile variazione l'insieme (necessariamente compatto) corrispondente di φ' si mantiene in un intorno della sua primitiva posizione, conformemente alla nuova ipotesi su T , ciò che riporta alla precedente osservazione 1). Secondo la specie cui appartengono i punti di Σ' , diremo che T è di *prima* o di *seconda specie*: nel primo caso l'immagine di Σ esaurirà Σ' . Dunque:

Se la trasformazione T , la cui inversa non presenta che punti critici ordinari, converte in insiemi compatti di Σ' soltanto insiemi parimenti compatti di Σ , e se un punto di Σ' è di prima specie, sicché T risulti di prima specie, ogni punto di Σ' corrisponderà a qualche punto di $\Sigma^{(3)}$.

Altrettanto potrà dirsi, più generalmente, quando in luogo dell'intero spazio Σ' se ne consideri soltanto una varietà Σ'_i : nelle ipotesi analoghe questa corrisponderà ad una varietà Σ_i di Σ .

4. Come applicazione, consideriamo il problema di Dirichlet per una equazione ellittica del secondo ordine

$$(5) \quad F(x_1, \dots, x_n, \zeta, p_1, \dots, p_n, p_{11}, \dots, p_{nn}) = 0 \quad \left(p_i = \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}, \quad p_{ik} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_i \partial x_k} \right)$$

sotto le ordinarie condizioni di regolarità per i dati e per la soluzione (regolarità del terzo ordine di F , del contorno, e continuità hölderiana delle

(1) Le soluzioni della (1) in un intorno di H (in particolare prossime a φ_o se H si riduce a questo punto), per punti φ' prossimi a φ_o' , saranno generalmente in numero finito sempre dispari o sempre pari (in questo caso eventualmente anche zero). Diciamo *generalmente*, perché le eccezioni non potranno presentarsi che in corrispondenza di un insieme di punti (x'_1, \dots, x'_n) avente misura nulla.

(2) Mi sono già servito di quest'ipotesi, nei miei lavori precedenti, per formulare il principio generale di inversione completa nel caso della biunivocità.

(3) Generalmente ad un numero finito dispari di punti.

dérivate seconde di z). Σ e Σ' saranno qui lo spazio delle funzioni $z(x_1, \dots, x_n)$ a déivate seconde hölderiane (con dato esponente) nel campo e quello delle funzioni $\mu(x_1, \dots, x_n)$ hölderiane nel campo, associate alle funzioni ω a déivate seconde hölderiane sul contorno. Indicando con ζ i valori al contorno di z , la corrispondenza T si scriverà

$$F(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n, p_{11}, \dots, p_{nn}) = \mu(x_1, \dots, x_n) , \quad \zeta = \omega,$$

e si vede subito che le condizioni del n. 1 saranno soddisfatte tanto per Σ e Σ' che per $T^{(1)}$.

Il problema di Dirichlet relativo all'equazione ellittica (5) è sempre risolubile nelle seguenti ipotesi: 1° gli integrali della (5) i cui valori al contorno abbiano norme verificanti una data limitazione risultano equilimitati ed equicontinui con le loro déivate seconde; 2° ad un particolare sistema ζ_0 di valori al contorno corrisponde un numero finito dispari (in particolare 1) di integrali, per i quali l'equazione a variazioni della (5) risulta illimitatamente risolubile.

Infatti la prima ipotesi assicura che sono compatte le successioni di Σ trasformate in successioni compatte⁽²⁾; la seconda, che un particolare punto di Σ' , e propriamente della varietà $\mu = 0$, è di prima specie.

Se nella (5) le déivate seconde figurano linearmente, nella condizione di equicontinuità si possono sostituire le déivate prime alle seconde.

(1) La decomponibilità si verifica subito col metodo delle funzioni ortogonali; il carattere ordinario degli eventuali punti critici segue poi da note proprietà delle equazioni lineari del tipo ellittico (rango finito degli autovalori), cui appartiene l'equazione a variazioni della (5).

(2) Ved. in questi «Rendiconti», vol. XVIII, la mia Nota già citata.

Matematica. — *Di una classe di superficie razionali che ammettono ∞^2 trasformazioni proiettive in sé.* Nota di E. CASTELNUOVO, presentata dal Socio F. ENRIQUES.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla generalizzazione di una formula di Tricomi.* Nota di A. ERDÉLYI, presentata dal Socio G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulla dinamica del corpo deformabile di massa variabile.* Nota⁽¹⁾ di G. ARRIGHI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

§ 1. — Il compianto sen. De Marchi, in alcuni lavori, aveva mostrato come la propagazione delle onde nei ghiacciai poteva dimostrarsi matematicamente mediante una estensione particolare della equazione di continuità ai corpi deformabili di massa variabile ond'è ch'io, tentato da queste posizioni, iniziai alcun tempo fa una trattazione generale in questo campo di ricerche⁽²⁾.

Mi propongo adesso di ricavare una equazione indefinita dell'equilibrio dinamico e l'espressione del relativo teorema delle forze vive, riservandomi di trattare, in una Nota successiva, il caso del corpo compressibile soggetto a forze derivanti da potenziale.

Per dedurre le espressioni che sono attuale oggetto di ricerca, per quanto meno immediato, mi varrò del metodo della derivazione d'integrali che, nella trattazione di questi problemi, è della più efficace rappresentazione.

Siano \mathbf{v} , ρ la velocità e la densità del nostro corpo, funzioni regolari, con le loro derivate, del punto P e del tempo t ; detto τ un campo di contorno σ , immerso nel corpo, deformandolo in guisa che i suoi punti abbiano velocità \mathbf{v} , esso, nel suo moto, racchiuderà sempre la stessa massa del corpo con le variazioni relative.

Allora, supposte verificate le condizioni per cui vale il teorema della variazione d'impulso, si vada a calcolare la derivata rispetto al tempo di

$$R_i = \int_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau.$$

Nel moto di τ , precedentemente definito, resulta

$$R'_i = \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau = - \int_{\sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{v} d\sigma + \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) d\tau$$

dove \mathbf{n} è un vettore unitario normale a σ e volto verso l'interno di τ .

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 ottobre 1936.

(2) G. ARRIGHI, *Una generalizzazione dell'equazione di continuità.* « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », vol. XVIII, ser. 6^a, 2^o sem., fasc. 4-8, p. 302. Ivi si trovano le indicazioni bibliografiche relative ai lavori citati del sen. De Marchi.

Applicando il teorema del gradiente al secondo integrale, sviluppando la derivata che compare nel terzo integrale, e per essere

$$\text{grad.} H(\rho \mathbf{v}, \mathbf{v}) = \text{div}(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial P} \mathbf{v},$$

si avrà

$$R'_i = \int_{\tau} \left[\text{div}(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial P} \mathbf{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{v} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right] d\tau.$$

Per essere

$$(1) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial P} \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

e tenendo presente l'equazione di continuità generalizzata⁽¹⁾

$$(2) \quad \text{div}(\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} + a = 0,$$

dove a è la variazione (≤ 0 aumento o diminuzione) di massa per unità di tempo e di volume, si ha in definitiva

$$(3) \quad R'_i = \int_{\tau} \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - a \mathbf{v} \right) d\tau.$$

Detta $\rho \mathbf{f} d\tau$ la risultante delle forze agenti sull'elemento $d\tau$ di volume e $\mathbf{f}_s d\sigma$ la risultante delle forze superficiali agenti su $d\sigma$, supponendo \mathbf{f}_s funzione lineare di \mathbf{n} , cioè che possa porsi

$$\mathbf{f}_s = \alpha \mathbf{n} \quad (\alpha \text{ omografia di pressione}),$$

per la risultante delle forze esterne si avrà l'espressione

$$R_e = \int_{\tau} \rho \mathbf{f} d\tau + \int_{\sigma} \alpha \mathbf{n} d\sigma,$$

e, pel teorema del gradiente

$$R_e = \int_{\tau} (\rho \mathbf{f} d\tau - \text{grad } \alpha) d\tau.$$

(1) Vedi Nota citata in (2) a p. 303. Ivi si trova pure la sua espressione di tipo lagrangiano.

Uguagliando quest'ultima con la (3) e per essere τ qualunque, dovrà avversi

$$(4) \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - a\mathbf{v} = \rho\mathbf{f} - \text{grad } \alpha$$

che è l'*equazione indefinita dell'equilibrio dinamico*.

§ 2. — Cerchiamo ora l'espressione del teorema della forza viva.
Posto

$$T = \int_{\tau} \rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} d\tau$$

segue

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} d\tau = - \int_{\sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} \rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} d\sigma + \int_{\tau} \partial_t \left(\frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} \right) d\tau;$$

applicando il teorema della divergenza al secondo integrale, sviluppando la derivata che compare nel terzo integrale, e per essere

$$\text{div} \left(\rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} \mathbf{v} \right) = \frac{\mathbf{v}^2}{2} \text{div} (\rho \mathbf{v}) + \text{grad} \frac{\mathbf{v}^2}{2} \times \rho \mathbf{v},$$

seguirà

$$\frac{dT}{dt} = \int_{\tau} \left[\frac{\mathbf{v}^2}{2} \text{div} (\rho \mathbf{v}) + \text{grad} \frac{\mathbf{v}^2}{2} \times \rho \mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \times \mathbf{v} \right] d\tau.$$

Tenendo presente la (2) e per essere

$$\text{grad} \frac{\mathbf{v}^2}{2} = K \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v},$$

si ha ancora

$$\frac{dT}{dt} = \int_{\tau} \left[-a \frac{\mathbf{v}^2}{2} + K \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v} \times \rho \mathbf{v} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \times \mathbf{v} \right] d\tau.$$

Ricordando il teorema di commutazione e la (1) si ha in definitiva

$$\frac{dT}{dt} = \int_{\tau} \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{v} - \frac{a\mathbf{v}^2}{2} \right) d\tau.$$

Si moltiplicherà scalamente per \mathbf{v} ambo i membri della (4) e si integri rispetto a τ , resulterà

$$\int_{\tau} \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{v} - a\mathbf{v}^2 \right) d\tau = \int_{\tau} \rho \mathbf{f} \times \mathbf{v} d\tau - \int_{\tau} \text{grad } \alpha \times \mathbf{v} d\tau,$$

onde, confrontando quest'ultima con la precedente,

$$(5) \quad \frac{dT}{dt} - \int_{\tau} a \frac{\mathbf{v}^2}{2} d\tau = \int_{\tau} \rho f \times \mathbf{v} d\tau - \int_{\tau} \text{grad } \alpha \times \mathbf{v} d\tau.$$

Per essere

$$\text{grad } \alpha \times \mathbf{v} = \text{div} (\mathbf{K} \alpha \mathbf{v}) - I_1 \left(\mathbf{K} \alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial P} \right),$$

l'ultimo integrale della precedente può scriversi

$$\int_{\tau} \text{grad } \alpha \times \mathbf{v} d\tau = \int_{\tau} \text{div} (\mathbf{K} \alpha \mathbf{v}) d\tau - \int_{\tau} I_1 \left(\mathbf{K} \alpha \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial P} \right) d\tau.$$

Applicando il teorema della divergenza al 2° di questi, e per essere $\mathbf{f}_s = \alpha \mathbf{n}$, si ha successivamente

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \text{grad } \alpha \times \mathbf{v} d\tau &= - \int_{\sigma} \mathbf{n} \times \mathbf{K} \alpha \mathbf{v} d\sigma - \int_{\tau} I_1 \left(\mathbf{K} \alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial P} \right) d\tau = \\ &= - \int_{\sigma} \alpha \mathbf{n} \times \mathbf{v} d\sigma - \int_{\tau} I_1 \left(\mathbf{K} \alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial P} \right) d\tau = \\ &= - \int_{\sigma} \mathbf{f}_s \times \mathbf{v} d\sigma - \int_{\tau} I_1 \left(\mathbf{K} \alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial P} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Ponendo

$$L_e^* = \int_{\tau} \rho f \times \mathbf{v} d\tau + \int_{\sigma} \mathbf{f}_s \times \mathbf{v} d\sigma,$$

la (5) si scriverà in definitiva

$$\frac{dT}{dt} - \int_{\tau} a \frac{\mathbf{v}^2}{2} d\tau = L_e^* + \int_{\sigma} I_1 \left(\mathbf{K} \alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial P} \right) d\tau \quad (1).$$

(1) Cfr. U. CISORRI, *Sull'energia cinetica di masse fluide continue: espressioni varie dell'energia cinetica*. «Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei», vol. XXIII, ser. 5^a, fasc. 2, p. 58. Ivi si trovano le espressioni dell'energia cinetica relative al caso di massa costante.

Meccanica. — *Sul moto di un fluido compressibile di massa variabile con forze derivanti da un potenziale.* Nota⁽¹⁾ di G. ARRIGHI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

§ 1. — Riprendo la equazione indefinita dell'equilibrio dinamico relativa ad un corpo di massa variabile e deformabile sottoposto a forze di massa $\rho \mathbf{F} d\tau$ sollecitanti l'elemento di volume $d\tau$ e che, detta p la pressione specifica ed a la variazione di massa (≥ 0 diminuzione o aumento) relativa all'unità di volume e all'unità di tempo, ho trovata espressa nel tipo euleriano⁽²⁾

$$(1) \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - a\mathbf{v} = \rho \mathbf{F} - \text{grad}_P p.$$

Supponendo che le forze \mathbf{F} ammettano un potenziale U per cui

$$\text{grad}_P U = \mathbf{F},$$

e sapendo che può sempre determinarsi una funzione Π tale che⁽³⁾

$$\frac{1}{\rho} \text{grad}_P p = \text{grad}_P \Pi$$

poichè la ricerca di Π è ridotta alle quadrature essendo p funzione di ρ (equazione caratteristica del gas), se poniamo

$$\Phi = U - \Pi \quad (\text{potenziale della variazione d'impulso}),$$

la (1) si trasforma nella

$$(1') \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{a}{\rho} \mathbf{v} = \text{grad}_P \Phi.$$

Nella forma lagrangiana in cui la posizione P al tempo t si considera funzione della posizione P_0 al tempo t_0 della medesima particella, poichè sappiamo essere⁽⁴⁾

$$\text{grad}_{P_0} \Phi = K \frac{dP}{dP_0} \text{grad}_P \Phi,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 ottobre 1936.

(2) G. ARRIGHI, *Sulla dinamica del corpo deformabile di massa variabile*, in «Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei», vol. XXIV, ser. 6^a, 1936.

(3) R. MARCOLONGO, *Meccanica razionale*. Hoepli, Milano, 1918, vol. II, p. 376.

(4) Per le notazioni vettoriali come per le formule ad esse relative vedi: C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Trasformazioni lineari*. Zanichelli, Bologna, 1929.

applicando $K \frac{dP}{dP_o}$ ad ambo i membri della (1') risulta

$$(2) \quad K \frac{dP}{dP_o} \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{a}{\rho} K \frac{dP}{dP_o} \mathbf{v} = \text{grad}_{P_o} \Phi,$$

che può dirsi l'equazione indefinita dell'equilibrio dinamico nella forma lagrangiana.

§ 2. — Cerchiamo adesso la formula corrispondente agli integrali di Cauchy⁽¹⁾. Nei simboli di derivazione totale rispetto al tempo t sarà

$$\frac{d}{dt} \left[K \frac{dP}{dP_o} \mathbf{v} \right] = K \frac{dP}{dP_o} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \left(K \frac{d\mathbf{v}}{dP_o} \right) \mathbf{v},$$

ma è in generale

$$\text{grad}_{P_o} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = K \frac{d\mathbf{u}}{dP_o} \mathbf{v} + K \frac{d\mathbf{v}}{dP_o} \mathbf{u},$$

onde

$$\frac{d}{dt} \left[K \frac{dP}{dP_o} \mathbf{v} \right] = K \frac{dP}{dP_o} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{1}{2} \text{grad}_{P_o} (\mathbf{v}^2).$$

Sostituendo con questa relazione nella equazione (2) si avrà:

$$\frac{d}{dt} \left[K \frac{dP}{dP_o} \mathbf{v} \right] - \frac{a}{\rho} K \frac{dP}{dP_o} \mathbf{v} = \text{grad}_{P_o} \left[\Phi + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right],$$

applicando rot_{P_o} ad ambo i suoi membri e tenendo presente che t e P_o sono variabili indipendenti e $\text{rot}_{P_o} \text{grad}_{P_o}$ è operatore nullo per gli scalari

$$\frac{d}{dt} \left[\text{rot}_{P_o} \left(K \frac{dP}{dP_o} \mathbf{v} \right) \right] = \text{rot}_{P_o} \frac{d}{dt} \left[K \frac{dP}{dP_o} \mathbf{v} \right] = \text{rot}_{P_o} \left[\frac{a}{\rho} K \frac{dP}{dP_o} \mathbf{v} \right]$$

Ricordando che

$$\text{rot}_{P_o} (m \mathbf{u}) = m \text{rot}_{P_o} \mathbf{u} + \text{grad}_{P_o} m \wedge \mathbf{u},$$

potremo anche scrivere

$$\frac{d}{dt} \left[\text{rot}_{P_o} \left(K \frac{dP}{dP_o} \mathbf{v} \right) \right] = \left(\text{grad}_{P_o} \frac{a}{\rho} \right) \wedge K \frac{dP}{dP_o} \mathbf{v} + \frac{a}{\rho} \text{rot}_{P_o} \left(K \frac{dP}{dP_o} \mathbf{v} \right).$$

(1) Cfr.: T. BOGGIO, *Dimostrazione assoluta delle equazioni classiche dell'idrodinamica*. «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», vol. XLV, 1910.

Integrando fra t_0 e t e tenendo presente

$$\left[\frac{dP}{dP_0} \right] = 1 \quad \text{e} \quad K(1) = 1,$$

risulterà

$$\text{rot}_{P_0} \left[K \frac{dP}{dP_0} \mathbf{v} \right] - \text{rot}_{P_0} \mathbf{v}_0 = \int_{t_0}^t \left(\text{grad}_{P_0} \frac{a}{\rho} \right) \wedge K \frac{dP}{dP_0} dt + \int_{t_0}^t \frac{a}{\rho} \text{rot}_{P_0} \left(K \frac{dP}{dP_0} \mathbf{v} \right) dt,$$

dove \mathbf{v}_0 è la velocità al tempo t_0 . Applicando $\frac{dP}{dP_0}$ ad ambo i membri di quest'ultima, e per essere (1)

$$\left(I_3 \frac{dP}{dP_0} \right) \text{rot}_P \mathbf{v} = \frac{dP}{dP_0} \text{rot}_{P_0} \left(K \frac{dP}{dP_0} \mathbf{v} \right),$$

risulterà in definitiva

$$(3) \quad \left(I_3 \frac{dP}{dP_0} \right) \text{rot}_P \mathbf{v} - \frac{dP}{dP_0} \text{rot}_{P_0} \mathbf{v}_0 = \\ = \frac{dP}{dP_0} \int_{t_0}^t \left[\left(\text{grad}_{P_0} \frac{a}{\rho} \right) \wedge K \frac{dP}{dP_0} + \frac{a}{\rho} \text{rot}_{P_0} \left(K \frac{dP}{dP_0} \mathbf{v} \right) \right] dt,$$

che, nelle nostre ipotesi, è l'espressione corrispondente agli integrali di Cauchy, ai quali senz'altro si riduce per $a = 0$. Dalla osservazione della formula soprascritta dall'essere $\text{rot}_{P_0} \mathbf{v}_0 = 0$ non segue senz'altro $\text{rot}_P \mathbf{v} = 0$, onde non può dirsi valido il teorema di Lagrange sul potenziale di velocità.

§ 3. — Stabiliremo in questo paragrafo il teorema della variazione della circuitazione

$$C = \oint \mathbf{v} \times dP$$

lungo una qualunque linea chiusa s immersa nel nostro fluido e mobile con esso. Resulta subito

$$\frac{dC}{dt} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times dP + \oint \mathbf{v} \times d\mathbf{v}$$

e, tenendo presente la (1')

(1) Cfr: Nota citata in (1) a pag. precedente e T. BOGGIO, *Sull'integrazione delle equazioni idrodinamiche di Helmholtz*, «Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei», vol. XXI, ser. 6^a, 1935, p. 415.

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} &= (\oint \frac{a}{\rho} \mathbf{v} \times dP + \oint \text{grad}_P \Phi \times dP + \frac{1}{2} \oint d\mathbf{v}^2 = \\ &= \oint \frac{a}{\rho} \mathbf{v} \times dP + \oint d\Phi + \frac{1}{2} \oint d\mathbf{v}^2,\end{aligned}$$

ma i due ultimi integrali, estesi ad una curva chiusa, per la uniformità e continuità delle funzioni Φ e \mathbf{v}^2 , sono nulli, e pertanto segue il teorema della variazione della circuitazione sotto la forma

$$(1) \quad \frac{dC}{dt} = \oint \frac{a}{\rho} \mathbf{v} \times dP,$$

ovvero

$$\frac{dC}{dt} = \int_{\sigma} \text{rot} \left(\frac{a}{\rho} \mathbf{v} \right) \times \mathbf{n} \cdot d\sigma,$$

dove σ è un diaframma di contorno s mobile col fluido, ed \mathbf{n} un vettore unitario normale a $d\sigma$ e volto in senso tale che rispetto ad esso personificato la curva s sia circuita nel senso destrogiro.

§ 4. — Particolarmenete notevole, per le espressioni che assumono in corrispondenza le formule trovate, è il caso in cui il rapporto $\frac{a}{\rho}$ sia funzione solo del tempo, giacchè posto

$$f(t) = e^{-\int_{t_0}^t (a/\rho) dt},$$

resulta

$$\frac{d}{dt} [f(t) \cdot \mathbf{v}] = f(t) \left[\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{a}{\rho} \mathbf{v} \right],$$

e la (2) del § 1 diventa

$$(2') \quad K \frac{dP}{dP_o} \frac{d}{dt} [f(t) \cdot \mathbf{v}] = \text{grad}_{P_o} [f(t) \Phi],$$

giacchè il termine per cui si moltiplica Φ al secondo membro è indipendente da P_o .

Circa la relazione analoga all'integrale di Cauchy si ha quanto segue: Dall'essere

$$\frac{d}{dt} \left[K \frac{dP}{dP_o} f(t) \mathbf{v} \right] = f(t) \cdot K \frac{d\mathbf{v}}{dP_o} \mathbf{v} + K \frac{dP}{dP_o} \frac{d}{dt} [f(t) \mathbf{v}]$$

sostituendo nella (2') e applicando rot_{P_o} ad ambo i membri si ottiene analogamente

$$\frac{d}{dt} \operatorname{rot}_{\mathbf{P}_o} \left[\mathbf{K} \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{P}_o} f(t) \mathbf{v} \right] = \mathbf{o};$$

e, integrando fra t e t_o

$$\operatorname{rot}_{\mathbf{P}_o} \left[\mathbf{K} \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{P}_o} f(t) \mathbf{v} \right] - \operatorname{rot}_{\mathbf{P}_o} \mathbf{v}_o = \mathbf{o},$$

e, applicando $\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{P}_o}$ ad ambo i membri:

$$(3') \quad f(t) \left(\mathbf{I}, \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{P}_o} \right) \operatorname{rot}_{\mathbf{P}} \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{P}_o} \operatorname{rot}_{\mathbf{P}_o} \mathbf{v}_o,$$

che è la corrispondente alla (3) del § 2.

Il teorema della variazione della circuitazione (4) ci dà in questo caso

$$\frac{dC}{dt} = \frac{a}{\rho} (\oint \mathbf{v} d\mathbf{P}) = \frac{a}{\rho} C$$

da cui segue

$$\frac{d}{dt} [\log C] = \frac{a}{\rho}$$

e, integrando fra t e t_o

$$[\log C]_{t_o}' = \int_o^t \frac{a}{\rho} dt$$

ovvero

$$\log \frac{C}{C_o} = \int_o^t \frac{a}{\rho} dt$$

da cui, in definitiva

$$(4') \quad e^{- \int_{t_o}^t (a/\rho) dt} C = C_o$$

che è l'espressione del teorema della circuitazione relativo al nostro caso⁽¹⁾.

Dalla (3') come dalla (4') segue il teorema di Lagrange.

(1) Alle formule trovate in questo § può darsi altra forma sostituendo a

$$\int_{t_o}^t (a/\rho) dt$$

il valore ricavato dalla equazione di continuità (4) della mia Nota: *Una generalizzazione dell'equazione di continuità*, «Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei», vol. XVIII, ser. 6^a, 1933, p. 304.

Meccanica (Aeronautica). — *Sulla equazione dei tre momenti per una trave continua inflessa e sollecitata assialmente, con flessiorigidezza variabile linearmente lungo ogni campata.* Nota I⁽¹⁾ di L. CESARI e di F. CONFORTO, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

La collaborazione dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo col prof. Carlo Minelli della Direzione Generale delle Costruzioni e degli Approvvigionamenti del Ministero dell'Aeronautica, ha dato molti brillanti risultati. Un esempio di questi è fornito dal presente lavoro dei dottori Cesari e Conforto di quest'Istituto, col quale lavoro il senso analitico del matematico puro ha consentito la compilazione di tavole numeriche che rendono possibile l'applicazione nella pratica corrente delle costruzioni della estensione dell'equazione dei tre momenti escogitata dal prof. Minelli.

Ecco dunque come la collaborazione del matematico puro con il tecnico possa anche portare ad una realizzazione del tutto pratica.

MAURO PICONE.

In una Nota recente⁽²⁾, il prof. C. Minelli, generalizzando una ricerca precedente del prof. G. Albenga⁽³⁾, ha scritto una equazione dei tre momenti per una trave continua inflessa e sollecitata assialmente, per il caso che in ciascuna campata sia variabile linearmente (anzichè costante) il prodotto EI.

Nella nominata equazione dei tre momenti, intervengono dei coefficienti, che si costruiscono mediante funzioni cilindriche, e per la tabellazione di questi il Minelli richiese la collaborazione dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo. Nella nostra qualità di coadiutori presso questo Istituto, siamo stati tratti ad occuparci del lavoro del Minelli. Le nostre considerazioni, che costituiscono l'oggetto di questa Nota, hanno un duplice scopo: di completare la ricerca del Minelli, e di superare le difficoltà analitiche relative al calcolo numerico dei sopradetti coefficienti.

Precisamente: nei nn. 1 e 2 diamo sotto forma opportuna i coefficienti dell'equazione Albenga-Minelli, nonché espressioni semplici di questi, atte al calcolo numerico; nel n. 3 dimostriamo che questi coefficienti tendono ai corrispondenti coefficienti dell'equazione Albenga, quando l' α della Nota

(1) Pervenuta all'Accademia il 25 ottobre 1936.

(2) C. MINELLI, *Trave continua inflessa e sollecitata assialmente, con flessiorigidezza variabile linearmente lungo ogni campata.* «Rend. R. Acc. dei Lincei», vol. XXIV, ser. 6^a, 2^o sem., pp. 115-124.

(3) G. ALBENGA, *Sulla trave continua inflessa e sollecitata assialmente.* «R. Acc. di Scienze di Torino», voll. 51 e 52 (1916), ristampata nel «Bollettino Tecnico», n. 12, Direzione Sperimentale dell'Aviazione, Montecelio, febbraio 1920.

del Minelli tende a zero, ossia quando le strutture considerate dal Minelli tendono, per così dire, a quelle considerate dall'Albenga; infine superiamo le difficoltà di calcolo numerico, che si presentano per α piccolissimo, dando semplici formule di approssimazione praticamente valevoli in quel caso.

I. Riepiloghiamo brevemente le considerazioni del Minelli, con lievi modificazioni formali, che ci permettono di diminuire il numero dei parametri che entrano nel problema.

Riferendoci al caso della trave inflessa e tesa e con le stesse posizioni del Minelli, si tratta da prima di integrare l'equazione differenziale:

$$(1) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left[(1 + \alpha x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right] - \frac{P}{EI_s} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{p}{EI_s} \quad (0 \leq x \leq l)$$

con le condizioni ai limiti:

$$(2) \quad \begin{cases} x = 0 & , \quad y = 0 & , \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M_s}{EI_s} \\ x = l & , \quad y = y_d & , \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M_d}{EI_d} \end{cases}$$

ove:

$$\alpha = \frac{I_d - I_s}{lI_s}.$$

Poniamo:

$$x = l\xi \quad , \quad \alpha' = \alpha l = \frac{I_d - I_s}{I_s} \quad , \quad \mu'^2 = \frac{Pl^2}{EI_s} \quad (0 \leq \xi \leq 1).$$

La (1) diventa:

$$(1') \quad \frac{d^2}{d\xi^2} \left[(1 + \alpha' \xi) \frac{d^2 y}{d\xi^2} \right] - \mu'^2 \frac{d^2 y}{d\xi^2} = \mu'^2 l^2 \frac{p}{P},$$

con le relative condizioni ai limiti.

Posto: $\zeta = \frac{d^2 y}{d\xi^2}$, l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$(1'') \quad \frac{d^2}{d\xi^2} [(1 + \alpha' \xi) \zeta] - \mu'^2 \zeta = \mu'^2 l^2 \frac{p}{P}$$

è:

$$(3) \quad \zeta = \frac{d^2 y}{d\xi^2} = c_1 T(\xi) + c_2 V(\xi) - \frac{\mu'^2 l^2}{P},$$

dove $T(\xi)$ e $V(\xi)$ sono due qualsiasi integrali indipendenti dell'equazione differenziale (1'') resa omogenea.

Per soddisfare alle (2) dovrà essere intanto:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{l^2}{\Delta} \left[\left(\frac{M_o}{EI_s} - \frac{p}{P} \right) V(o) - \left(\frac{M_i}{EI_s} - \frac{p}{P} \right) V(i) \right] \\ c_2 &= \frac{l^2}{\Delta} \left[- \left(\frac{M_o}{EI_s} - \frac{p}{P} \right) T(o) + \left(\frac{M_i}{EI_s} - \frac{p}{P} \right) T(i) \right] \\ \Delta &= T(o)V(i) - T(i)V(o). \end{aligned}$$

In particolare, se J_v e N_v sono le funzioni rispettivamente di Bessel e di Neumann di indice v , si può prendere per $T(\xi)$ e $V(\xi)$ i seguenti integrali:

$$(4) \quad (1 + \alpha' \xi)^{-1/2} J_i \left(\frac{2 \mu' i}{\alpha'} \sqrt{1 + \alpha' \xi} \right), \quad (1 - \alpha' \xi)^{-1/2} N_i \left(\frac{2 \mu' i}{\alpha'} \sqrt{1 - \alpha' \xi} \right).$$

Integrando due volte la (3), tenendo conto delle condizioni ai limiti, si trova la funzione $y(\xi)$ richiesta, da cui derivando si ottiene:

$$\begin{aligned} v'(i) &= c_1 H + c_2 K + y_i - \frac{pl^2}{2P} \\ y'(o) &= -c_1 R - c_2 S + y_o + \frac{pl^2}{2P}, \end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned} H &= \int_0^i \xi T(\xi) d\xi, \quad K = \int_0^i \xi V(\xi) d\xi, \\ R &= \int_0^i (i - \xi) T(\xi) d\xi, \quad S = \int_0^i (i - \xi) V(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Da qui, per la continuità della trave fra due campate vicine (1) e (2), comprese fra tre appoggi, i cui momenti siano M_o, M_i, M_2 , si ha:

$$\frac{1}{l_1} \left(\frac{dy}{d\xi} \right)_{d,1} = \frac{1}{l_2} \left(\frac{dy}{d\xi} \right)_{s,2}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} (5) \quad M_o \frac{A_1 l_1}{EI_{s_1}} + M_i \left(\frac{B_1 l_1}{EI_{d_1}} + \frac{C_2 l_2}{EI_{s_2}} \right) + M_2 \frac{D_2 l_2}{EI_s} &= \\ = \left(\frac{p}{P} \right) l_1 \left(-\frac{1}{2} + A_1 + B_1 \right) + \left(\frac{p}{P} \right) l_2 \left(-\frac{1}{2} + C_2 + D_2 \right) + \frac{y_i}{l_1} - \frac{y_o}{l_2}, \end{aligned}$$

dove v_1 è il dislivello fra gli appoggi o e i ed v_2 il dislivello fra gli appoggi i e 2.

Abbiamo inoltre posto :

$$(6) \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{\Delta} [KT(1) - HV(1)] , & B = \frac{1}{\Delta} [KT(0) - HV(0)] \\ C = -\frac{1}{\Delta} [ST(1) - RV(1)] , & D = \frac{1}{\Delta} [ST(0) - RV(0)]. \end{cases}$$

2. Riepilogato così il lavoro del Minelli, con notazioni più acconce, osserviamo quanto segue.

$T(\xi)$ e $V(\xi)$ sono due integrali particolari dell'equazione (1'') resa omogenea, onde si ha :

$$\begin{aligned} H &= \int_0^1 \xi T(\xi) d\xi = \frac{1}{\mu'^2} \int_0^1 \xi \frac{d^2}{d\xi^2} [(1 + \alpha' \xi) T(\xi)] d\xi = \\ &= -\frac{1}{\mu'^2} [T(1) - T(0) - (1 + \alpha') T'(1)], \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{\mu'^2} [V(1) - V(0) - (1 + \alpha') V'(1)] \\ R &= \int_0^1 (1 - \xi) T(\xi) d\xi = \frac{1}{\mu'^2} \{(1 + \alpha') [T(1) - T(0)] - T'(0)\} \\ S &= \frac{1}{\mu'^2} \{(1 + \alpha') [V(1) - V(0)] - V'(0)\}. \end{aligned}$$

Sostituendo nelle (6) si ha :

$$(7) \quad \begin{cases} A = \frac{1}{\mu'^2} - \frac{1 + \alpha'}{\mu'^2} \frac{\Delta_1}{\Delta} & , \quad B = -\frac{1}{\mu'^2} + \frac{1 + \alpha'}{\mu'^2} \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ C = -\frac{1 + \alpha'}{\mu'^2} + \frac{1}{\mu'^2} \frac{\Delta_3}{\Delta} & , \quad D = \frac{1 + \alpha'}{\mu'^2} - \frac{1}{\mu'^2} \frac{\Delta_4}{\Delta} \end{cases}$$

con :

$$\begin{aligned} \Delta &= T(0)V(1) - T(1)V(0) \\ \Delta_1 &= T(1)V'(1) - T'(1)V(1) \\ \Delta_2 &= T(0)V'(1) - T'(1)V(0) \\ \Delta_3 &= T(1)V'(0) - T'(0)V(1) \\ \Delta_4 &= T(0)V'(0) - T'(0)V(0). \end{aligned}$$

I coefficienti A, B, C, D della (5) sono invarianti rispetto alla scelta dei due integrali indipendenti T e V , come del resto doveva essere in base al loro significato fisico.

Assumendo poi per T e V gli integrali (4) e ricordando le relazioni per la derivazione delle funzioni cilindriche, si ha:

$$(8) \quad \begin{cases} A = \frac{I}{\mu'^2} + \frac{I}{\mu'} \frac{\Delta'_1}{\Delta'}, \\ C = -\frac{I}{\mu'^2} + \frac{I}{\mu'} \frac{\Delta'_3}{\Delta'}, \end{cases}, \quad B = -\frac{I + \alpha'}{\mu'^2} + \frac{\sqrt{I + \alpha'}}{\mu'} \frac{\Delta'_2}{\Delta'}, \quad D = \frac{I + \alpha'}{\mu'^2} - \frac{\sqrt{I + \alpha'}}{\mu'} \frac{\Delta'_4}{\Delta'}$$

dove:

$$\begin{aligned} \Delta' &= J_1 \left(\frac{2 \mu' i}{\alpha'} \right) N_1 \left(\frac{2 \mu' i}{\alpha'} \sqrt{I + \alpha'} \right) - J_1 \left(\frac{2 \mu' i}{\alpha'} \sqrt{I + \alpha'} \right) N_1 \left(\frac{2 \mu' i}{\alpha'} \right) \\ \Delta'_1 &= i \left[J_1 \left(\frac{2 \mu' i}{\alpha'} \sqrt{I + \alpha'} \right) N_0 \left(\frac{2 \mu' i}{\alpha'} \sqrt{I + \alpha'} \right) - J_0 \left(\frac{2 \mu' i}{\alpha'} \sqrt{I + \alpha'} \right) N_1 \left(\frac{2 \mu' i}{\alpha'} \sqrt{I + \alpha'} \right) \right] \\ \Delta'_2 &= i \left[J_1 \left(\frac{2 \mu' i}{\alpha'} \right) N_0 \left(\frac{2 \mu' i}{\alpha'} \sqrt{I + \alpha'} \right) - J_0 \left(\frac{2 \mu' i}{\alpha'} \sqrt{I + \alpha'} \right) N_1 \left(\frac{2 \mu' i}{\alpha'} \right) \right] \\ \Delta'_3 &= i \left[J_1 \left(\frac{2 \mu' i}{\alpha'} \sqrt{I + \alpha'} \right) N_0 \left(\frac{2 \mu' i}{\alpha'} \right) - J_0 \left(\frac{2 \mu' i}{\alpha'} \right) N_1 \left(\frac{2 \mu' i}{\alpha'} \sqrt{I + \alpha'} \right) \right] \\ \Delta'_4 &= i \left[J_1 \left(\frac{2 \mu' i}{\alpha'} \right) N_0 \left(\frac{2 \mu' i}{\alpha'} \right) - J_0 \left(\frac{2 \mu' i}{\alpha'} \right) N_1 \left(\frac{2 \mu' i}{\alpha'} \right) \right]. \end{aligned}$$

Le (8) sono atte al calcolo numerico mediante le esistenti tavole di funzioni di Bessel e di Neumann.

Meccanica. — Una forma più generale della terza legge di Keplero.
Nota di L. LABOCETTA, presentata dal Socio G. A. CROCCO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Tentativi di fotometria fotoelettrica delle superficie planetarie.* Nota⁽¹⁾ di M. MAGGINI, presentata dal Socio E. BIANCHI.

1. Uno dei desideri espressi alla V Riunione dell'Unione Astronomica Internazionale tenutasi lo scorso anno a Parigi, fu che si tenti al più presto la fotometria delle macchie di un pianeta. Dati sicuri, ottenuti con metodi di alta precisione, sono oggi indispensabili se vogliamo far progredire le conoscenze nostre in fatto di astronomia planetaria oltre al punto in cui l'ha portata l'indagine visuale.

Fu giusto con questa intenzione che nel programma di ricerche fotoelettriche iniziate a Collurania nel 1930, posì in prima linea alcuni tentativi di fotometria delle macchie planetarie, tentativi che sono stati coronati da successo solo nel presente anno. Scopo della presente Nota è di descrivere il dispositivo strumentale adottato fin qui e di dare un breve cenno sui risultati ottenuti, ma conto di poter dare fra non molto un resoconto più esteso su quanto mi hanno permesso di ottenere i metodi di amplificazione termojonica unita ad un galvanometro registratore.

Il fotometro a due cellule in uso a Collurania dal 1930, è, come è noto⁽²⁾, composto di tre parti (fig. 1): A, una camera che isola l'immagine dell'astro data dall'obiettivo del rifrattore; B, una camera che contiene le cellule; C, una camera che contiene i due elettrometri Lindemann. Quando si eseguiscono misure fotometriche su stelle, la camera A è munita soltanto del diaframma iride *d* che isola l'immagine focale prima che cada sulla cellula; per eseguire misure su macchie planetarie ho modificato questo dispositivo nella maniera seguente.

Un sistema divergente acromatico *e*, una lente di Barlow, dà una prima amplificazione all'immagine, la quale successivamente, viene ingrandita da un piccolo obiettivo doppio anastigmatico *o*, che la proietta su di una lastra di vetro a facce piane e parallele *s*, inclinata a 45° sull'asse ottico del rifrattore. Una faccia di questa lastra è tutta argentata fuori che una piccola area centrale che, vista lateralmente, si presenta come un foro circolare di mm. 0,5 di diametro; il canocchialetto puntatore vede perciò l'immagine del pianeta riflessa dalla lastra ed insieme la piccola area di 0,5 mm. che è il solo punto da cui è permesso il passaggio della luce nella sottostante camera delle cellule. Si può così sorvegliare sempre l'immagine anche quando la

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 ottobre 1936.

(2) « Memorie della Soc. Astr. It. », vol. VI, 1932.

luce cade sulla cellula, il che non sarebbe stato possibile col solito sistema a riflessione adottato per la fotometria stellare. Spostando poi l'immagine si può far capitare qualsivoglia regione o macchia di un pianeta in corrispondenza del foro e farne quindi cadere la luce sulla cellula.

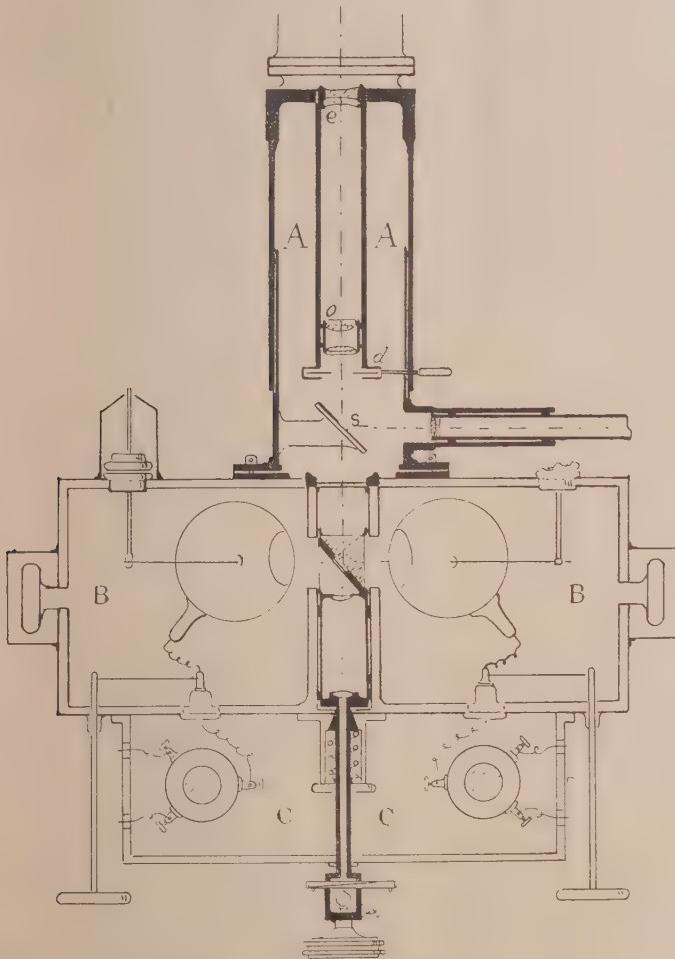


Fig. 1.

I pianeti a cui ho applicato questo metodo totolettrico sono stati Giove e Saturno: la declinazione australe di ambedue è stata di ostacolo, specialmente per l'agitazione dell'immagine e per la posizione incomoda che veniva ad assumere lo strumento; tuttavia i risultati sono incoraggianti.

2. L'immagine ingrandita di Giove aveva un diametro di 20 mm. ciò che portava a circa 1'' il diametro dell'area lasciata passare nella cellula; questo è all'incirca il dischetto dell'ombra di un satellite o, se vogliamo, il satellite stesso. Per la identificazione delle macchie, mi parve che il sistema più pratico fosse quello di eseguire un disegno e contrassegnarvi via via le macchie di cui misuravo l'intensità; siccome effettuavo le misure tanto con la cellula al Sodio quanto con quella al Rubidio, potevo avere anche il corrispondente indice di colore. Eseguii sempre misure differenziali scegliendo per confronto una regione della zona equatoriale del pianeta; dai tempi elettrometrici, potevo, al solito, dedurre i rapporti d'intensità come differenze di grandezza stellare Δm . Ecco, come esempio, le misure effettuate su varie macchie oscure componenti le due bande tropicali.

| Macchia | $(\Delta m)_{Na}$ | $(\Delta m)_{Rb}$ | J |
|---------|-------------------|-------------------|---|
|---------|-------------------|-------------------|---|

Banda tropicale Nord

| | | | |
|---|----------------------|----------------------|----------------------|
| a | + 0 ^m .15 | + 0 ^m .06 | + 0 ^m .62 |
| b | .33 | .20 | .66 |
| c | .30 | .23 | .60 |
| d | .25 | .27 | .51 |
| e | + 0 .25 | + 0 .27 | + 0 .51 |

Banda tropicale Sud

| | | | |
|----|---------|---------|---------|
| a' | + 0 .30 | + 0 .25 | + 0 .58 |
| b' | .34 | .27 | .60 |
| c' | .27 | .35 | .45 |
| d' | .25 | .30 | .48 |
| e' | + 0 .35 | + 0 .25 | + 0 .63 |

Errore medio di una determinazione di J: $\pm 0^m.03$.

La quantità J, che figura nell'ultima colonna, è l'indice di colore della macchia e fu calcolata con la formola⁽¹⁾:

$$J = (\Delta m)_{Na} - (\Delta m)_{Rb} + \Delta' m$$

(1) Cfr. questi « Rendiconti », vol. XXIII, ser. 6^a, 1^o sem., fasc. 5 (1936), p. 337.

in cui $\Delta' m$ è l'indice di colore della regione di confronto dedotto in base ad una numerosa serie di misure.

Il dispositivo strumentale descritto si presta bene anche per misurare la variazione d'intensità luminosa del disco planetario in vicinanza del bordo, ma occorre allora determinare a qual distanza dal centro del disco apparente si riferisce la misura, il che può farsi munendo di micrometro il canocchialetto di osservazione; bisogna che il rifrattore segua perfettamente il moto planetario. Queste misure fotometriche potranno fornirci dei dati sulla trasparenza dell'atmosfera di Giove.

3. Le misure su Saturno si sono specialmente rivolte all'anello, che quest'anno si presenta per taglio ed è già scomparso una prima volta il 29 luglio. Nelle notti che precedettero detta scomparsa, l'anello era ridotto ad una linea luminosa con tre noduli lucenti, $\alpha \beta \gamma$, la posizione dei quali corrispondeva: α all'anello esterno in prossimità della divisione di Encke (anello A di Struve), β all'anello medio presso la divisione di Cassini (anello B di Struve), γ al limite fra l'anello B e l'anello trasparente C. Le misure fotometriche hanno dato:

| | Ansa di Est | | | Ansa di Ovest | | |
|----------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | $(\Delta m)_{N_a}$ | $(\Delta m)_{R_b}$ | J | $(\Delta m)_{N_a}$ | $(\Delta m)_{R_b}$ | J |
| α | + 0 ^m .16 | + 0 ^m .30 | + 0 ^m .61 | + 0 ^m .14 | + 0 ^m .28 | + 0 ^m .61 |
| β | .12 | .38 | .49 | .10 | .30 | .55 |
| γ | + 0 .15 | + 0 .30 | + 0 .60 | + 0 .15 | + 0 .30 | + 0 .60 |

Le misure sul globo sono state eseguite lungo il diametro polare, scegliendo per ogni banda o zona il punto più nitido; la mancanza di particolari ben definiti non mi ha permesso di scegliere varie macchie, come è stato il caso di Giove. La regione di confronto fu scelta, anche in questo caso, nella zona equatoriale.

| Regione | $(\Delta m)_{N_a}$ | $(\Delta m)_{R_b}$ | J |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| Regione polare Sud | + 0 ^m .15 | + 0 ^m .03 | + 0 ^m .87 |
| Zona temperata Sud | .07 | .09 | .73 |
| Banda tropicale Sud | .13 | .06 | .82 |
| Zona equatoriale | 0 .00 | 0 .00 | .75 |
| Banda tropicale Nord | .15 | .10 | .80 |
| Zona temperata Nord | .05 | .10 | .70 |
| Regione polare Nord | + 0 .13 | + 0 .05 | + 0 .83 |

Errore medio di una determinazione di J: $\pm 0^m.04$.

Gli indici di colore che figurano nella terza colonna sono diversi da quelli ottenuti per la superficie di Giove, poichè la luce solare riflessa dai due pianeti risulta modificata dalle qualità intrinseche del suolo e delle atmosfere loro. Data l'equazione di colore del nostro strumento, i tipi spettrali medi corrispondenti sarebbero:

| | |
|----------------------------|-----|
| Giove | G 1 |
| Saturno { Anello | G 2 |
| Globo | G 8 |

Fenomeni particolarmente adatti a venire studiati col dispositivo di Collurania sono le ombre dei satelliti sul globo del pianeta (i quattro principali su Giove e, attualmente, Titano su Saturno) ed i satelliti stessi. Per questi ho ideato un metodo a registrazione, che permette di ottenere la curva di variazione luminosa di un satellite durante la sua immersione nell'ombra metodo del pianeta, metodo su cui mi propongo di riferire in una prossima Nota.

Fisica. — *Sul selettore di velocità dei neutroni lenti.* Nota⁽¹⁾ di E. SEGRÈ, presentata dal Socio O. M. CORBINO.

In una Nota precedente⁽²⁾ abbiamo descritto alcuni esperimenti eseguiti con un dispositivo meccanico atto a dare informazioni sulla velocità dei neutroni lenti. Gli esperimenti descritti, eseguiti alla Columbia University di New York, sono stati proseguiti ed estesi a basse temperature da Fink, Dunning, Pegram, Mitchell⁽³⁾.

Scopo di questa Nota è di precisare quantitativamente il funzionamento del dispositivo impiegato e di discuterne i possibili perfezionamenti.

Il selettore di velocità quale è stato descritto nella Nota precedente si può schematizzare in sostanza come un sistema di due schermi posti uno di seguito all'altro sul cammino dei neutroni a distanza fissa d uno dall'altro e la cui trasparenza per i neutroni è per ambedue una funzione periodica con periodo T del tempo. Indichiamo tale funzione con $f(t)$.

Un neutrone di velocità v che cada sul primo schermo avrà la probabilità $f(t)$ di traversarlo e cadrà sul secondo schermo dopo un tempo d/v . La trasparenza del secondo schermo sarà allora $f(t + d/v)$ e la probabilità che il neutrone attraversi due schermi sarà $f(t) \cdot f(t + d/v)$. Poichè il selettore di velocità funziona con continuità quello che interessa è naturalmente

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 ottobre 1936.

(2) PEGRAM, MITCHELL, FINK, SEGRÈ, «Rend. Lincei», 23, 340, 1936.

(3) FINK, DUNNING, PEGRAM, MITCHELL, «Phys. Rev.», 49, 103, 1936.

il valor medio di questo prodotto. Se i neutroni incidenti non hanno tutti la stessa velocità v , ma ve ne sono $i(v) dv$ con velocità compresa tra v e $v + dv$, si avrà per il numero medio di neutroni che traversa l'apparecchio nell'unità di tempo l'espressione:

$$I = \frac{I}{T} \int_0^\infty i(v) dv \cdot \int_0^T f(t) f\left(t + \frac{d}{v}\right) dt.$$

Se si vuol tener conto della sensibilità del rivelatore ai neutroni di velocità diversa, ossia se si considera che N neutroni di velocità v vengono registrati dal rivelatore (p. es. da una camera di ionizzazione a boro) con $N_s(v)$ impulsi si ha per l'intensità del fascio registrata dopo aver traversato il selettore:

$$R = \frac{I}{T} \int_0^\infty i(v) s(v) dv \int_0^T f(t) f\left(t + \frac{d}{v}\right) dt.$$

Nel selettore descritto nella Nota precedente $f(t)$ aveva l'andamento indicato a tratto pieno in fig. 1, che corrisponde a eguale ampiezza dei settori liberi e dei settori occupati dal cadmio nelle ruote del selettore. Variando il rapporto tra i settori trasparenti e quelli opachi la trasparenza in funzione dell'angolo di rotazione è data dalle curve tratteggiate in fig. 1. Le ascisse danno l'angolo di rotazione prendendo per unità un periodo e le ordinate la trasparenza.

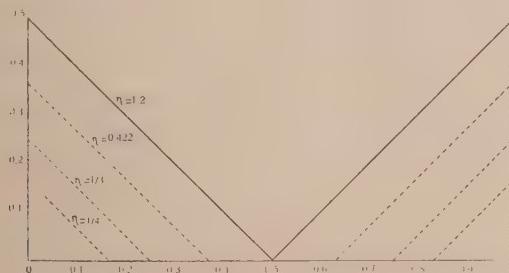


Fig. 1.

Per computare l'azione di tutti e due i settori anzichè uno solo bisogna eseguire l'integrale $\frac{I}{T} \int_0^T f(t) f(t - \varphi) dt = u$ che è una funzione di φ . I risultati di tale computo che non offre alcuna difficoltà sono compendiati nelle seguenti formule:

$$\text{se } \eta \leq \frac{1}{4} \quad \text{e } \varphi \leq \eta \quad , \quad u_1 = \frac{I}{2} \varphi^3 - \eta \varphi^2 + \frac{2}{3} \eta^3 \quad ; \quad \text{se } \eta \leq \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} & \text{e } \varphi \geq \eta, u_2 = \frac{1}{6}(2\eta - \varphi)^3 ; \quad \text{per } 1/3 \geq \eta \geq 1/4 \quad \text{valgono } u_1 \text{ e } u_2 \\ & \text{se } 1 - 2\eta \geq \varphi \geq 0 ; \quad \text{se } 1 - 2\eta \leq \varphi \leq 1/2, u_3 = \frac{1}{6}(2\eta + \varphi - 1)^3 + \\ & \quad + \frac{1}{6}(2\eta - \varphi)^3 ; \quad \text{se } \eta = \frac{1}{2}, \quad u_4 = \frac{2}{3}\varphi^3 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

In fig. 2 abbiamo dato alcuni grafici corrispondenti a diversi valori del rapporto η tra l'angolo occupato da un settore trasparente e la somma β dell'angolo occupato da un settore trasparente e uno opaco. Le ascisse danno l'angolo φ e l'unità di misura dell'asse delle ascisse è l'angolo β ; ovvero in misura temporale il periodo T di $f(t)$. Le ordinate danno la trasparenza dell'intero dispositivo in % dell'intensità incidente.

Se il selettore di velocità ruota con velocità angolare ω tra le diverse grandezze summenzionate corrono ovviamente le relazioni

$$T = \frac{\beta}{\omega} \quad \frac{d\omega}{v\beta} = \varphi.$$

Conosciuto $u(\varphi)$ è possibile calcolare il risultato di un'esperienza eseguita col selettore di velocità su una qualunque distribuzione $i(v)$ di neutroni purchè sia conosciuta anche $s(v)$. Naturalmente in teoria è anche possibile invertire il calcolo, ma ciò esigerebbe una tale precisione delle misure quale non si può raggiungere con i mezzi odierni.

Come esempio abbiamo calcolato il risultato dell'analisi di una $i(v)$ corrispondente alla distribuzione di velocità dei neutroni uscenti all'avanti da un blocco di paraffina qualora i neutroni all'interno della paraffina avessero raggiunto l'equilibrio termico. Si ha allora a meno di una inessenziale costante moltiplicativa $i(v) = v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$.

Gli integrali necessari sono del tipo $\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} f\left(\frac{\lambda}{x}\right) dx$ con $\lambda = \frac{d\omega}{\beta} \sqrt{\frac{m}{2kT}}$, e sono stati computati numericamente dopo aver eliminato la singolarità che si ha nell'origine colla posizione $y = 1/x$.

Il risultato dei calcoli per 2 valori di η si trova in fig. 3. In essa è dato λ come ascisse e le ordinate sono in scala arbitraria ma la stessa per le 2 curve a e b , che corrispondono a $\eta = 0.5$, e la stessa per la coppia di curve c e d , che corrispondono a $\eta = 0.422$. La scala di queste ultime è stata scelta in modo da farne coincidere i valori $\lambda = 0$ con quelli delle curve a e b .

Le curve c e d corrispondono a la stessa $i(v)$, ma con $s(v) = 1/v$; questa posizione sembra la più plausibile secondo le recenti ricerche teoriche e sperimentali nel caso che si usi come rivelatore una camera di ionizzazione a boro e a litio⁽¹⁾. Essa però non è definitivamente stabilita e sarebbe

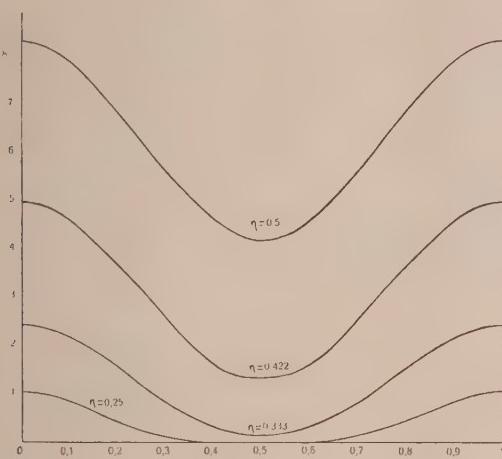


Fig. 2.

importantissimo di provarla sperimentalmente in modo diretto; purtroppo non ci sembra che la precisione delle misure raggiungibile col selettore di velocità possa bastare a dare informazioni quantitative sul prodotto $i(v) \cdot s(v)$ perchè come si vede dalla fig. 3 la forma della curva è assai poco sensibile alla distribuzione delle velocità dei neutroni incidenti.

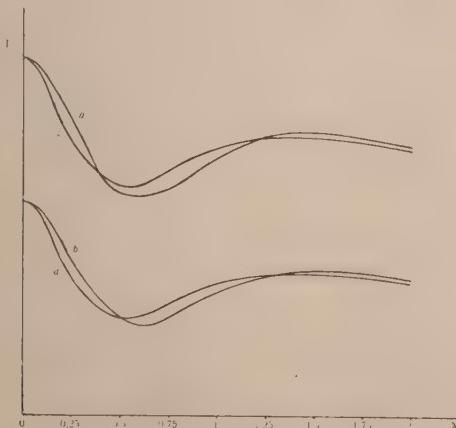


Fig. 3.

(1) BOHR, «Nature», 137, 344, 1936.

Un miglioramento rispetto al selettore usato nelle precedenti esperienze si avrebbe costruendo gli intervalli di Cd più grandi rispetto a quelli liberi (p. es. $\gamma = \frac{1}{3}$ anziché $\gamma = \frac{1}{2}$) della registrazione. Un'ulteriore diminuzione di γ non ci sembra conveniente perché al di là di $\gamma = 1/3$ diminuisce troppo la trasparenza, come si può facilmente verificare sulla fig. 2.

Ringrazio il dott. M. Santangelo per l'aiuto prestato nella esecuzione dei calcoli numerici.

Chimica-fisica. — *Sulla presenza dell'idrogeno molecolare nelle macchie del Sole*⁽¹⁾. Nota II⁽²⁾ di G. PICCARDI, presentata dal Corrisp. L. ROLLA.

Il problema dell'esistenza dell'idrogeno molecolare nelle macchie solari è stato risolto da tempo, in senso affermativo, dal punto di vista chimico-fisico⁽³⁾. In una precedente Nota⁽⁴⁾ ho avuto occasione di mostrare che questo risultato può considerarsi definitivo.

È utile oggi, dopo qualche anno di indagini, rivedere gli svolgimenti che si sono avuti nei riguardi dell'identificazione spettroscopica della molecola H_2 .

Nel 1922 il Merton⁽⁵⁾ ricercando lo spettro secondario dell'idrogeno nelle macchie solari, trovò soltanto poche coincidenze e concluse negativamente il suo lavoro.

Nel 1929 riferendomi a nuove misure dello spettro secondario dell'idrogeno io potei identificare⁽⁶⁾, su lastre riprese alla Torre solare di Arcetri e su una mappa preparata alla grande Torre solare di Monte Wilson, usando il sistema polarizzatore per lo studio dei campi magnetici, 85 righe attribuibili allo spettro della molecola H_2 neutra ed aventi tutti i requisiti richiesti per appartenercere effettivamente a questo spettro (classe spettrale, relazioni d'intensità, mancanza dell'effetto Zeemann dovuto al campo magnetico delle macchie ecc.).

Nel 1930 il Richardson⁽⁷⁾ esaminando lastre ottenute al telescopio Snow di Monte Wilson, sempre usando il sistema polarizzatore, identificava nello

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Firenze e nel R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri.

(2) Pervenuta all'Accademia il 1º ottobre 1936.

(3) G. PICCARDI, «Memorie della Soc. Astr. It.», 4, 379, 1919.

(4) G. PICCARDI, questi «Rendiconti», in corso di stampa.

(5) R. T. MERTON, «Tran. Roy. Soc. London», A, 222, 369, 1922.

(6) G. PICCARDI, «Memorie della Soc. Astr. It.», 4, 379, 1929.

(7) R. S. RICHARDSON «Publ. Astr. Soc. Pacific», 40, 121, 1930.

spettro delle macchie, 232 righe della molecola H_2 , di cui 132 con grandissima precisione.

Considerando anche che questi risultati sono stati ottenuti su materiali fotografici registrati in tempi diversi e con apparecchi diversi, non sembra dubbio che nello spettro delle macchie esistano numerose coincidenze collo spettro secondario dell'idrogeno.

Nel 1930 il Russell⁽¹⁾ calcolando, in base alla sua calibrazione dello spettro solare, l'abbondanza della molecola H_2 nelle macchie, servendosi delle intensità delle righe da me identificate, ritrovava per mezzo di considerazioni di carattere astrofisico il valore dedotto per via termodinamica. Ciò sembrava confermare il carattere di realtà dell'identificazione spettroscopica.

Nel 1931 il Richardson⁽²⁾ in un lavoro generale sugli spettri molecolari delle macchie del Soie, considerando la percentuale delle righe identificate entro ristrettissimi limiti di errore, in relazione al numero delle righe di corrispondente intensità non oscurate nelle macchie e perciò teoricamente osservabili, trovava, fra $\lambda 4.500$ e $\lambda 5.000$:

| | | | | |
|---|----|----|----|-------------------|
| Intensità delle righe | 7 | 8 | 9 | 10 ⁽³⁾ |
| Numero delle righe non oscurate . . . | 8 | 16 | 11 | 14 |
| Numero delle righe identificate | 3 | 7 | 4 | 12 |
| Percentuale d'identificazione | 38 | 44 | 36 | 86 |

Le righe d'intensità 7, 8 e 9, per la loro bassa percentuale d'identificazione possono rientrare nel numero delle coincidenze casuali, prevedibili teoricamente. Non così avviene per le righe d'intensità 10. L'alta percentuale d'identificazione, 86%, indica che, almeno in parte, esse appartengono allo spettro della molecola H_2 .

Per maggior sicurezza io ho esteso, collo stesso criterio di rigore, questa ricerca probabilistica anche fra $\lambda 5.500$ e $\lambda 6.400$, considerando che in questa regione lo spettro secondario è molto brillante e presenta circa il doppio di righe d'intensità 10 e meno della metà di righe d'intensità 7, 8 e 9 che non fra $\lambda 4.500$ e $\lambda 5.500$. Il risultato è il seguente:

| | | | | |
|---|----|----|----|----|
| Intensità delle righe | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Numero delle righe non oscurate . . . | 5 | 8 | 3 | 25 |
| Numero delle righe identificate | 3 | 6 | 2 | 20 |
| Percentuale d'identificazione | 60 | 75 | 67 | 80 |

(1) H. N. RUSSELL, «Memorie della Soc. Astr. It.», 5, 5, 1930.

(2) R. S. RICHARDSON, «Astr. Journ.», 73, 23, 1931.

(3) Su una scala di 10.

Le righe d'intensità 7, 8 e 9 sono così poche che il risultato sopra-scritto, benchè ottimo, non può esser considerato che molto vago; per le righe d'intensità 10 esso è invece molto preciso e concordante con quello trovato dal Richardson.

L'identificazione, dal punto di vista probabilistico, ha dunque costantemente carattere di realtà per le righe d'intensità massima.

Alcuni anni dopo il Russell⁽¹⁾ studiando teoricamente la variazione dell'intensità delle righe dello spettro secondario in funzione delle condizioni di temperatura, di pressione ecc., trovava che, pur essendo abbondantissima, la molecola H₂ non poteva comparire nel Sole che con righe così fini da non poter esser osservate e che per di più le righe di maggior intensità dovevano risultare indebolite nello spettro delle macchie.

Sembra molto difficile oggi conciliare i risultati dell'osservazione colle esigenze della teoria.

La risoluzione definitiva non potrà forse esser data che da nuove osservazioni ed anche, non è escluso, da qualche esperienza di laboratorio.

Non si deve poi dimenticare che nello studio spettroscopico del Sole si sono constatate, e da anni, numerose anomalie che non hanno ancora ricevuto spiegazione alcuna.

Chimica fisica. — *Sulla simmetria molecolare del tiofene⁽²⁾.*

Nota I⁽³⁾ di G. B. BONINO, presentata dal Socio M. Betti.

In un precedente lavoro⁽⁴⁾ in collaborazione col dott. Manzoni ho rilevato alcune difficoltà che si oppongono ad una diretta interpretazione degli spettri Raman del tiofene e che richiedono una discussione più ampia della sua simmetria molecolare e forse una migliore conoscenza del suo spettro ultrarosso per poter giungere possibilmente a conclusioni definitive⁽⁵⁾.

(1) H. N. RUSSELL, «Astr. Jour.», 79, 281, 1934.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Bologna.

(3) Pervenuta all'Accademia il 13 ottobre 1936.

(4) Questi «Rendiconti», 1936.

(5) Tali difficoltà già prospettate da noi in due Note su «La Ricerca Scientifica», vol. I, ser. II, n. 7-8 e n. 11-12; vol. II, n. 3-4 (oltre che nel citato lavoro) non sono giunte a conoscenza al dott. Reitz al quale, in un recente lavoro («Zeits Phys. Chem.», 33, 179, 1936) è sfuggita la bibliografia italiana sull'argomento.

Infatti il Reitz nel pubblicare i suoi nuovi spettri del pirrolo, tiofene, furano, dimostra di non essere a conoscenza degli spettri da noi pubblicati in quest'anno ed ottenuti con tecniche particolarmente perfezionata. È doveroso però osservare che gli spettri ottenuti dal Reitz trovano una netta corrispondenza con quelli già apparsi nelle nostre pubblicazioni di questo anno. I nostri nuovi spettri del tiofene e furano sono apparsi in un numero del mese di aprile 1936 de «La Ricerca Scientifica», lo spettro del pirrolo è apparso nel numero di giugno 1936 dello stesso giornale mentre gli spettri di Reitz sono apparsi in un numero di settembre 1936 del «Zeits für Phys. Chem.».

In questa Nota valendomi in modo schematico di alcuni concetti della teoria dei gruppi nel senso sviluppato principalmente da Wigner⁽¹⁾ e da Tisza⁽²⁾ riassumerò alcune considerazioni relative alle oscillazioni proprie attribuibili alla molecola del tiofene in relazione agli elementi di simmetria supponibili per la stessa.

Il problema delle oscillazioni elastiche nei sistemi simmetrici era già stato affrontato con successo, se pure con mezzi del tutto elementari, in un lavoro di Brester⁽³⁾ nel 1923. Un lavoro di Wigner⁽¹⁾ del 1930 riprende l'argomento in modo assai più profondo ed elegante valendosi della teoria dei gruppi, più tardi Tisza⁽²⁾ completa il lavoro di Wigner sotto alcuni punti di vista di spiccato interesse. Placzek⁽⁴⁾, Cabannes⁽⁵⁾, Wilson Jr.⁽⁶⁾ in importanti e fondamentali lavori si valsero dei risultati, ora di Brester, ora di Wigner o di Tisza onde trattare problemi relativi allo spettro Raman.

Wigner considera per una molecola il gruppo G di operazioni R (rotazioni, riflessioni ecc.) rispetto al quale è invariante la configurazione di equilibrio della molecola stessa e giunge ad un fondamentale teorema che ci permette di stabilire i « tipi » di oscillazioni e gli eventuali caratteri di degenerescenza. Detto teorema afferma che vi saranno tanti « tipi » di oscillazioni proprie quante sono le rappresentazioni irriducibili del gruppo G. Per ciascun tipo il numero delle oscillazioni linearmente indipendenti e della stessa frequenza è dato dalla « dimensione » della rappresentazione che caratterizza il tipo.

Un noto teorema della teoria dei gruppi⁽⁷⁾ ci afferma poi che il numero di rappresentazioni irriducibili del gruppo G corrisponde al numero di classi r nel quale si possono distribuire gli elementi del gruppo stesso. Se $(a_{\theta, \eta})_i^p$ è la matrice corrispondente alla rappresentazione irriducibile p relativamente alla classe i , la quantità:

$$\chi = \sum a_{\eta\eta}$$

vien chiamata carattere della rappresentazione ed ha una notevole importanza nella trattazione dei problemi a cui ci riferiamo.

(1) « Gott. Nach. Mat. Phys. Kl. », 1930, p. 133.

(2) « Zeits f. Phys. », 82, 48 (1933).

(3) *Dissert.* Utrecht, 1923; « Zeits f. Phys. », 24 324 (1924).

(4) PLACZEK, *Rayleigh-Streuung* ecc. Leipzig, 1934.

(5) « Ann. de Physique » 18, 285 (1932).

(6) « Journ. Chem. Phys. », 2, 432 (1934).

(7) Ved., per es., SPEISER, *Theorie der Gruppen* ecc. Springer, Berlin, 1927.

Si può costruire per il gruppo G una tavola del tipo seguente:

| | E | C_1 | C_2 | $\cdots C_s$ |
|----------|----------|-----------|-----------|------------------|
| A_1 | χ | χ_1 | χ_2 | $\cdots \chi_s$ |
| A_2 | χ' | χ'_1 | χ'_2 | $\cdots \chi'_s$ |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
| B_1 | χ | χ_1 | χ_2 | $\cdots \chi_s$ |

dove sono indicate nella prima orizzontale le classi del gruppo G , nella prima verticale le diverse rappresentazioni irriducibili $A_1, \cdots A_s, \cdots$ ecc. del gruppo e nelle altre orizzontali i caratteri di ciascuna rappresentazione relativamente alle varie classi.

Berlitz⁽¹⁾, Wigner⁽²⁾, Tisza⁽³⁾ hanno pubblicato nei loro lavori tabelle dei diversi corrispondenti ai gruppi più interessanti lo studio delle molecole per le quali, tabellate, si facciano l'applicazione ai casi pratici.

Allo scopo di determinare per una data molecola il numero di oscillazioni, pur pure corrispondenti a ciascun tipo, Wigner dà un metodo semplice di cui (poiché la presente Nota è direttamente rivolta ai chimici) riassume brevemente le linee fondamentali rimandando per maggiori e più precisi dettagli al citato lavoro di Wigner.

Per una molecola si può considerare un insieme di operazioni (ΔR) che applicato agli spostamenti dei diversi atomi può permettere di giungere a 2 coniugazioni corrispondenti alle diverse oscillazioni normali della molecola. Questo insieme di operazioni (ΔR) è una rappresentazione (in genere riducibile) del gruppo di simmetria G che caratterizza la molecola considerata. Wigner dimostra che il numero σ di oscillazioni normali di un determinato tipo è cioè riferito ad una determinata rappresentazione irriducibile Γ^{σ} del gruppo G e dato dal numero di volte che la rappresentazione Γ^{σ} è contenuta in (ΔR) .

La determinazione di σ può aversi facilmente e necessita soltanto la conoscenza dei caratteri $\chi(R)$ di (ΔR) e $\chi_{\sigma}(R)$ di Γ^{σ} . Un teorema della teoria dei gruppi dice infatti che se per ciascuna classe i del gruppo G molte chiamano $\nu_i(R)$ il carattere $\chi(R)$ della rappresentazione ciascuna (ΔR) per il sostituirne $\chi_i(R)$ della rappresentazione irriducibile in questione, moltiplichiamo questo prodotto per il numero di membri i della classe e sommiamo queste quantità.

(1) «Ann. d. Phys.», 3, 133 (1929).

(2) Loc. cit.

(3) Loc. cit.

tità calcolate per le diverse classi (sempre si intende per la stessa Γ^G) e dividiamo poi per il numero totale b di operazioni del gruppo G otteniamo il numero di volte a'_p nelle quali la rappresentazione irriducibile Γ^G è contenuta nella rappresentazione riducibile (ΔR).

$$(1) \quad a'_p = \frac{I}{b} \sum_{j,i} \gamma_i(R) \chi_i^{(p)}(R).$$

Ma in a'_p è contenuto anche il numero di oscillazioni degeneri di egual frequenza e le così dette oscillazioni di frequenza nulla ⁽¹⁾ (per es. spostamenti della molecola parallelamente ai tre assi). Wigner « corregge » i numeri a'_p togliendovi appunto i numeri delle dette oscillazioni e giungendo ai numeri a_p delle oscillazioni normali di frequenza diversa e non nulla

$$(2) \quad a_p = \frac{I}{b} \sum \Xi_i(R) \chi_i^{(p)}(R).$$

dove

$$(3) \quad \Xi(R) = (\underbrace{u_R - 2}_{\substack{\text{per tutti gli} \\ R = \text{rotazioni pure}}} (\underbrace{1 + 2 \cos \varphi}_{\substack{\text{per tutti gli} \\ R = \text{rotazioni e riflessioni}}}) - u_R (1 + 2 \cos \varphi).$$

Le quantità u ci rappresentano il numero di masse le cui posizioni non variano applicando alla molecola l'operazione di simmetria R , φ l'angolo corrispondente all'operazione R (considerata come una rotazione pura, riflessione rotazione e riflessione). Wigner dimostra ancora una relazione che ci permette di stabilire se un dato tipo di oscillazione è attiva in assorbimento ultrarosso. Invero considerata la « rappresentazione » (M) del momento elettrico molecolare saranno attivi in ultrarosso quei tipi di oscillazioni riferibili a rappresentazioni irriducibili del gruppo G contenute in (M) e viceversa. Per realizzare tale criterio praticamente Wigner definisce la quantità:

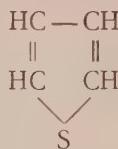
$$(4) \quad A = \sum'_{\substack{\text{rotazioni pure}}} (1 + 2 \cos \varphi) \chi_i^{(p)}(R) - \sum''_{\substack{\text{rotazioni e riflessioni}}} (1 + 2 \cos \varphi) \chi_i^{(p)}(R).$$

Se $A = 0$ il tipo di oscillazione è inattivo in ultrarosso, sarà attivo se $A \neq 0$.

Analogo criterio applicato anzichè alla rappresentazione (M), alla rappresentazione (α) della polarizzabilità molecolare permette di dedurre le regole di selezione in effetto Raman per i vari tipi di oscillazioni. Tali regole sono già riassunte nei lavori di Platczek (5) e di Tisza (3).

(1) Per maggiori dettagli sul problema delle oscillazioni molecolari vedi i due eccellenti articoli di TELLER e di MECKE in « Hand-und Jahrb. d. Chem. Phys. » di Eucken e Wolf, Band. 9, Leipzig 1934. Per la teoria dei gruppi v. pure l'interessante articolo di E. BAUER in « Ann. de Inst. Poincaré », vol. IV, 1933.

Nel caso della molecola del tiofene si può fare una prima ipotesi sugli elementi di simmetria della molecola e cioè si può supporre che tali elementi siano quelli suggeriti dall'ordinaria formula chimica considerata piana:



In tal caso si avrebbe a che fare con una simmetria del tipo C_{2v} costituita cioè da un'asse di simmetria binario (C_2) e da due piani di simmetria nei quali giace l'asse (uno σ_b che coincide col piano della molecola e l'altro σ_x ortogonale al piano della stessa). La tabella dei « caratteri » per la simmetria C_{2v} è data da Wigner. Gli elementi di simmetria sono rispettivamente l'identità E, C_2 , σ_x , σ_b .

| C_{2v} | E | C_2 | σ_x | σ_b |
|----------|---|-------|------------|------------|
| A_1 | I | I | I | I |
| A_2 | I | I | -I | -I |
| B_1 | I | -I | -I | I |
| B_2 | I | -I | I | -I |

Ricordando che il numero di masse costituenti la molecola del tiofene è 9 si calcolano facilmente le altre quantità necessarie che vengono date per le singole classi del gruppo nella tabella seguente:

| C_{2v} | E | C_2 | σ_x | σ_b |
|--------------------------|----|-------|------------|------------|
| u_R | 9 | I | I | 9 |
| φ_R | 0 | π | π | π |
| $(1 + 2 \cos \varphi_R)$ | 3 | -I | -I | -I |
| Ξ_i | 21 | I | I | 9 |

Le oscillazioni del tipo A_1 sono totalsimmetriche, le oscillazioni A_2 e B_1 avvengono nel piano della molecola (simmetriche le A_1 , antisimmetriche le B_1), le oscillazioni A_2 e B_2 avvengono trasversalmente al piano dell'anello. L'applicazione della formula (4) e delle regole di selezione Raman (5) ci porta

alla conclusione che le oscillazioni di tipo A₂ sono inattive in ultrarosso e attive in Raman, tutte le altre sono attive in ultrarosso ed in Raman, le A₁ corrispondono a righe Raman polarizzate, tutte le altre a righe Raman depolarizzate. La formula (2) ci permette di calcolare i numeri di frequenze dei vari tipi per il tiofene (secondo la simmetria supposta). Riassumo nella tabella i risultati:

Oscillazioni della molecola del tiofene.
Simmetria supposta C_{2v}.

| Tipo delle oscillazioni | Carattere di simmetria rispetto a: | | | Numero | Raman | Ultrarosso |
|-------------------------|------------------------------------|----------------|----------------|--------|-------|------------|
| | C ₂ | σ _x | σ _b | | | |
| A ₁ | s | s | s | 8 | p | a |
| A ₂ | s | as | as | 3 | dep. | i |
| B ₁ | as | as | s | 7 | dep. | a |
| B ₂ | as | s | as | 3 | dep. | a |

Totale oscillazioni n. 21

(s = simmetrica, as = antisimmetrica, p = polarizzata, dep. = depolarizzata, a = attiva, i = inattiva)...

Nel conteggio sono già escluse le così dette oscillazioni a frequenza nulla. Il numero totale delle oscillazioni (tutte attive in effetto Raman) pari a $3n - 6$ (n = numero delle masse oscillanti = 9) è perciò eguale a 21 e corrisponde invero al numero di Righe Raman del tiofene pubblicate recentemente da me in collaborazione col dott. Manzoni. In un lavoro antecedente⁽¹⁾ con più brevi tempi di posa si otteneva un numero di righe inferiore e corrispondente probabilmente alle oscillazioni nucleari e solo ad oscillazioni di valenza dei C-H. Pose più forti ci han permesso in questi ultimi lavori di rilevare anche le oscillazioni di «deformazione» dei C-H stessi.

I dati sperimentali pubblicati da Venkateswaran⁽²⁾ nel 1933 attribuiscono al tiofene otto righe con grado di depolarizzazione inferiore a 0,8 e cioè praticamente minore del valore limite 6/7 corrispondente alle righe depolarizzate. Questo dato sarebbe in buon accordo col numero sopracalcolato e favorevole alle conclusioni di considerare come altamente probabile per la molecola del tiofene la simmetria C_{2v}. Però permane la difficoltà esposta nei precedenti lavori che cioè mentre la teoria sovravolta richiede che tutte le frequenze attive in ultrarosso siano pure attive in effetto Raman, lo spettro

(1) «Zeits. Phys. Chem.», (B) 25, 327 (1934).

(2) «Phyl. Mag.», 15, 274 (1933).

ultrarosso di Coblenz⁽¹⁾ mostra per il tiofene almeno due bande riferibili plausibilmente ad oscillazioni fondamentali che non trovano corrispondenza nell'effetto Raman. Anche con lunghissime pose e forti eccitazioni non siamo riusciti ad ottenere la benché minima traccia di tali righe negli spettri Raman tantochè non sembra probabile che le stesse non appaiano negli ordinari spettri perchè caratterizzate da una intensità estremamente piccola⁽²⁾.

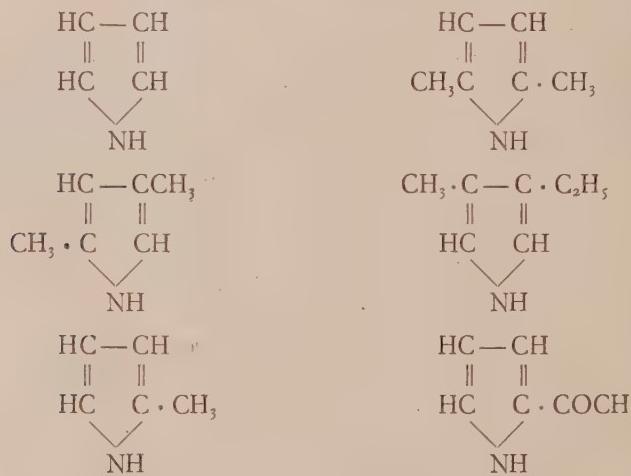
In un prossimo lavoro vedrò di discutere se attribuendo alla molecola del tiofene altri caratteri di simmetria sia possibile chiarire la difficoltà rilevata nei lavori citati⁽³⁾, e in parte discussa nella presente Nota.

Chimica. — Azione del nitroprussiato sui pirroli⁽⁴⁾. Nota⁽⁵⁾ di G. SCAGLIARINI, presentata dal Socio M. BETTI.

Poichè già da tempo nella Chimica biologica si mette a profitto la reazione colorata alla quale il nitroprussiato dà luogo in presenza di sostanze di natura pirrolica (reazione del melanogeno di Thormählen) così mi parve non privo di interesse estendere lo studio della reazione nitroprussica anche a tali composti.

Dei numerosi pirroli sperimentati alcuni danno nettissima la reazione rossa caratteristica, altri invece non la danno affatto, come risulta dal seguente elenco:

Danno la reazione:



(1) «Investig. of Infr. Spect.», 1905.

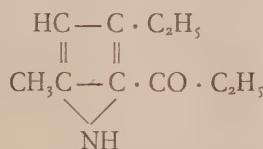
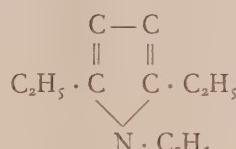
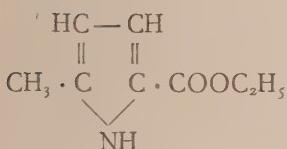
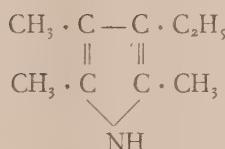
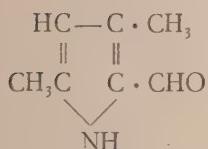
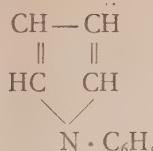
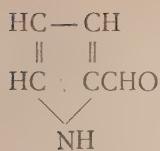
(2) «Iurn. Chem. Phys.», 2, 432 (1934).

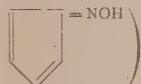
(3) V. nota (5), p. 288.

(4) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Ferrara.

(5) Pervenuta all'Accademia il 15 ottobre 1936.

Non danno la reazione:



Alla serie di pirroli che non reagiscono appartiene l' N-fenil-pirrolo ed i pirroli contenenti sostituiti nel nucleo i gruppi $-\text{CHO}$; COOC_2H_5 ; $-\text{COC}_2\text{H}_5$. Se si tiene presente che invece questi pirroli sono attaccati dall'acido nitroso o da nitriti alchilici (con formazione di derivati β -isoditrosi ) il risultato negativo con nitroprussiato è certamente dovuto al fatto che l'azione nitrosante del nitroprussiato è più blanda di quella dell'acido nitroso. Ciò del resto sta anche in buon accordo con quanto è stato messo in rilievo da P. Pratesi⁽¹⁾ che cioè l'introduzione di gruppi $-\text{CHO}$; $-\text{CO}-\text{R}$; $-\text{COOC}_2\text{H}_5$ stabilizza entro certi limiti, la molecola del pirrolo, sia nella forma « aromatica » che in quella più prettamente « olefinica »; e così mentre il nucleo pirrolico in tal modo sostituito subisce ancora l'azione dell'acido nitroso e dei nitriti alchilici, resiste invece ad un mezzo nitrosante assai meno energico come il nitroprussiato (il solo α -acetilpirrolo dopo parecchio tempo dà ancora la reazione).

Riferendosi alla formula classica del pirrolo, per queste reazioni col nitroprussiato si può prendere in considerazione ognuno dei quattro idrogeni

(1) « Gazz. Chim. Ital. », vol. 65, pp. 44 e 661 (1935).

dei metini nucleari, poichè la ipotesi che vi partecipi l'idrogeno iminico, già di per sè poco probabile, viene esclusa dal comportamento negativo del fillopirrolo (2, 3, 5 trimetil. 4, etilpirrolo) col nitroprussiato. Rimane quindi da studiare quale o quali, se più di uno, sono gli idrogeni legati al carbonio che il pirrolo impegnà nella reazione col nitroprussiato.

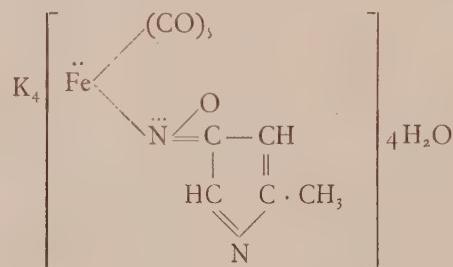
Dall'esame dei pirroli sperimentati appare non facile desumere una regola generale. Ricordando però che la nitrosazione del nucleo pirrolico si esplica di regola come dimostrarono A. Angeli e collaboratori⁽¹⁾ e H. Fischer⁽²⁾ nella posizione β di questo, è logico pensare che anche nel nostro caso sia uno degli idrogeni in posizione β che prende parte alla reazione col nitroprussiato.

Il solo opsopirrolo (β -metil- β' -etilpirrolo) fra i pirroli esaminati sembrerebbe contraddirre questa regola in quanto che esso pure dà la reazione col nitroprussiato; questa però è molto meno stabile di quella che si ha con tutti gli altri pirroli. Si potrebbe pertanto pensare che la reazione in β non sia l'unica possibile ma che certamente essa è quella che possiamo definire come « regolare ».

La composizione dei prodotti della reazione isolati, come vedremo, in ambiente metilalcoolico, ci dice che una molecola di pirrolo si lega ad una di nitroprussiato.

La reazione si deve interpretare come dovuta alla mobilità dell'idrogeno del nucleo pirrolico analogamente a quanto L. Cambi ha messo in evidenza per altri composti⁽³⁾.

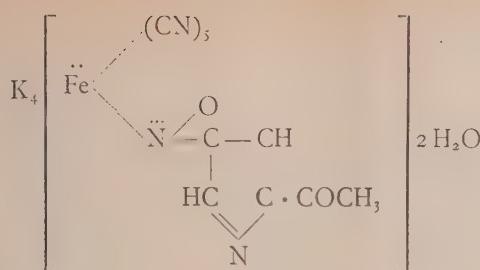
L'analisi dei composti che l' α -metilpirrolo e l' α -acetilpirrolo formano col nitroprussiato in ambiente alcalino per potassa caustica, conduce ad assegnare ad essi le formule seguenti:



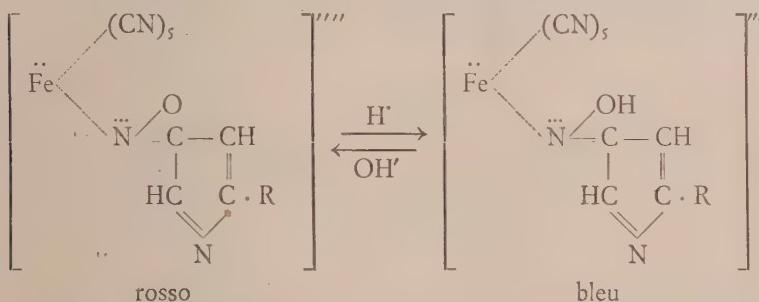
(1) Questi « Rendiconti » (5) 11, II, p. 16 (1902); (5) 14, I, p. 699 (1905); (5) 16, I, p. 271 (1907); « Gazz. Chim. Ital. » 34, I, p. 38 (1904).

(2) H. FISCHER u. K. ZEILE, « Ann. », 483, p. 251 (1930).

(3) « Ann. Ch. Applicata », 17, p. 57 (1927).



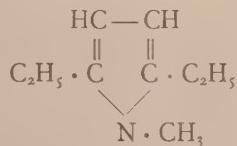
Tutti questi composti sono colorati in rosso, e per trattamento con acido acetico (alcuni anche per semplice diluizione con acqua) volgono al bleu. Alcalinizzando la colorazione ritorna rossa; cioè la reazione è reversibile. Ciò può essere rappresentato schematicamente in questo modo:



analogalemente a ciò che si verifica per alcuni composti fra nitroprussiato e chetoni preparati da Cambi⁽¹⁾.

Questi schemi sono in buon accordo col risultato dell'azione del nitrito d'amile (A. Angeli, l. c.) e dell'acido nitroso (H. Fischer, l. c.) sui pirroli; in quest'ultimo caso non è ancora stabilito se ai prodotti della reazione spetti la struttura di veri nitrosoderivati pirrolici o piuttosto quella di isonitrosopirrolenine.

Nel caso del nitroprussiato invece la mancanza di reagibilità di esso col N-metil-2- β -dietylpirrolo:



cui è inibita la formula pirroleninica, starebbe ad indicarci che i prodotti della reazione fra nitroprussiato e pirrolo sono del tipo delle β -isonitrosopirrolenine.

(1) Questi «Rendiconti» (5), 23, I, p. 814 (1914).

PARTE Sperimentale.

I composti descritti più avanti sono stati preparati tutti trattando soluzioni metilalcoliche dei pirroli con soluzioni pure metilalcooliche concentrate di nitroprussiato idrato e aggiungendo a goccia a goccia una soluzione concentrata di potassa caustica in alcool metilico.

I prodotti che furono sottoposti ad analisi vennero prima lavati ripetutamente per decantazione con alcool metilico, nel quale sono poco solubili, e raccolti su filtro alla pompa, indi posti ad asciugare nel vuoto su cloruro di calcio.

L'*N*-fenilpirrolo, il *N*-metil-*2*-*5*-dietylpirrolo, l' α -metil- α' -carbetossipirrolo, l' α -pirrolaldeide, il *2*-*4*-dimetil-*5*-formilpirrolo, il *2*-metil-*4*-etil-*5*-propionilpirrolo, il *2*-*3*-*5*-trimetil-*4*-etilpirrolo (fillopirrolo), come è già stato detto precedentemente, non reagiscono col nitroprussiato in ambiente acalino.

Il *pirrolo* dà una colorazione rossa intensa che con acido acetico volge all'azzurro; alcalinizzando la colorazione ritorna rossa.

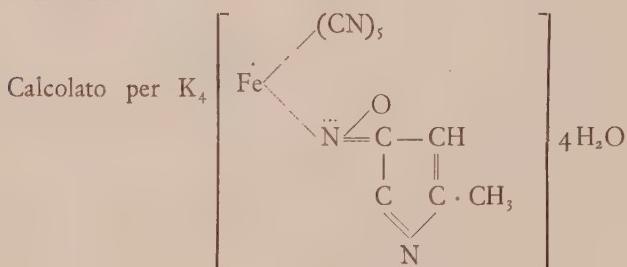
L' α - α' -dimetilpirrolo dà luogo ad un precipitato abbondante e stabile colorato in rosso intenso.

Il *2*-*4* dimetilpirrolo dà colorazione ma, con scarso precipitato di color rosso intenso.

Il β -metil- β' -etilpirrolo (opsopirrolo) dà una colorazione rosso intensa non molto stabile.

L' α -metilpirrolo dà luogo ad un abbondante precipitato rosso intenso; per diluizione con acqua o per trattamento con acido acetico il colore volge all'azzurro violetto.

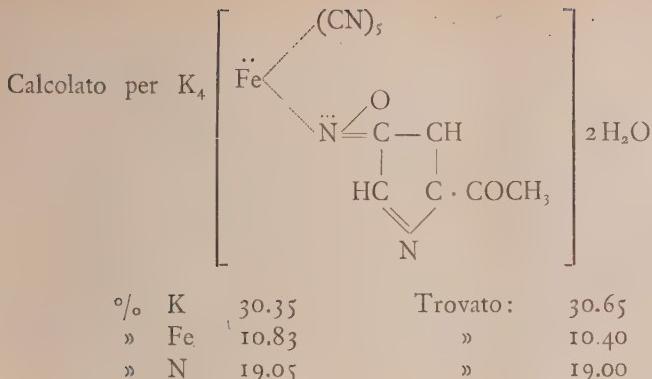
Analisi:



| | | | | |
|---|----|-------|----------|-------|
| % | K | 29.89 | Trovato: | 30.60 |
| " | Fe | 10.67 | " | 10.25 |
| " | N | 18.76 | " | 19.10 |

L' α -acetilpirrolo dopo qualche tempo dà luogo ad un precipitato rosso abbastanza stabile.

Analisi:



Alcuni dei composti pirrolici che mi hanno servito per queste ricerche mi furono gentilmente forniti dal prof. P. Pratesi al quale anche qui esprimo i più vivi ringraziamenti.

Embriologia sperimentale. — Segmentazione « totale » nei frammenti dell'uovo fecondato delle *Ascidie*. Nota ⁽¹⁾ di G. REVERBERI, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Fino dal 1931 ho reso noti alcuni risultati sullo sviluppo dei frammenti dell'uovo di Tunicati, uovo che, come si sa, appartiene al tipo di quelli più sicuramente riferiti allo sviluppo a mosaico. In quei risultati invece io vi ravvisavo un indizio di potere regolativo. I miei risultati vennero confermati dalle belle ricerche del Dalcq, ma l'interpretazione non fu, veramente, accettata nè dal Dalcq nè dal Berrill, che anche se ne occupò. Il fatto è che da allora in poi l'uovo di Ascidie comparve essere meno a mosaico di quello che da principio era sembrato: e le ricerche stesse del Dalcq, dello Schmidt, del Berrill e del Ti-Chow-Tung rivelarono continuamente indizi di una « regolazione ». Con tutto ciò l'uovo di Ascidie è ritenuto sempre classicamente come un uovo a mosaico.

Non m'è possibile ancora di ritrarre dai miei risultati degli elementi esaurienti per una revisione a fondo di tali concetti: su di essi mi propongo però di ritornare appena avrò ultimato lo studio delle larve ottenute dallo sviluppo dei frammenti.

In questa Nota preventiva, mi limito invece a dare le conclusioni principali sul primo sviluppo dei pezzi di uovo fecondato di *Ciona intestinalis*: e tali conclusioni, come apparirà, non faranno che affermare sempre più la regolabilità delle uova delle Ascidie.

(1) Pervenuta all'Accademia il 6 ottobre 1936.

A differenza delle mie ricerche eseguite nel 1931, ho potuto, questa volta, tagliare l'uovo secondo piani ben determinati; oltre la determinazione del piano, ho tenuto conto preciso della grandezza dei frammenti, e dello stadio di maturazione dell'uovo; ciò nella supposizione che procedendo nello sviluppo, l'uovo venisse gradualmente a fissare le sue potenze.

L'epoca della maturazione dell'uovo l'ho determinata da alcuni aspetti che assume via via l'uovo fecondato: il quale, come è noto, emette i globuli polari dopo la penetrazione dello spermio. Non c'è possibilità di errore nella determinazione degli stadi perché l'uovo presenta per ciascuno di essi degli aspetti morfologici caratteristici che furono da me descritti in un lavoro precedente e che furono descritti ultimamente anche da Cohen e Berrill.

Ho frammentato l'uovo facendo uso del micromanipolatore: la tecnica per liberare l'uovo dalle capsule fu da me già descritta in lavori precedenti.

Ho tagliato l'uovo quasi immediatamente dopo la penetrazione dello spermio, all'epoca del primo globulo polare, all'epoca del secondo globulo polare, all'epoca dei fusi che preaccennano la segmentazione dell'uovo, e in tutti gli stadi intermedi a questi.

Una prima serie di esperienze fu quella di asportare porzioni di uovo con piani di taglio parameridionali seguendo lo sviluppo dei pezzi nucleati residuati: la grossezza del frammento asportato variò da una quantità minima a una metà quasi di uovo.

La seconda serie di esperienze riguardò l'asportazione di parti sopranequatoriali o subequatoriali: le grandezze dei pezzi asportati variarono anche qui da un minimo a una metà dell'uovo. È da notarsi la particolare condizione dell'uovo in operazioni di questo ultimo tipo: poiché lo spermio penetra al polo vegetativo e qui resta mentre si compiono al polo animale le divisioni del pronucleo femminile che portano all'emissione dei globuli polari. È chiaro che se si taglia l'uovo prima della fusione all'equatore dei pronuclei maschile e femminile, verranno a ottenersi pezzi non equivalenti, di cui uno conterrà il solo nucleo spermatico, l'altro il solo nucleo dell'uovo.

Le conclusioni che possono dedursi dalle operazioni condotte secondo i piani anzidetti e secondo tutti i piani intermedi, sono del tutto concordi.

Va sottolineato un criterio che deve guidare nell'interpretazione dei risultati: e cioè vanno ritenuti come non danneggiati dall'operazione solo quei pezzi che si segmentano contemporaneamente, o quasi, alle uova intere — anch'esse scapsulate — prese come controllo. Il ritardo nella segmentazione è indizio di una maggiore o minore alterazione nella struttura citoplasmatica o nucleare del pezzo.

La segmentazione dei pezzi avviene nel seguente modo. Il primo e secondo solco di segmentazione sono, in tutti indistintamente i frammenti, ortogonali tra loro e passano per il piano dei globuli polari. Col terzo solco — equatoriale — si individuano otto blastomeri ed è già possibile ravvisare net-

tamente la simmetria bilaterale del germe; il quartetto dei blastomeri superiori è spostato rispetto al quartetto inferiore, e in questo, posteriormente sporgono due blastomeri nei quali è segregata una sostanza cito-plasmatica più chiara. La quarta segmentazione avviene prima nel quartetto inferiore che nel superiore e si ottiene così il tipico stadio di dodici blastomeri, otto inferiori e quattro superiori: dai blastomeri sporgenti posteriormente dello stadio antecedente derivano per divisione ineguale due micromerì sporgenti e jalini: la simmetria bilaterale è evidente. Segue la segmentazione del quartetto superiore e il frammento risulta costituito complessivamente di sedici blastomeri. I rapporti di grandezza e di posizione, tra i sedici blastomeri costituiti, sono, in tutto e per tutto, fino al minimo dettaglio, come in un uovo intero: la segmentazione di un frammento è la ripetizione in miniatura della segmentazione di un uovo intero. Dallo stadio di sedici blastomeri si ottiene successivamente una rosetta tipica bilaterale e poi una gastrula in tutto simile a quella derivata da uova intere. Non ho ancora fatto lo studio in sezione delle gastrule e delle larve: e quindi sulla loro « totalità » o « parzialità » non posso definitivamente pronunziarmi. Ma già fin d'ora apparirebbe strana la supposizione che da frammenti che si comportano nello sviluppo come uova in miniatura non s'avessero ad ottenere larve totali. L'andamento descritto l'ho constatato in frammenti « laterali », in frammenti privati del polo animale e in frammenti amputati di tutta la porzione vegetativa: e sia all'epoca del primo globulo polare, sia all'epoca del secondo globulo polare e anche all'epoca dell'apparizione dei fusi che preaccennano alla prima segmentazione.

Pezzi equivalenti a un quarto, e meno, di uovo presentarono anch'essi gli stessi aspetti descritti.

Solo nei frammenti dai quali erano stati esclusi col taglio tutti i materiali subequatoriali dell'uovo notai che, sebbene la segmentazione fosse per la direzione dei piani in tutto simile a quanto si verifica nell'uovo intero, tuttavia la disposizione dei blastomeri allo stadio di otto e sedici realizzava una simmetria radiale e i micromerì non erano distinguibili dagli altri blastomeri. Queste esperienze mi condurrebbero a ritenere che il materiale formativo dei micromerì e i fattori della simmetria bilaterale siano in qualche modo strutturalmente contenuti nella regione subequatoriale dell'uovo.

Concludendo devo affermare che la segmentazione di tipo « parziale », apparisce solo a partire dallo stadio di due blastomeri, nell'uovo delle Ascidie: e che prima di tale stadio, nell'uovo fecondato, o non fecondato, la segmentazione è del tipo « totale »: sia per quello che riguarda l'andamento generale, l'orientamento dei piani, il ritmo di segmentazione, la grandezza dei blastomeri, la simmetria del germe. Solo nella regione subequatoriale dell'uovo e a partire probabilmente da uno stadio determinato si fissano i caratteri della simmetria bilaterale e della formazione dei micromerì.

Zoologia. — *L'allevamento del «Reticulitermes lucifugus» in tubi da saggio.* Nota⁽¹⁾ di C. JUCCI, presentata dal Socio F. SILVESTRI.

Tra le ricerche con le quali Battista Grassi impresse l'orma del suo genio nei più vari campi della biologia, forse quelle sulla vita delle termiti sono le più mirabili per profonda originalità ed acutezza di analisi sperimentale.

Una piccola fortunata scoperta, com'egli la chiama, lo mise in grado di penetrare nei segreti più intimi della vita sociale di questi insetti: la possibilità di allevarli in provette di vetro. Anche una dozzina appena di individui di *Calotermes flavigollis*, isolati in una provetta, si organizzano subito in una piccola colonia e si provvedono d'una coppia di individui reali di sostituzione.

Purtroppo lo stesso metodo non risulta applicabile all'altra specie italiana, il *Reticulitermes lucifugus*, per la quale lo studio sperimentale sarebbe riuscito anche più interessante, data la presenza di una casta operaia che non esiste in *Calotermes*, ove tutti i neutri sono soldati.

Tentando di fondare in provette di vetro piccole colonie con individui di *lucifugus*, Grassi li vide sempre deperire in pochissimi giorni, per scomparsa dei Protozoi dall'ampolla cecale, scomparsa alla quale le termiti non possono sopravvivere avendo bisogno di questi simbionti per digerire la cellulosa.

Dopo vari tentativi infruttuosi, p. es. con nidini Janet come per le formiche, io sono riuscito ad allevare il *lucifugus* in tubi da saggio. Immetto nel tubo, assieme a pezzetti di legno piuttosto umido, un certo numero di termiti, da una cinquantina a qualche centinaio. Lascio il tubo, infilato verticalmente in un portaprovette, aperto per più giorni sinchè l'umidità eccessiva che traspirando dal legno imperlava le pareti del tubo non sia diminuita un po' per evaporazione e più perchè imprigionata nei detriti legnosi e nel materiale (vomito e feci) di cui le termiti ben presto incrostano le pareti della provetta per proteggersi dalla luce. Allora chiudo il tubo con un cappuccetto di reticella metallica, un po' per moderare l'ulteriore evaporazione, un po' per impedire che le termiti costruendo — come spesso fanno dopo il loro istallamento regolare — delle gallerie di detriti e di feci, appoggiate alle pareti di vetro, evadano.

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1936.

Ma prima ancora di costruire gallerie le termiti che si trovano bene in un tubo costruiscono dei setti di feci che tesi tra i pezzetti di legno e le pareti di vetro, isolano l'ambiente dal contatto diretto con l'aria esterna. A lunghi intervalli, p. es. ogni due settimane, è opportuno aggiungere un po' di umidità ai tubi che naturalmente, con tanta ventilazione, tendono a divenire troppo aridi. Faccio questo iniettando con una pipetta qualche goccia d'acqua su un batuffolo di ovatta disposto in striscia, addossata alle pareti del recipiente, tra l'estremo superiore dei pezzetti di legno e il cappuccetto di rete metallica.

È una operazione però nella quale bisogna usare grande cautela. Perchè, se la colonia tende a deperire per soverchio disseccamento, specie nei mesi più caldi, c'è d'altra parte il pericolo di vederla distrutta in poche ore per eccesso di umidità. Le pareti del tubo si imperlano di goccioline e tutte le termiti restano paralizzate, immobili come morte, evidentemente asfittiche. Più volte ho potuto salvare di queste colonie intervenendo rapidamente, scappucciando il tubo e frangendo i setti di feci sì che l'aria esterna potesse liberamente irrompere nell'ambiente e ventilarlo. Si vede allora dopo poco ristorarsi la normale attività della colonia. Nei casi più gravi è necessario cavar fuori la popolazione dal tubo e metterla all'aria su una capsula. Spesso dopo qualche ora la maggior parte degli individui si ridesta dal suo stato asfittico ed è salva.

Altre volte l'umidità si accumula lentamente e nell'ambiente sovrastato di vapor d'acqua si sviluppano muffe e batteri che fan strage delle termiti. Caratteristico un batterio cromogenò, già notato da Grassi, che colora spesso in carminio la testa delle termiti o l'intero corpo.

Naturalmente quando per l'invasione di questa flora le termiti cominciano a morire i loro cadaveri accumulandosi nel fondo della provetta e putrefacendosi ammorbano l'ambiente e tutto va in malora.

Non ho avuto sinora possibilità di dedicare allo studio di queste colonie di *lucifugus* in provetta tempo sufficiente. Ma ho già visto che, specialmente se si tengono i tubi allo scuro sì che le termiti non siano stimolate a incrostante troppo fittamente le pareti di vetro, è facile compiere su queste piccole colonie le più minute osservazioni sulla vita sociale dei nostri insetti.

Il risultato più notevole da me ottenuto sinora è lo sviluppo in queste provette di individui reali ovificanti. Il desiderio di tenere in vita più a lungo possibile le mie colonie mi ha trattenuto dal sacrificarne troppe per l'esame e non ho finora osservato nelle colonie fondate con popolazione operaia e con larve in vari stadi di sviluppo, la comparsa di individui reali di sostituzione, come invece si verifica tanto facilmente col metodo di Grassi in *Calotermes*. Ma nelle colonie che fondai in aprile e maggio con popolazione di neutri, di larve e di ninfe, le ninfe di prima forma (ad occhi pigmentati e lunghi astucci alari) si sono sviluppate in alati che

nel mese di giugno si osservavano in numero vario da 2 a 7 per tuttetto, aggirantisi tra la popolazione: quali tutti bianchi, come appena sguisciati dalla spoglia ninfale, con le quattro lunghe lamine alari candide, regolarmente distese o un po' arrotolate, quali un po' abbruniti, sempre assai leggermente, nel torace e magari anche nelle ali. Già ai primi di luglio ho potuto osservare in molte di queste colonie gruppi di uova incollati alle pareti o più spesso appoggiati al fondo della provetta, donde schiere di operai si affannavano a portarle al sicuro quando i movimenti della provetta durante l'osservazione avevano gettato l'allarme nella colonia.

Sacrificando parecchie di queste colonie, per fissarne i riproduttori per lo studio istologico, ho trovato masse notevoli di uova e molti neonati e piccole larve dal corpo ancora niveo. I riproduttori erano tutti derivati da alato bianco che ha perso le ali, spesso conservando, oltre le squamme, un mozzicone più o meno esteso di una o più lamine alari; qualcuno ha conservato le lamine alari *in toto*, un po' arrotolate. Hanno tutti un colorito dell'addome gialliccio, caratteristico dei reali neotenici, e una netta pubescenza.

Alcuni non presentano tracce sensibili di abbrunitamento se non come sfumatura nei tergiti toracali e soprattutto nelle pleure; altri presentano pleure toracicche e squamme alari distintamente brune, e bruni anche i mozziconi di lamine alari, e piuttosto abbrunita anche la testa, specie le antenne.

È da ricordare che Grassi conosceva questi neotenici da alato bianco avendoli trovati più d'una volta in tronchi trasportati lontano - onde orfanearne la popolazione - due mesi prima della sciamatura.

Ma quello che è un risultato veramente interessante è l'averli ottenuti abbondantemente ovificanti in una cinquantina di colonie in provette di vetro.

I risultati da me conseguiti hanno interesse anche in rapporto al problema dei reali veri nel *lucifugus*. È noto che in questa specie non si rinviene mai da noi la coppia reale vera, ma solo schiere di regine di complemento, derivate da ninfe di seconda forma; o, eccezionalmente, da larve o ninfe di prima forma (individui reali di sostituzione). Silvestri suppose che gli alati sciamanti potessero fondare nuove colonie nelle quali però la coppia reale vera sarebbe sostituita nel secondo anno di vita delle regine di complemento.

Questa supposizione è stata dimostrata vera dal Feytaud per certe regioni della Francia. Ma la questione è assai complicata in quanto nella Francia stessa sembra esistano due forme di *lucifugus*, una delle quali presenta frequentemente, come la americana, i reali veri, e l'altra, come l'italiana, mai. Il problema è estremamente interessante e varrebbe la pena di studiarlo profondamente.

Io non ho mai trovato reali veri nel *lucifugus*. Non ne ho mai negato però la possibilità di sviluppo ed anzi io per primo ottenni da una coloniola in provetta, fondata da coppia di sciamanti, lo sviluppo di un soldato.

Ora i risultati dei miei allevamenti di *lucifugus* in tubi da saggio dimostrano che la colonia può facilmente adottare se non gli alati sciamanti derivati da altre colonie, come supponeva Fritz Muller, i suoi alati almeno, trattenendoli nelle colonie (forse coll'inibirne quella perfetta maturità di cui è indice l'annerimento completo).

È quasi superfluo notare che l'esser riuscito ad allevare il *lucifugus* in provette, apre la strada a tutto un insieme di possibilità sperimentali del più grande interesse per il problema fondamentale della differenziazione castale e in genere per la sociologia comparata dei Termitidi.

Una delle esperienze che mi propongo di eseguire su queste colonie in provette è il trattamento con raggi X, o con altre radiazioni, degli individui riproduttori. È nota, dopo i miei studi sulle cellule nutritive degli spermii, la facilità con la quale gli elementi germinali nelle termiti deviano dallo sviluppo normale verso stadi degenerativi. Non è improbabile che l'irradiazione produca nei riproduttori funzionanti la totale castrazione e questa potrebbe portar con sè inaspettate modificazioni morfologiche.

A questo proposito desidero notare che se lo studio, comparato nelle varie specie, delle degenerazioni delle cellule germinative nei reali è interessantissimo in rapporto alla vita coniugale della coppia reale e alle variazioni della biologia sessuale da specie a specie; d'altra parte lo studio delle degenerazioni delle cellule germinative nei neutri può essere straordinariamente interessante per chiarire il processo stesso della neutralizzazione.

Nel mio Laboratorio la prof.ssa Stella ha scoperto nei neutri fenomeni di degenerazione delle cellule germinative maschili assai analoghi a quelli da me descritti nei testicoli degli alati sciamanti e dei re; e non è improbabile che questo studio la conduca ad aggredire, da un nuovo punto di vista, il problema della differenziazione castale dei neutri.

Colgo l'occasione per ribadire la mia impressione, manifestata già nel 1924, che i Blattidi presentino nella struttura e nel ritmo funzionale delle gonadi le basi istofisiologiche che hanno permesso agli Isotteri il loro meraviglioso adattamento alla vita sociale.

Una delle esperienze che ho già in corso di esecuzione sulle colonie di termiti in provette è quella di somministrare vitamina E, la vitamina della fecondità, a neutri: operai, soldati e larve di neutri. Chi sa che queste almeno, se non anche i neutri adulti, possano riprendere lo sviluppo delle gonadi e raggiungere come neotenici la maturità o magari progredire più o meno verso il destino di alati. Le mie prove sinora non han portato a conclusione per non avere io ancora trovato un veicolo alimentare adatto.

Certamente poi sarà interessantissimo studiare in queste piccole colonie con riproduttori da alato bianco largamente ovificant, la composizione della nuova generazione sgusciata dalle uova, in rapporto alla composizione della colonia (con o senza soldati, con una percentuale varia di operai, di larve di neutri, di larve sessuate) investendo così direttamente per via sperimentale, il problema della differenziazione delle caste di neutri⁽¹⁾.

Biologia. — *Sullo sviluppo embrionale nell'aria rarefatta.*

I. *L'accrescimento dei girini.* Nota⁽²⁾ di ANNA CAPPELLETTO, presentata dal Socio A. HERLITZKA.

Le ricerche sulle quali qui brevemente riferisco hanno lo scopo di studiare lo sviluppo dei girini di rana mantenuti nell'aria rarefatta.

Il materiale raccolto è stato misurato e fissato per esser sottoposto ad un esame microscopico. Dato il grande numero di individui da studiare, ciò richiederà un tempo piuttosto lungo. Perciò intendo qui di dare una breve relazione sull'andamento generale della ricerca, riservandomi di esporre in seguito, dopo lo studio più particolareggiato del materiale, i risultati ottenuti.

METODO.

Descrizione del dispositivo. — Per tenere le larve di rana nell'aria rarefatta per un tempo di alcune settimane, era necessario usare un dispositivo che permettesse di mantenere una depressione barometrica relativamente costante e nutrire le larve nel tempo stesso in cui si rinnovava l'acqua in cui queste vivevano. Inoltre si doveva poter prelevare di giorno in giorno qualcuno dei girini per poterli esaminare e fissare, e ciò senza interrompere la depressione. A questo scopo ho costruito il dispositivo seguente (fig. 1).

I girini che si trovano in un cristallizzatore, sono posti nell'interno di una campana di cristallo che, col suo bordo smerigliato, posa a perfetta tenuta su una lastra di marmo. La campana è in comunicazione con una pompa ad acqua « p » e con una pompa Pleiffer's ad olio attraverso una valvola a mercurio che permette solo il passaggio dell'aria dalla campana alla pompa. All'inizio dell'esperimento si fa azionare la pompa ad olio, con la quale si raggiunge rapidamente la depressione voluta; a questo punto si arresta

(1) Presenterà notevole interesse anche lo studio istologico dei reali da alato bianco per vedere, p. es., se in essi avvenga la degenerazione dei muscoli alari e la formazione di tessuto adiposo reale come negli sciamanti normali e la differenziazione delle ghiandole ipodermali escretrici come nei neotenici.

(2) Pervenuta all'Accademia il 7 ottobre 1936.

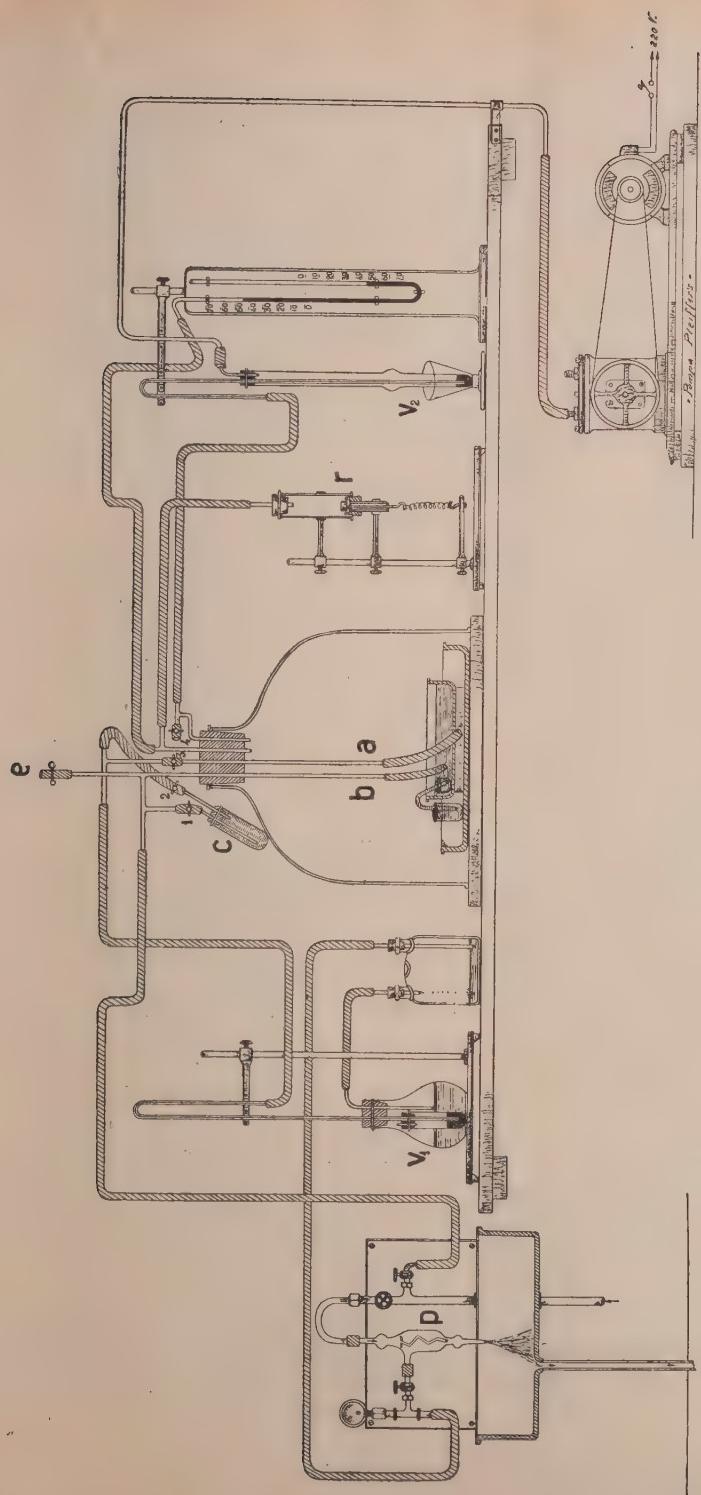


Fig. I.

la pompa ad olio e si fa funzionare solo quella ad acqua che è in genere sufficiente per mantenere costante la pressione raggiunta. A questo scopo ho fatto comunicare la campana con la valvola « r ». Tale valvola è formata da un tubo di vetro che ha l'estremità superiore connessa con la campana; l'altra è chiusa da un tappo di gomma perforato, sul quale posa un piattello di metallo collegato a una molla, la cui tensione, opportunamente regolata, permette la chiusura ermetica della valvola o l'entrata in essa di una quantità determinata di aria. Sotto la campana vi è un cristallizzatore contenente i girini. In esso si immette l'acqua per mezzo del tubo « b » e la si mantiene a un livello costante mediante un sifone comunicante con un bicchiere posto all'esterno. Per impedire l'accesso dei girini al sifone, si introduce l'estremità di questo, che pesca nel cristallizzatore, in un piccolo bicchiere coperto di garza. L'acqua che trabocca dal bicchiere esterno si versa in un largo e basso recipiente su cui poggia pure il cristallizzatore, e viene aspirata — insieme con l'aria ambiente — dalla pompa « p » mediante il tubo « a ».

Il mangime per i girini viene introdotto nel tubo « e », munito di una valvola e comunicante col tubo « b », e la sua discesa viene facilitata dal continuo deflusso dell'acqua nel cristallizzatore e dalla depressione esistente sotto la campana.

Durante l'esperimento, le valvole 1 e 2 sono abitualmente chiuse, la valvola 3 è aperta. Quando si vuol poi prelevare un girino dalla campana, si chiude la valvola 3 e si aprono la 1 e la 2: in tal modo, l'aspirazione nella campana non avviene più per mezzo del tubo « a », ma mediante il tubo « b ». Il girino che si vuol prelevare, viene così assorbito con l'acqua del cristallizzatore e, dopo aver percorso il tubo « b », devia a sinistra fino a scendere nel recipiente « c », attraverso la valvola « l » aperta: appena il girino è entrato nel recipiente « c », bisogna aver cura di chiudere la valvola 2, perché esso non prosegua oltre. Si chiude quindi anche la valvola 1, e si asporta il recipiente « c » con tutta facilità, essendo esso connesso all'apparecchio per mezzo di un tappo di gomma a due vie.

La valvola 4 è normalmente chiusa: la si apre solo in casi eccezionali in cui si voglia introdurre molta aria nella campana.

La depressione della campana viene registrata da un manometro.

Procedimento. — Gli embrioni di rana, ancora avvolti da muco, a doccia midollare già chiusa, sono stati messi sotto la campana il 21 maggio 1936, e durante il periodo dell'esperimento, di circa un mese, la depressione media è stata di mm 343,5, con oscillazioni a volta anche notevoli, per incidenti vari, ma di brevissima durata.

La pressione media esterna era di mm 738,9, con un valore massimo di mm 745,7 e un valore minimo di mm 727.

La temperatura interna della campana era uguale a quella ambiente.

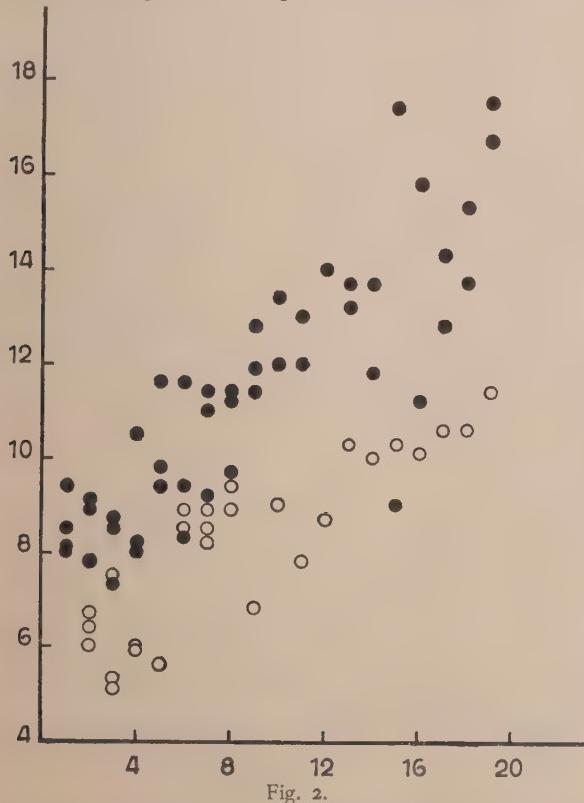
Ho alimentato i girini con carne di rana e fegato di sanato tritati finemente.

Ho prelevato da uno a tre girini al giorno, dal 1° al 19 giugno, e li ho fissati in acido osmico all'1 %. Li ho passati quindi in alcool a 70° e ne ho misurato la lunghezza.

Ogni giorno ho fissato pure in acido osmico dei girini fatti vivere in condizioni normali e li ho quindi misurati dopo averli passati in alcool a 70°.

RISULTATI.

Il diagramma della fig. 2 indica la distribuzione dei valori della lunghezza dei girini durante un periodo di tempo che va dal 12° giorno al 31° giorno dell'esperimento. Sull'ascissa sono segnati i giorni e sull'ordinata la dimensione longitudinale espressa in millimetri.



Come appare chiaramente dal diagramma stesso, l'accrescimento degli individui vissuti in depressione barometrica (cerchietti bianchi) è molto

minore di quello ottenuto in individui vissuti in condizioni normali (cerchietti neri). Gli individui vissuti in condizioni normali hanno raggiunto i 17,5 mm di lunghezza, mentre quelli vissuti in depressione barometrica non hanno mai oltrepassato gli 11,4 mm, pur mantenendo proporzionate le varie parti del loro corpo: in questi ultimi ho notato inoltre una vivacità molto minore e un consumo di mangime notevolmente inferiore a quello riscontrato nei girini di confronto.

Il prelievo dei girini è cominciato il 12° giorno dopo l'inizio dell'esperimento: si osserva subito nei primi tre giorni di prelievo che la lunghezza dei girini è in media di mm 6,3 per quelli sviluppati sotto la campana, di fronte a 8,5 di quelli normali. Nei giorni seguenti si osserva che in linea generale i girini normali subiscono un rapido aumento di lunghezza, mentre quelli vissuti sotto la campana hanno un aumento molto minore. Tuttavia la fluttuazione è relativamente grande per i girini normali e alcuni pochi di questi individui, soprattutto nei primi giorni, presentano una grandezza dell'ordine di quella dei girini in esperimento, ma si tratta di casi eccezionali.

Ammettendo in prima approssimazione che l'accrescimento nel periodo considerato rappresenti una funzione lineare del tempo, si vede che l'accrescimento giornaliero per i girini normali è di 0,5 mm al giorno, mentre per quelli in esperimento è soltanto di 0,3 mm.

In conclusione, questi primi risultati dimostrano che la velocità di accrescimento dei girini nell'aria rarefatta subisce, di fronte a quello dei girini in condizioni normali, una diminuzione. Resta però riservata ogni conclusione sulla velocità dello sviluppo, e più precisamente su quella della differenziazione dei vari tessuti ed organi, e in particolar modo su quello dell'attività degli organi emopoietici, problema questo che potrà essere risolto solo quando sarà terminato l'esame microscopico.

Fisiologia. — *Modificazioni del ricambio basale in alta montagna* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di C. LENTI, presentata dal Socio A. HERLITZKA.

Quantunque l'influenza che il clima di alta montagna esercita sul ricambio gassoso in condizioni di riposo sia stata oggetto di molte indagini, non si sono fino ad ora raggiunti risultati ben definiti.

Ho voluto perciò eseguire misure di metabolismo basale in alta montagna, allo scopo di controllare se il clima alpino provoca modificazioni sul ricambio.

Il metodo usato è quello dell'apparecchio di Benedict, che consiste nel far respirare il soggetto da uno spirometro contenente ossigeno puro, facendo assorbire l'anidride carbonica dalla calce sodata, e misurando l'ossigeno consumato dalla diminuzione dell'ossigeno contenuto nello spirometro, ridotto a $0^{\circ},760$ mm. e allo stato di secchezza.

Per esprimere in calorie il bisogno energetico, è presupposto, durante il periodo in esame, un quoziente respiratorio di 0,825, a cui corrisponde un valore di 4,825 calorie per litro di ossigeno. Il valore del metabolismo basale è espresso in calorie per metro quadro e per ora. La superficie corporea è determinata mediante la tavola di Dubois, conoscendo il peso e l'altezza del soggetto.

Gli esperimenti vennero eseguiti all'Istituto Mosso al Col d'Olen (a 2901 m. sul livello del mare) nei mesi di luglio e agosto 1935 e 1936, su dieci individui sani, in condizioni fisiologiche. Furono compiuti al mattino, dopo il riposo notturno, stando il soggetto a letto, a digiuno, nella propria cameretta, dove l'apparecchio veniva trasportato. L'indagine durava almeno otto minuti, e, dopo un intervallo di pochi minuti, veniva ripetuta. Le determinazioni vennero eseguite al secondo giorno dall'arrivo e ripetute al settimo e quattordicesimo giorno. I risultati di ogni determinazione sono riportati nella tabella, dove sono indicati i valori delle tre misure di ogni soggetto, con le variazioni percentuali.

Esaminando i risultati ottenuti nelle ricerche descritte, vediamo come tutti i soggetti, due eccettuati, presentino un comportamento ben netto del metabolismo basale nel senso di un aumento. Questo si verifica, e nelle determinazioni eseguite al settimo giorno, e in quelle eseguite al quattordicesimo. Invero, l'aumento medio riscontrato al settimo giorno è, trascu-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto « Angelo Mosso » sul Col d'Olen, Sezione alpina dell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Torino.

(2) Pervenuta all'Accademia il 23 ottobre 1936.

TABELLA.

| N. d'ordine | Soggetto | Sesso | Metabolismo basale per metro quadrato e per ora | | | | | |
|-------------|----------|-------|---|-----------|----------------|------------|----------------|----------------|
| | | | 2° giorno | 7° giorno | Diff. 1-2 % | 14° giorno | Diff. 1-4 % | Diff. 2-4 % |
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | C. L. | M. | 44.8 | 42.8 | — 4.4 | 41.3 | — 7.8 | — 3.6 |
| 2 | P. R. | M. | — | 40.2 | — | 42.2 | — | + 4.7 |
| 3 | O. C. | F. | 42.2 | 37.2 | — 11.8 | 37.9 | — 10.1 | + 1.9 |
| 4 | E. M. | F. | 34.0 | 35.4 | + 4.1 | 36.4 | + 7.0 | + 2.8 |
| 5 | C. S. | M. | 35.5 | 39.9 | + 12.3 | 40.9 | + 15.2 | + 2.5 |
| 6 | R. L. | F. | 32.6 | 36.4 | + 11.6 | — | — | — |
| 7 | E. S. | F. | 30.7 | 31.6 | + 2.9 | 32.0 | + 4.2 | + 1.2 |
| 8 | P. S. | M. | 34.0 | 39.0 | + 14.7 | 37.9 | + 11.4 | — 2.8 |
| 9 | A. A. | M. | 35.3 | 37.2 | + 5.3 | 36.7 | + 3.9 | — 1.3 |
| 10 | A. C. | F. | 37.2 (1) | 37.6 (2) | + 1.0 | 40.0 (3) | + 7.5 | + 6.4 |
| 11 | C. L. | M. | 40.7 (1) | 45.0 (2) | + 10.6 | 43.9 (3) | + 7.9 | — 2.4 |

(1) Valori presi al 3° giorno.

(2) Valori presi all' 8° giorno.

(3) Valori presi all' 11° giorno.

rando i casi 1 e 3 aberranti e 10 e 11 in cui le determinazioni vennero fatte in giorni differenti, indicati in parentesi, dell'8.3 %, ed è uguale all'aumento medio che si riscontra al quattordicesimo rispetto al secondo giorno. Al settimo giorno, l'aumento va da un minimo di 2.9 % a un massimo di 14.7 %, al quattordicesimo, da un minimo di 3.9 % a un massimo di 15.2 %. Le differenze percentuali tra il settimo e il quattordicesimo giorno variano tra — 2.8 % e + 4.7 %, con una media di 0.6 %, cioè le differenze permangono nei limiti degli errori.

Il comportamento aberrante ottenuto nei casi 1 e 3, o meglio, i valori così elevati che in questi due soggetti si riscontrarono al secondo giorno dall'arrivo, possono forse mettersi in rapporto al lavoro assai gravoso e inconsueto compiuto per raggiungere l'Istituto Mosso il giorno innanzi l'esperimento: O. C. giungeva la sera da Gressoney la Trinité (m. 1637 s. l. m.) e C. L. compiva tutto il tragitto da Alagna (m. 1191 s. l. m.) al Col d'Olen in condizioni atmosferiche avverse, giungendo assai stanco. Tutto questo è in rapporto a quanto Durig e Zuntz⁽¹⁾ e Lindhard⁽²⁾ hanno dimostrato, e

(1) A. DURIG, u. N. ZUNTZ, « Skand. Arch. f. Physiol. », 23, 133, 1913.

(2) J. LINDHARD, « Pflügers Arch. f. d. ges. Physiol. », 161, 233, 1915.

cioè che il ricambio respiratorio, dopo un lavoro faticoso, non torna alla norma se non dopo cinque ore come minimo e sessanta come massimo. Osservando poi i valori ottenuti nelle determinazioni del settimo e del quattordicesimo giorno in questi due soggetti, notando come i valori ottenuti siano più grandi di quelli dati come normali da Dubois (in O. C. 37.2 e 37.9 invece di 36.9, in C. L. 42.8 e 41.3 invece di 40.3), si può forse ritenerne di aver avuto anche in questi un aumento del ricambio basale.

I risultati ottenuti concordano quindi con quanto già parecchi anni or sono, studiando il ricambio gassoso in condizioni di riposo in alta montagna, riscontrarono N. Zuntz⁽¹⁾, A. Durig⁽²⁾, Jaquet e Staehelin⁽³⁾, contrariamente a quanto videro Loewy⁽⁴⁾ su se stesso (mentre riscontrò un aumento in J. Loewy e N. Zuntz), Douglas, Haldane, Henderson e Schneider⁽⁵⁾, i quali non notarono alcuna modificazione del ricambio respiratorio per azione del clima alpino. Le ricerche più recenti di Viale⁽⁶⁾ e di Kestner e Schadow⁽⁷⁾ solo in parte si accordano con quanto venne ottenuto nelle ricerche presenti, poichè essi notarono solo nei primi giorni un aumento dei processi ossidativi (3°-4° giorno), che ritornarono al decimo giorno all'incirca ai valori del primo giorno, che sono poi pressochè quelli che si ottengono in pianura. In queste ricerche invece si è notato che l'aumento ottenuto nella prima settimana di soggiorno si mantiene durante la settimana successiva.

(1) N. ZUNTZ, A. LOEWY, F. MULLER, W. GASPARI, *Höhenklima und Bergwanderung*. Berlin, 1916.

(2) A. DURIG, «Denkschr. Math. Naturw. Kl. d. k. Akad. Wiss.», Wien, 86, 1910.

(3) A. JAQUET, e R. STAHELIN, «Arch. f: exp. Path. u. Pharm.», 46, 274, 1901.

(4) A. LOEWY, J. ZUNTZ, «Pflügers Arch. f. d. ges. Physiol.», 46, 9, 10, 461, 1897.

(5) DOUGLAS, HALDANE, Y. HENDERSON, SCHNEIDER, «Philos. Trans. R. Soc. London S. B.», 203, 185.

(6) G. VIALE, «Giorn. R. Acc. Med. Torino», 82, 350, 1919.

(7) O. KESTNER, u. H. SCHADOW, «Pflügers Arch.», 217, 492, 1927.

Fisiologia. — *Sulle relazioni osmotiche tra il tuorlo e l'albumine nell'uovo di gallina.* Nota di A. ORRÙ, presentata dal Corrisp. S. Visco.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Comportamento della conduttività elettrica del siero di sangue in funzione della temperatura.* Nota di A. ORRÙ, presentata dal Corrisp. S. Visco.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il PRESIDENTE dà ai Colleghi la dolorosa notizia della morte, avvenuta durante le ferie, dei Soci Nazionali PINCHERLE e PIROTTA e alla memoria dei due insigni Maestri e Colleghi rivolge il saluto reverente e commosso dell'Accademia. Annuncia anche la morte dei Soci stranieri LE CHATELIER e KÜSTNER.

Comunica quindi ai Colleghi che hanno inviato lettere di ringraziamento per la loro elezione a Socio gli Accademici DE BLASI, GHIGI, CASSINIS, POLVANI e CARRELLI. A tutti i nuovi eletti e in particolar modo a S. E. DE BLASI, presente alla seduta, porge il benvenuto dell'Accademia.

Il Socio PARRAVANO commemora brevemente il Socio straniero LE CHATELIER mettendo in rilievo come Egli sia stato il rappresentante più cospicuo della scienza applicata e come nella Sua lunga attività Egli abbia aperto nuove vie alla scienza. Crede d'interpretare il sentimento unanime dei chimici italiani inviando alla memoria dello Scomparso un commosso saluto.

Il Socio DE BLASI ringrazia il Presidente per le cortesi espressioni rivolte a tutti i Soci nuovi eletti, a nome dell'Accademia.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Corrispondente CHECCHIA RISPOLI anche a nome del Collega VINASSA DE REGNY presenta la relazione con la quale si propone la stampa della Memoria di A. Boni sui « Vertebrati retici italiani ».

L'Assemblea approva.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta le opere inviate in omaggio all'Accademia e segnala in particolar modo i due grossi volumi sulla « Mecanica dei Fluidi » pubblicati in occasione dell'inaugurazione dell'Istituto di meccanica dei fluidi dell'Università di Lille; e « Il problema demografico italiano osservato da un pediatra » del prof. G. B. Allaria.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Il Socio Crocco presenta una Nota di L. Laboccetta per l'inserzione nei Rendiconti.

Alle ore 15,45 il Presidente sospende la seduta perchè la Classe possa ascoltare il discorso di S. E. il Capo del Governo, radiotrasmesso da Milano.

Terminata l'audizione del discorso, il Presidente ordina il saluto al Re e al Duce e scioglie quindi la seduta.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACADEMIA

presentate nella seduta del 1 novembre 1936

Academia Nacional de Medicina. — Session extraordinaria en homenaje al Prof. Blas Longo (3 de octubre de 1935). Buenos Aires, 1935. 8°, pp. 1-20.

ALBERTARIO EMILIO. — Contratti agrari nel *De agri cultura* di Catone. (Estr. dalla « Rivista di Diritto agrario » fasc. n. 2 1936). Firenze, 1936. 8°, pp. 1-7.

ALLARIA GIOVANNI BATTISTA. — Il problema demografico italiano osservato da un pediatra. Torino, 1935. 8°, pp. 1-191.

CESARI LAMBERTO. — Sul calcolo approssimato delle radici delle equazioni algebriche. (Estr. da « La Ricerca Scientifica ». Serie II, vol. II). Roma, 1936. 8°, pp. 1-28.

CIANO ALESSANDRO. — Il porto urbano di Roma. Roma, 1936. 4°, pp. 1-168.

CIANO ALESSANDRO. — Sistemazioni schematiche del Porto urbano, degli idroscali di Roma e del basso Tevere. Roma, 1936. 4°, s. p.

COLLARD AUGUSTE. — Adolphe Quetelet et l'astronomie (Extr. du « Bulletin de la Société Belge d'Astronomie, de Météorologie et de Physique du globe ». 1935. N. 6, 7, 8). Bruxelles, 1935. 8°, pp. 1-10.

COLLARD AUGUSTE. — Bibliographie des travaux Belges. 1931-1932, s. l. s. d. 8°.

COLLARD AUGUSTE. — Goethe et Quetelet, leurs relations de 1829 à 1832 (Reprinted from « Isis », Vol. XX, 1934, pp. 426-435). Bruges, 1934. 8°.

COLLARD AUGUSTE. — L'Abbé Aloys Verschaffel (1850-1933). (Extr. du « Bul-

letin de la Société Belge d'Astronomie, de Météorologie et de Physique du globe ». 1933. N° 4). Bruxelles, 1933. 8°, pp. 1-8.

COLLARD AUGUSTE. — Le Bibliothécaire dans les institutions scientifiques de l'État en Belgique. S. d. e s. l. 8°, pp. 1-3.

COLLARD AUGUSTE. — Magister Jacobus Angelus de Ulma et son « Tractatus de cometis ». (Extr. du II^e Congrès National des Sciences du Bruxelles. Juin 1935, 19-23, pp. 82-88), s. l. 8°.

COLLARD AUGUSTE. — Notes et nécrologies parues dans le « Bulletin de la Société Belge d'Astronomie », N. 11 et 12. 1933, s. l. s. d. 8°.

COLLARD AUGUSTE. — Silhouettes d'astronomes contemporains etc. (Opuscoli I-III). S. l. s. d. 8°, pp. 1-12, 1-6, 1-13.

CONFORTO FABIO. — Vedi VIOLA TULLIO.

COOK EDWARD M. — Vedi FLETCHER WATSON.

DE BEAUX OSCAR. — Relazione sull'attività del Museo Civico di Storia Naturale « G. Doria » durante l'anno 1935. (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova ». Vol. LIX). Genova, 1936. 8°, pp. 1-XXVII.

DE MARCHI L. — Controversie glaciali. (Estr. da « Scientia ». Aprile-maggio 1936, pp. 195-240). Milano, 1936. 8°.

DRAGONE-TESTI GIUSEPPINA. — Piero Romualdo Pirotta (7 febbraio 1853-3 agosto 1936). (Estr. dalla Rivista « La Chimica », 1936, n° 8-9); Roma, 1936. 8°, pp. 1-12.

- DUCCESCHI VIRGILIO. — L'alimentazione nelle età preistoriche. (Estr. dalle « Memorie del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti ». Vol. XXX), Venezia, 1936. 4°, pp. 1-89.
- FLETCHER WATSON and COOK EDWARD M. — The Accuracy of Observations by inexperienced Meteor Observers. (Reprinted from « Popular Astronomy ». Vol. XLIV). S. l. 1936, 8°, pp. 1-4.
- GOIDANICH GABRIELE. — La « moria dell'olmo (*Graphium ulmi*) », con prefazione di L. Petri. Roma, s. d. 8°, pp. 1-134.
- GRANDI GUIDO. — Agaonini raccolti dal Prof. F. Silvestri nell'America del Sud (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXX). Spoleto, 1936. 8°, pp. 1-8.
- JANNONE GIUSEPPE. — Su alcuni Ortotteri della Palestina con descrizione di una specie nuova del gen. *Homocoryphus* Karny. (Estr. dalle « Memorie della Società Entomologica Italiana ». Vol. XV, pp. 78-92). Genova, 1936. 8°.
- JULIA GASTON. — Exercices d'analyse. Tome IV. Equations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris, Editeur Gauthier-Villars, 1935. 8°, pp. 1-230.
- JULIA GASTON. — Introduction mathématique aux théories quantiques. Fasc. XVI, partie I. Paris, Editeur Gauthier-Villars, 1936. 8°, pp. I-VI, I-220.
- KUNIYEDA M. — Summary Report on present tendencies in the development of mathematical teaching in Japan. Tokyo, 1936. 8°, pp. 1-49.
- LECAT MAURICE. — Azéotropes orthobaires Esters-halogénures. (Extr. des « Annales de la Société scientifique de Bruxelles ». Série B. Tome LVI, 1936, pp. 41-54). Louvain, 1936. 8°.
- LECAT MAURICE. — Azéotropes orthobaires variés. Seizième liste.) Extr. des « Annales de la Société scientifique de Bruxelles ». Série B. Tome LVI, pp. 221-234). Louvain, 1936. 8°.
- LECAT MAURICE. — La théorie invariante du Calcul des variations du prof. Th. De Donder. (Extr. de la « Revue des Questions scientifiques ». Mars 1936, pp. 279-286). Louvain, 1936. 8°.
- LECAT MAURICE. — Le sablier de Maurice Maeterlinck. (Extr. de la « Revue des Questions scientifiques ». Mars 1936, pp. 321-327). Louvain, 1936. 8°.
- LECAT MAURICE. — Notice sur la thermodynamik de J.-J. van Laar. (Extr. de la « Revue des Questions scientifiques ». Septembre 1936, pp. 317-324). Louvain, 1936. 8°.
- LECAT MAURICE. — Prévision du temps par l'analyse des cartes météorologiques. (Extr. de la « Revue des Questions scientifiques ». Septembre 1936, pp. 276-282). Louvain, 1936. 8°.
- LE JUGE DE SEGRAIS RÉNE. — L'ancien jardin du roi le Monplaisir à l'Isle de France. (Extr. du « Recueil trimestriel de Documents et Travaux inédites pour servir à l'Histoire des Mascareignes Françaises ». Octobre 1934-mars 1936). Saint-Denis, 1936. 8°.
- LEVI M. G. — Studi e ricerche sui combustibili. Vol. V (1934-1935). Roma, Tipografia Editrice Italia, 1936. 8°, pp. I-IV, 1-366.
- LOCKYER WILLIAM J. S. — The variable spectrum of π (52) Aquarii (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. 96, pp. 481-488). Edinburgh, 1936. 8°.
- LOCKYER WILLIAM J. S. — The variable spectrum of γ Cassiopeae. Paper IV. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. 96, pp. 679-683). Edinburgh, 1936. 8°.
- LOCKYER WILLIAM J. S. — The variable spectrum ζ Tauri (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. 96, pp. 230-235). Edinburgh, 1936. 8°.

LONGO BIAGIO. — La seconda generazione del melo «senza fiori» (*Pyrus apetala* Münch.). (Estr. dal «Bull. dell'Orto Botanico della R. Università di Napoli»). T. XIII, pp. 39-42). Napoli, 1936. 8°.

MILLÁS JOSÉ CARLOS. — El problema mas interesante de la astronomia moderna. (Publicaciones del Observatorio Nacional de la Republica de Cuba). La Habana, 1936. 8°, pp. 1-37.

MIRANDA CARLO. — Analisi esistenziale per i problemi relativi alle equazioni dei fenomeni di propagazione. (Estr. dalle «Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali della Reale Accademia d'Italia». Vol. VII, pp. 277-319). Roma, 1936. 8°.

MIRANDA CARLO. — Contributo allo studio delle serie doppie trigonometriche nell'indirizzo Riemanniano. (Estr. dai «Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma», Serie IV, vol. I). Roma, 1936. 8°, pp. 1-13.

MIRANDA CARLO. — Sull'esistenza e l'unicità di una superficie di assegnato bordo verificante una equazione a derivate parziali in forma parametrica. (Estr. dalle «Memorie della Classe die Scienze fisiche, matematiche e naturali della Reale Accademia d'Italia». Vol. VI, pp. 1023-1045). Roma, 1936. 8°.

MIRANDA CARLO. — Sur un nouveau critère de normalité pour les familles de fonctions holomorphes. (Extr. du «Bulletin de la Société mathématique de France»). Paris, s. d. 8°, pp. 1-12.

PAOLI GUIDO. — Descrizione di alcune nuove specie di Empoasca (Hemipt. homopt.) e osservazioni su specie note. (Estr. dalle «Memorie della Società Entomologica Italiana». Vol. XV). Genova, 1936. 8°, pp. 1-24.

PAYNE GAPOSCHKIN CECILIA. — Note on the spectrum of Z Centauri. On the spectrum of the supernova S Andro-

medae. (Reprinted for private circulation from the «Astrophysical Journal». Vol. 83, pp. 173-176, 245-251). S. l. 1936. 8°.

PAYNE GAPOSCHKIN CECILIA and WHIPPLE FRED. L. — On the bright line spectrum of Nova Herculis. (From the «Proceedings of the National Academy of Sciences». Vol. XXII, pp. 195-200); S. l. 1936. 8°

PEARL RAYMOND. — A biometric study of the endocrine organs in relation to mental disease. Part. I, II, (Reprinted from «Human Biology a record of research». Vol. VII, pp. 350-607). Baltimore, 1935. 8°.

PEARL RAYMOND. — Biology and human trends. (Reprinted from the «Journal of the Washington Academy of Science». Vol. 25, pp. 253-272). S. l. 1936. 8°.

PEARL RAYMOND. — Birth Rate in recent Years. (Reprinted from «The World Today». December 1935). S. l. s. d. 8°.

PEARL RAYMOND. — Human Biology in schools and colleges. (Reprinted from «School and Society». Vol. 42, n. 1074). S. l. 1935. 8°, pp. 1-16.

PIRONE MAURO. — Nuovi indirizzi di ricerca nella teoria e nel calcolo delle soluzioni di talune equazioni lineari alle derivate parziali della Fisica-matematica. (Estr. dagli «Annali della R. Scuola Normale superiore di Pisa» (Scienze Fisiche e Matematiche). Serie II, vol. V, pp. 213-288). Bologna, 1936. 8°.

PICONE MAURO. — Recenti contributi dell'Istituto per le applicazioni del calcolo all'analisi quantitativa dei problemi di propagazione (Estr. dalle «Memorie di Scienze fisiche, matematiche e naturali della Reale Accademia d'Italia». Vol. VI, pp. 642-667). Roma, 1936. 8°.

RAVIZZA VINCENZO. — L'Abissinia nel campo geominerario. Notizie e considerazioni. Milano, 1936. 8°, pp. 1-53.

- RUSSO ACHILLE. — Concentramento delle acciughe e pesca dei Clupeidi nel Golfo di Catania nel 1935-36 in confronto agli anni decorsi dal 1912 al 1934-35. (Estr. dal « Bollettino di pesca, di piscicoltura e di idrobiologia ». Anno XII, fasc. VIII). Roma, 1936. 8°, pp. 1-30.
- RUSSO ACHILLE. — Eliminazione di sostanza nucleare ed adesione dei gameti in un Ciliato in rapporto all'agglutinazione nella fecondazione dei Metazoi. (Sonderdruck aus dem « Biologischen Zentralblatt », Bd. 55, Heft 3-4, pp. 174-178). Leipzig, 1935. 8°.
- RUSSO ACHILLE. — Mitosi e Amitosi divisioni sessuali o di categoria in un Ciliato (*Cryptochilum echini* Mps.) (Sonderdruck aus dem « Biologischen Zentralblatt », Bd. 56, Heft 5-6, 1936, pp. 226-230). Leipzig, 1936. 8°.
- RUSSO ACHILLE. — Notizie su la vita sessuale e su la pesca dei Clupeidi nel Golfo di Catania. (Estr. dagli « Atti della Soc. Italiana per il Progresso della Scienze », 1936). Roma, 1936. 8°, pp. 1-11.
- RUSSO ACHILLE. — Prodotto della pesca dei Clupeidi (acciuga, sardina, alacca) nel golfo di Catania nel 1934-35. (Estr. dal « Bollettino di pesca, di piscicoltura e di idrobiologia ». Anno XII, fasc. I). Roma, 1936. 8°, pp. 1-26.
- SALVADORI MARIO. — Le tensioni tangenziali nella sollecitazione di torsione, flessione e taglio. (Estr. dagli « Annali dei Lavori Pubblici », 1936). Roma, 1936, 8°, pp. 1-26.
- SALVADORI MARIO. — Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica. (Estr. dagli « Annali della R. Scuola Normale superiore di Pisa ». Scienze Fisiche e Matematiche. Serie II, vol. V, pp. 51-72). Bologna, 1936, 8°.
- SILVESTRI FILIPPO. — Description d'une nouvelle espèce du genre *Leucotermes* Silv. (Isopt.). (Extr. du « Bulletin de la Société entomologique de France », 1936, n. 10, pp. 203-205). S. l. 1936, 8°.
- SILVESTRI FILIPPO. — Descrizione di alcuni Machilidae (Thysanura) della Cina. (Publications du Musée Heude. Notes d'entomologie Chinoise). Chang-hai, 1936. 8°, pp. 1-115.
- SILVESTRI FILIPPO. — Una nuova specie di Campodeidae (Dicillura) rappresentante di un nuovo genere di grotta del Marocco. (Extr. du « Bulletin de la Société des Sciences Naturelles du Maroc ». Tome XVI, 1^o trim. 1936, pp. 86-89). Rochefort, 1936. 8°.
- Società per lo sviluppo economico dell'Albania — Un decennio di vita della « S. V. E. A. ». Roma, 1936. 4°, pp. 1-91.
- VIGNAL JEAN. — Compte rendu des travaux de la Commission internationale des nivelllements. (Extr. du « Bulletin géodésique ». No. 45 et 46, 1935). Paris, 1935. 8°, pp. 1-34.
- VIGNAL JEAN. — Évaluation de la précision d'une méthode de nivellation. (Extr. du « Bulletin géodésique ». No. 49, 1936). Paris, 1936. 8°, pp. 1-158.
- VIGNAL JEAN. — Le nivellation général de la France. Paris, 1936. 8°, pp. 1-48.
- VIGNAL JEAN. — Les changements du niveau moyen des mers de long des côtes en Méditerranée et dans le monde. (Extr. des « Annales des Ponts et Chaussées ». Mémoires et Documents, 1935). Paris, 1935. 8°, pp. 1-52.
- VIGNAL JEAN. — Programme des travaux de la Commission internationale des nivelllements. (Extr. du « Bulletin géodésique ». N. 51, 1936). Paris, 1936. 8°, pp. 1-20.
- VIGNAL JEAN. — Rapport général sur les nivellments de précision exécutés pendant les trois années 1930, 1931 et 1932 dans les pays adhérents à l'Union Géodésique et Géophysique internationale. (Extr. des « Comptes rendus des travaux de l'Association

internationale de Géodésie» 1933).
Paris, 1933. 4°, pp. 1-110.

VIGNAL JEAN. — Rapport sur les travaux
du service du nivelllement général
de la France en 1930, 1931 et 1932.
(Extr. du « Comptes rendus des tra-
vaux de l'Association internationale
de Géodésie ». Tome XI, fasc. III).
Paris, 1933. 4°, pp. 1-13.

VIOLA TULLIO e CONFORTO FABIO. —

Sul calcolo di un integrale doppio che
interviene nella determinazione della
profondità degli ipocentri sismici.
(Estr. da « La ricerca Scientifica »,
Serie II, vol. II, n. 3-4). Roma, 1936.
8°, pp. 1-40.

WHIPPLE FRED L. — Vedi PAYNE CA-
POSCHKIN CECILIA.

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 15 novembre 1936-XV

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Gli invarianti proiettivi nella teoria delle superficie. I. — Ricostruzione rapida della teoria delle applicabilità proiettive. Nota⁽¹⁾ del Corrisp. E. BOMPIANI.*

1. In una Nota precedente⁽²⁾ ho dato alcuni nuovi invarianti proiettivi, finiti o infinitesimi, relativi ad elementi curvilinei piani o sgombri. Mi servo ora del più semplice di quegli invarianti (relativo ad un elemento curvilineo del 2º ordine e a due rette del suo piano spiccate dal suo centro) per ricostruire nel modo più rapido tutti gli elementi essenziali della teoria delle applicabilità proiettive (a. p.) delle superficie (forme fondamentali e normale proiettiva del Fubini, linee di Darboux); e di altri invarianti, pure di costruzione immediata, per arricchire di nuovi risultati la teoria proiettiva delle superficie. Più che i singoli risultati, poichè molti altri se ne potrebbero ottenere applicando quegli invarianti a configurazioni diverse, tengo a porre in rilievo che nel metodo qui usato si procede sempre con elementi invarianti di significato geometrico noto (birapporti) e quindi i calcoli sono indipendenti da qualunque normalizzazione (sia delle coordinate che dei parametri); e che, potendosi per questa ragione riferirsi in particolare ad

(1) Presentata nella seduta del 15 novembre 1936.

(2) *Alcuni invarianti proiettivi di elementi curvilinei.* Questi «Rendiconti», ser. 6º, vol. XXII, 1935, nella quale era già annunciata la presente. I risultati di questa sono in parte accennati in una mia Nota: *Un système de courbes invariant par projectivités.* «C. R. Acad. des Sciences», nov. 1935, e sono stati da me esposti in conferenze tenute a Firenze e a Milano nel gennaio 1936. Di alcuni aveva già cortesemente fatto cenno, in sua conferenza a Pisa (ved. «Annali Scuola Normale Superiore», 1935) il Fubini cui li avevo comunicati.

un triedro triortogonale metricamente individuato in un punto della superficie, si ottengono immediatamente le *espressioni metriche degli invarianti proiettivi* sopra detti.

2. La superficie σ (non rigata) sia descritta dal punto $x(u, v)$ di coordinate proiettive omogenee $x^i(u, v)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) e siano $dv = 0$ (linee u) $du = 0$ (linee v) le sue linee asintotiche. Analogamente con $\xi_i(u, v)$ indichiamo coord. pr. omoge. del piano tangente $\xi(u, v)$ in $x(u, v)$ a σ .

La proprietà caratteristica delle linee asintotiche è espressa⁽¹⁾ puntualmente dalle equazioni, soddisfatte dalle x^i ,

$$(2.1) \quad \begin{cases} x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v + p_1 x \\ x_{vv} = \gamma x_u + \theta_v x_v + p_2 x \end{cases}$$

e tangenzialmente dalle altre, soddisfatte dalle ξ_i ,

$$(2.2) \quad \begin{cases} \xi_{uu} = \Theta_u \xi_u - \beta \xi_v + q_1 \xi \\ \xi_{vv} = -\gamma \xi_u + \Theta_v \xi_v + q_2 \xi; \end{cases}$$

i loro coefficienti si alterano per un cambiamento dei fattori di proporzionalità delle x^i e delle ξ_i e di u e v in loro funzioni.

Si tratta appunto di trovare *invarianti* rispetto a questi cambiamenti.

3. LE FORME ELEMENTARI INVARIANTI PER APPLICABILITÀ PROGETTIVE.

Ricordo l'invariante di un elemento curvilineo del 2° ordine, E_2 , e di due rette spiccate dal suo centro nel suo piano.

Sia x il centro dello E_2 , $x + dx + \frac{1}{2}d^2x$, e siano le due rette individuate da x e dai punti ζ_2, ζ_4 nel piano di E_2 ; si prenda il punto ζ_1 sulla tangente (x, dx) ad E_2 . Posto $\zeta_3 = x + dx + \frac{1}{2}d^2x$ il termine principale del birapporto

$$(3.1) \quad x(\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4) = \frac{|x \zeta_1 \zeta_3|}{|x \zeta_2 \zeta_3|} \cdot \frac{|x \zeta_2 \zeta_4|}{|x \zeta_1 \zeta_4|}$$

(ove p. es. $|x \zeta_1 \zeta_3|$ è un determinante costruito con le coordinate di uguali apici, p. es. $i = 1, 2, 3$, dei punti x, ζ_1, ζ_3 purchè non tutte nulle) vale (a meno di un coefficiente numerico; e questi coefficienti inessenziali verranno trascurati anche in seguito)

(1) Può vedersi il libro di G. FUBINI ed E. ČECH: *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces*. Paris, Gauthier-Villars, 1931.

$$(3.2) \quad \frac{|\mathbf{x} dx d^2x| \cdot |\mathbf{x} z_2 z_4|}{|\mathbf{x} dx z_2| \cdot |\mathbf{x} dx z_4|} = \frac{|\mathbf{x} x' x''| \cdot |\mathbf{x} z_2 z_4|}{|\mathbf{x} x' z_2| \cdot |\mathbf{x} x' z_4|} dt$$

se t è un qualsiasi parametro rispetto al quale siano individuati i punti di E_2 , (e fatte le derivate x' , x'' rispetto ad esso).

Preso il punto \mathbf{x} su σ si applichi l'invariante precedente ad un E_2 di asintotica uscente da \mathbf{x} (o all' E_2 della sezione di σ con il piano tangente che ha la stessa tangente) all'altra tangente asintotica e ad una tangente generica in \mathbf{x} (individuata da du/dv). Il calcolo, che si eseguisce a vista tenendo conto delle (2.1), dà

$$\beta \frac{du^2}{dv} \quad , \quad \gamma \frac{dv^2}{du}$$

secondo che l' E_2 è tangente a $dv = 0$ ovvero a $du = 0$.

Queste sono le forme elementari invarianti per applicabilità proiettive della superficie ⁽¹⁾.

Non meno facile è trovarne l'espressione metrica. Poichè se ne conosce il significato geometrico non è neppur necessario scrivere l'equazione della superficie, ma soltanto rappresentare, in un sistema cartesiano ortogonale di origine \mathbf{x} nel piano tangente, l' E_2 con lo sviluppo $y = ax^2 + \dots$ (ove $r_1 = 1/2a$ è il raggio di curvatura di E_2 , il cui elemento d'arco è $ds_1 = dx$), indicare con ω l'angolo delle due tangenti asintotiche (di cui una è $y = 0$) e con ω_1 l'angolo della tangente non asintotica considerata con quella di E_2 ed applicare la (3.1) o la (3.2). E si trova

$$\frac{\sin(\omega - \omega_1)}{\sin \omega \cdot \sin \omega_1} \frac{ds_1}{r_1}.$$

Sicchè:

Le forme elementari della teoria delle applicabilità proiettive delle superficie sono gli invarianti infinitesimi (birapporti) relativi a ciascuno degli E_2 di asintotica (o della sezione piana tangente) in un punto, all'altra tangente asintotica e ad una tangente generica (du/dv) in esso; e, nella rappresentazione (2.1) di σ valgono,

$$(3.3) \quad \beta \frac{du^2}{dv} \quad , \quad \gamma \frac{dv^2}{du}.$$

Detti r_1, r_2 i raggi di curvatura nel punto delle linee asintotiche (o della sezione piana tangente, che differiscono da quelli per uno stesso fattore numerico), ds_1 e ds_2 i loro elementi d'arco, ω_1 e ω_2 gli angoli che una tangente forma

(1) E. BOMPIANI, Le forme elementari e la teoria proiettiva delle superficie. «Boll. Un. Mat. Ital.», 1926.

con quelle asintotiche, e ω l'angolo di queste, l'espressione metrica delle forme elementari è

$$(3.4) \quad \frac{\operatorname{sen} \omega_2}{\operatorname{sen} \omega \cdot \operatorname{sen} \omega_1} \frac{ds_1}{r_1}, \quad , \quad \frac{\operatorname{sen} \omega_1}{\operatorname{sen} \omega \cdot \operatorname{sen} \omega_2} \frac{ds_2}{r_2}.$$

In queste espressioni figurano gli elementi d'arco relativi alle due asintotiche (o ai due rami della sezione piana tangente), e non l'elemento d'arco ds relativo alla tangente t (du/xv) considerata. Dall'ordinaria geometria differenziale (metrica) delle superficie, posto $ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2$ (ove $du = 0$ e $dv = 0$ sono, come prima, le asintotiche) risulta

$$(3.5) \quad ds_1 = \frac{\operatorname{sen} \omega_2}{\operatorname{sen} \omega} ds, \quad , \quad ds_2 = \frac{\operatorname{sen} \omega_1}{\operatorname{sen} \omega} ds;$$

basta ricordare p. es. che $ds_1 = \sqrt{E} du$ e

$$(3.6) \quad \operatorname{sen} \omega = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}, \quad , \quad \operatorname{sen} \omega_2 = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{G}} \frac{du}{ds};$$

sicché alle (3.4) possono sostituirsi le altre forme

$$(3.7) \quad \frac{1}{r_1} \frac{\operatorname{sen}^2 \omega_2}{\operatorname{sen}^2 \omega \cdot \operatorname{sen} \omega_1} ds, \quad , \quad \frac{1}{r_2} \frac{\operatorname{sen}^2 \omega_1}{\operatorname{sen}^2 \omega \cdot \operatorname{sen} \omega_2} ds.$$

Così facendo non si pone però in luce la corrispondenza che soggiace a quest'operazione e il carattere proiettivo di essa. Per mettere ciò in evidenza ritorniamo a considerare l'aspetto proiettivo: le due forme elementari $\beta du^2/dv$ e $\gamma dv^2/du$ sono relative a due E_2 diversi, e dipendono inoltre dalla tangente t (du/dv). Calcolarle per la stessa coppia di differenziali du, dv implica porre una corrispondenza fra i loro E_1 e l' E_1 su t ; precisamente quella che fa corrispondere al punto $x + x_u du + x_v dv$ su t i punti $x + x_u du$ e $x + x_v dv$ sulle due tangenti asintotiche. La congiungente questi ultimi due punti è infinitamente vicina alla coniugata armonica di t rispetto alle due tangenti asintotiche e il suo punto d'intersezione con t è il coniugato armonico, rispetto a x e a $x + x_u du + x_v dv$ di un qualsiasi punto (a distanza finita da x) di t . In termini finiti si può esporre la cosa così: si considerino due curve e una retta t di un piano uscenti da uno stesso punto e si ponga fra le curve una corrispondenza tale che la congiungente una coppia di punti corrispondenti, quando questi tendono al punto comune, tenda alla coniugata armonica di t rispetto alle tangenti alle due curve nel punto; inoltre preso un punto ad arbitrio (diverso da quello considerato) su t si faccia corrispondere ad una coppia di punti sulle due curve il coniugato armonico del punto comune rispetto all'intersezione della congiungente con t e al punto fissato ad arbitrio. La corrispondenza fra gli elementi del r^o ordine sulle due

curve e su t , che diremo *corrispondenza armonica*, è completamente determinata (ed ha carattere proiettivo, anzi topologico) nonostante l'arbitrarietà della corrispondenza *in grande*. Dopo ciò, con sole considerazioni di geometria elementare nel piano, risulta che la *corrispondenza armonica fra gli E_i della sezione piana tangente in un punto e l' E_i di t* è precisamente quella data dalle (3.5). Sicché possono assumersi le (3.7) come forme elementari. Inoltre, individuata la superficie nel gruppo metrico mediante il ds^2 e la seconda forma fondamentale (2 D' $du dv$) si ha

$$(3.8) \quad \frac{I}{r_1} = - \frac{\sqrt{EG - F^2}}{E^{3/2}} \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{smallmatrix} \right\}$$

ove $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{smallmatrix} \right\}$ è un simbolo di Christoffel di 2^a specie relativo al ds^2 ; quindi sostituendo nelle (3.7) quest'espressione, e tenendo conto delle (3.6), si ha:

Come forme elementari nella teoria delle applicabilità proiettive delle superficie possono prendersi le seguenti:

$$(3.9) \quad \frac{I}{r_1} \frac{\operatorname{sen}^2 \omega_2}{\operatorname{sen}^2 \omega \cdot \operatorname{sen} \omega_1} ds, \quad \frac{I}{r_2} \frac{\operatorname{sen}^2 \omega_1}{\operatorname{sen}^2 \omega \cdot \operatorname{sen} \omega_2} ds$$

ove r_1, r_2 sono i raggi di curvatura delle asintotiche (o della sezione piana tangente) nel punto, ds l'elemento d'arco in direzione della tangente t (du/dv), formante con le tangenti asintotiche gli angoli ω_1, ω_2 e ω è l'angolo di queste; oppure (1)

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{smallmatrix} \right\} \frac{du^2}{dv}, \quad \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{smallmatrix} \right\} \frac{dv^2}{du}$$

ove $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{smallmatrix} \right\}$ e $\left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{smallmatrix} \right\}$ sono simboli di Christoffel relativi al ds^2 della superficie (riferita alle asintotiche).

4. LE FORME FONDAMENTALI DEL FUBINI.

Dalle forme elementari si ottiene subito, per prodotto e per somma, l'invarianza delle forme

$$(4.1) \quad \beta\gamma du dv, \quad \frac{\beta du^3 + \gamma dv^3}{du dv}, \quad \beta\gamma(\beta du^3 + \gamma dv^3);$$

queste sono le forme fondamentali del Fubini nella teoria delle applicabilità proiettive (forma quadratica, elemento lineare proiettivo, forma cubica).

(1) Che sia $\beta = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{smallmatrix} \right\}$ e $\gamma = \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{smallmatrix} \right\}$ aveva già trovato da tempo, per altra via, il Fubini; ved. le sue *Lezioni di Geometria Proiettiva differenziale*. Bologna, Zanichelli, 1926.

Risulta intanto da tutto quanto precede che:

La teoria delle a. p. delle superficie dipende unicamente dagli elementi del 2° ordine E_2 delle linee asintotiche o delle sezioni piane tangenti (negli intorni del 3° ordine dei suoi punti); ma non da tutto l'intorno del 3° ordine (e nemmeno del 2° ordine) di un punto generico della superficie.

In conseguenza delle (3.9), (3.10) si ha pure:

Come espressioni metriche delle forme fondamentali possono ordinatamente prendersi (con le stesse notazioni di prima)

$$\frac{\sin \omega_1 \cdot \sin \omega_2}{r_1 r_2 \sin^4 \omega} ds^2 , \quad \frac{r_1 \sin^3 \omega_1 + r_2 \sin^3 \omega_2}{r_1 r_2 \sin^2 \omega \cdot \sin \omega_1 \cdot \sin \omega_2} ds,$$

$$\frac{r_1 \sin^3 \omega_1 + r_2 \sin^3 \omega_2}{(r_1 r_2 \sin^3 \omega)^2} ds^3$$

oppure

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right\} du dv , \quad \frac{\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\} du^3 + \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right\} dv^3}{du dv} ,$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right\} \left[\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\} du^3 + \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right\} dv^3 \right].$$

4. LE TANGENTI DI DARBOUX.

Un elemento E_i (cioè una tangente t) in x di σ ammette, oltre gli invarianti infinitesimi precedenti, un invariante finito. Tale è infatti l'invariante di t e dei due E_2 (in x) della sezione piana tangente (o delle asintotiche): esso è l'invariante di contatto di due coniche tangenti in un punto (qualsiasi, con tangente qualsiasi) di t contenenti i due E_2 (cioè osculatrici alla sezione piana). Se esso vale $+1$ (o -1) le due coniche hanno, nel punto di contatto, un contatto del 2° ordine (o armonico). Esso può anche definirsi come il rapporto degli invarianti infinitesimi relativi a ciascuno degli E_2 considerati e alle rette rimanenti, quando fra i due E_2 sia posta la corrispondenza armonica (rispetto a t ; n. 3). Usufruendo dell'espressione già data⁽¹⁾ di questo invariante e delle (2.1) si trova facilmente ch'esso vale

$$(5.1) \quad -\frac{\beta du^3}{\gamma dv^3} , \quad -\frac{r_2}{r_1} \frac{\sin^3 \omega_2}{\sin^3 \omega_1} , \quad -\frac{\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right\}} \frac{du^3}{dv^3}$$

(nella forma proiettiva, nella forma metrica intrinseca, o con riferimento al ds^2). Se t è scelta in modo che l'invariante valga $+1$ o -1 si hanno resp. le linee di Darboux o di C. Segre; quindi:

(1) *Alcuni invarianti ecc., loc. cit.*

Per avere in un punto x di σ le tangenti di Darboux (o di C. Segre) si considerino le due reti di coniche osculari ai due E_2 della sezione piana tangente: i punti del piano per cui passano coniche delle due reti avenuti in essi contatto del 2º ordine (o risp. armonico) si distribuiscono su tre rette per x che sono le tangenti di Darboux (o risp. di C. Segre). L'equazione differenziale delle linee di Darboux (segni superiori) o di C. Segre (segni inferiori) si scrive in una delle forme

$$(5.2) \quad \beta du^3 \pm \gamma dv^3 = 0 \quad , \quad r_1 \operatorname{sen}^3 \omega_1 \pm r_2 \operatorname{sen}^3 \omega_2 = 0 ,$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{matrix} \right\} du^3 \pm \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \right\} dv^3 = 0 .$$

Si noti che questo modo d'introdurre le tangenti di Darboux non solo è più semplice di quello abituale (che ricorre alle quadriche a contatto del 2º ordine in x con σ) perchè non si esce dal piano tangente, ma è concettualmente preferibile perchè vi figurano esattamente gli elementi E_2 dai quali quelle tangenti dipendono e non tutto l'intorno del 2º e 3º ordine di x su σ .

Se poi si calcolano le forme elementari per una di queste tangenti si trovano le forme invarianti $\pm (\beta^2 \gamma)^{1/3} du$, $\pm (\beta \gamma^2)^{1/3} dv$ che già ho avuto occasione di chiamare elementi d'arco proiettivo delle asintotiche⁽¹⁾; facendo uso delle (5.2) si ha:

Gli elementi di arco proiettivo delle asintotiche sono i valori dell'invariante infinitesimo relativo ad un E_2 di asintotica, all'altra tangente asintotica e ad una delle tangenti di Darboux o di C. Segre; (a meno di $\sqrt[6]{1}$) essi valgono

$$(\beta^2 \gamma)^{1/3} du, (\beta \gamma^2)^{1/3} dv ; \quad \frac{ds_1}{r_1^{2/3} r_1^{1/3} \operatorname{sen} \omega}, \frac{ds_2}{r_2^{1/3} r_2^{2/3} \operatorname{sen} \omega} ;$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \right\}^{1/3} du, \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \right\}^{2/3} dv .$$

6. LA NORMALE PROIETTIVA.

È questo un altro elemento invariante per a. p., di cui si conoscono già parecchie definizioni. Ne dò una nuova costruzione proiettiva da cui ricavo la rappresentazione metrica.

Poichè $\beta \gamma du dv$ è invariante per a. p. tali sono anche le sue estremali: di queste, cioè dei loro E_2 , ho dato una costruzione interamente geometrica (indipendente sia da normalizzazione di coordinate, sia da considerazioni

(1) Le forme elementari ecc., loc. cit.

variazionali) servendomi delle quadriche asintotiche osculatrici pure da me introdotte⁽¹⁾.

L'equazione d'Eulero per le estremali (fatto $v = v(u)$ su di esse) è

$$(6.1) \quad v'' = \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} v' - \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v} v'^2$$

e questa permette, servendoci delle (2.1), di scrivere l'equazione del piano osculatore all'estremale definita dai valori iniziali u, v, v' .

Per semplicità di calcolo poniamo nelle (3.1) $\theta = \log \beta\gamma$, cioè adottiamo coordinate x^i normali di Fubini. Se al punto $v_0 x + v_1 x_u + v_2 x_v + v_3 x_{uv}$ attribuiamo coordinate locali (v_0, v_1, v_2, v_3) la normale proiettiva, com'è notissimo, è rappresentata da $v_1 = v_2 = 0$ e il piano osculatore alla estremale (u, v, v') da

$$(6.2) \quad v_3 \beta - 2 v_2 v' + 2 v_1 v'^2 - v_3 \gamma v'^3 = 0.$$

Il cono inviluppato da questi piani al variare di v' ha l'equazione

$$(6.3) \quad 27 \beta^2 \gamma^2 v_3^4 - 16 v_1^2 v_2^2 + 32 (\beta v_1^3 + \gamma v_2^3) v_3 - 72 \beta\gamma v_1 v_2 v_3^2 = 0.$$

Le successive polari di $v_1 = v_2 = 0$ rispetto ad esso sono i coni

$$(6.4) \quad 27 \beta^2 \gamma^2 v_3^3 + 8 (\beta v_1^3 + \gamma v_2^3) - 36 \beta\gamma v_1 v_2 v_3 = 0, \quad 9 \beta\gamma v_3^2 = 4 v_1 v_2$$

e il piano tangente $v_3 = 0$. Il cono primo polare è tagliato dal piano tangente secondo le tangentи di Darboux, quello secondo polare lungo le tangentи asintotiche. Se inversamente si cerca per quali rette accade che il loro cono primo polare rispetto a (6.3) abbia per generatrici le rette di Darboux, oppure che il cono secondo polare abbia per generatrici le tangentи asintotiche e inoltre il piano terzo polare sia quello tangente, si trova la normale proiettiva. Questa è dunque ben individuata. Si noti incidentalmente che anche i coni (6.4) sono invarianti e che vi sono quattro rette il cui cono secondo polare rispetto a (6.3) ha per generatrici le tangentи asintotiche: di queste una è la normale proiettiva e le altre tre vengono proiettate da essa sul piano tangente nelle tre tangentи di C. Segre; e anch'esse sono invarianti. Dunque:

La normale proiettiva è individuata rispetto al cono del 4° ordine inviluppato dai piani osculatori in un punto alle estremali della forma quadratica invariante da una qualsiasi delle due seguenti proprietà:

- 1) *il suo cono primo polare ha per generatrici le tangentи di Darboux;*
- 2) *il suo cono secondo polare ha per generatrici le tangentи asintotiche e il suo piano terzo polare è quello tangente.*

(1) *Ein Analogon der Quadrik von Lie in der projektiven Flächentheorie.* « Math. Zeitschr. », 1929.

7. Queste proprietà consentono di trovare la rappresentazione metrica della normale proiettiva quando la superficie sia individuata dal $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ e dalla seconda forma fondamentale (metrica) $2D' du dv$. Se le asintotiche sono reali la curvatura Gaussiana $K = -D'^2/(EG - F^2) = -\frac{I}{\rho^2}$ è negativa.

Siano $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ coordinate cartesiane ortogonali di un punto della superficie; X, Y, Z i coseni direttori della normale metrica in esso; $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ coordinate di un punto generico dello spazio.

Posto

$$T = \begin{vmatrix} \bar{x} - x \\ x_u \\ x_v \end{vmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{vmatrix} \bar{x} - x \\ x_u \\ X \end{vmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{vmatrix} \bar{x} - x \\ x_v \\ X \end{vmatrix}$$

nelle quali i secondi membri simboleggiano determinanti, $T = 0$, $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0$ rappresentano il piano tangente e i piani per le tangenti asintotiche e per la normale metrica.

La forma quadratica invariante per a. p. è $\begin{Bmatrix} I & I \\ 2 & I \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ I & I \end{Bmatrix} du dv$ e alle equazioni (2.1) vanno sostituite quelle fondamentali per la geometria metrica delle superficie

$$x_{uu} = \begin{Bmatrix} I & I \\ I & I \end{Bmatrix} x_u + \begin{Bmatrix} I & I \\ 2 & I \end{Bmatrix} x_v, \quad x_{uv} = \begin{Bmatrix} I & 2 \\ I & I \end{Bmatrix} x_u + \begin{Bmatrix} I & 2 \\ 2 & I \end{Bmatrix} x_v + D' X, \\ x_{vv} = \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ I & I \end{Bmatrix} x_u + \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & I \end{Bmatrix} x_v.$$

Ripetendo il procedimento indicato al n. 6 si trova per il piano osculatore ad una estremale l'equazione

$$\alpha_0 T + \alpha_1 \Lambda_1 + \alpha_2 \Lambda_2 = 0$$

ove $\alpha_1 = 2 D' du^2 dv$, $\alpha_2 = 2 D' du dv^2$ e $\alpha_0 = b_0 du^3 + b_1 du^2 dv + b_2 du dv^2 + b_3 dv^3$ con

$$b_0 = \begin{Bmatrix} I & I \\ 2 & I \end{Bmatrix}, \quad b_3 = -\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ I & I \end{Bmatrix}, \quad b_1 = 2 \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & I \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} I & I \\ I & I \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial u} \log \left[\begin{Bmatrix} I & I \\ 2 & I \end{Bmatrix} \right], \\ b_2 = -2 \begin{Bmatrix} I & 2 \\ I & I \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & I \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial v} \log \left[\begin{Bmatrix} I & I \\ 2 & I \end{Bmatrix} \right].$$

Per trovare rapidamente l'inviluppo di quel piano conviene porre $L_1 = b_1 T + 2 D' \Lambda_1$, $L_2 = b_2 T + 2 D' \Lambda_2$; con ciò la sua equazione si scrive

$$b_0 T + L_1 v' + L_2 v'^2 + b_3 T v'^3 = 0$$

e quella del suo inviluppo risulta

$$3^3 b_0^2 b_3^2 T^4 + 4 b_3 T L_1^3 + 4 b_0 T L_2^3 - 18 b_0 b_3 T^2 L_1 L_2 - L_1^2 L_2^2 = 0$$

dalla quale apparisce, in forza delle proprietà caratteristiche stabilite sopra della normale proiettiva, che le sue equazioni sono $L_1 = L_2 = 0$ cioè $b_1 T + 2 D' \Lambda_1 = 0$, $b_2 T + 2 D' \Lambda_2 = 0$.

Possiamo dare a queste equazioni una forma più significativa introducendo gli elementi geometrici che determinano b_1 e b_2 .

Dalle equazioni di Gauss e di Codazzi si ha

$$\left\{ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\rho^2}{EG - F^2}, \quad \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \log \rho$$

quindi

$$b_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\rho^3}{EG - F^2} + \frac{\partial}{\partial u} \log \left[\left\{ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right\} \right]$$

e di qua tenendo conto delle (3.6) e (3.8) risulta

$$b_1 = \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\rho^{3/2}}{r_1 r_2 \sin^3 \omega} \quad \text{e} \quad b_2 = - \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\rho^{3/2}}{r_1 r_2 \sin^3 \omega}.$$

I coseni direttori della normale proiettiva sono proporzionali a

$$+ \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\rho^{3/2}}{r_1 r_2 \sin^3 \omega} x_u + \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\rho^{3/2}}{r_1 r_2 \sin^3 \omega} x_v + 2 \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\rho} X$$

ove r_1, r_2 sono i raggi di curvatura delle asintotiche nel punto in esame, ω il loro angolo, e $K = -1/\rho^2$ la curvatura Gaussiana.

Si constata poi facilmente che la congruenza delle normali proiettive sega, con le sue sviluppabili, sulla superficie un doppio sistema coniugato, quello delle linee di curvatura proiettive, di cui si avrebbe l'equazione differenziale metrica.

Matematica. — *Sul problema di Plateau.* Nota I⁽¹⁾ del Corrisp. L. TONELLI.

Fra i risultati più belli ottenuti in questi ultimi anni nel campo dell'Analisi Matematica vanno senza dubbio annoverati quelli relativi al problema di Plateau, dovuti a R. Garnier, J. Douglas e T. Radò. Soprattutto estremamente generali sono i risultati del Douglas e del Radò, il primo dei quali ha risolto il problema di Plateau per un contorno qualunque, dato da una curva di Jordan semplice e chiusa (e poi anche per più contorni di questa natura), mentre il secondo ha risolto lo stesso problema per un contorno dato da una curva di Jordan semplice, chiusa e rettificabile od anche (più generalmente) da una curva di Jordan semplice, chiusa e tale che sia il contorno di almeno una superficie semplicemente connessa di area finita. I ragionamenti seguiti da questi due Autori sono diversi; ma non è difficile scorgere in essi un carattere comune, quello di poggiare sopra certi concetti che sono alla base del metodo diretto che si usa nel Calcolo delle Variazioni.

Un'altra notevole soluzione del problema di Plateau fu data, dopo quelle degli Autori già citati, da E. J. McShane, seguendo più da vicino i procedimenti del metodo diretto del Calcolo delle Variazioni. Questa nuova soluzione viene ottenuta risolvendo un problema di minimo per un integrale doppio in forma parametrica, per trattare il quale il McShane stabilisce alcuni importanti teoremi generali, che si prestano anche ad altre applicazioni.

Le riflessioni suscite in me dalla lettura dei lavori degli Autori citati mi hanno condotto alla conclusione — che mi propongo di illustrare ampiamente nella presente Nota — che il problema di Plateau può impostarsi come un problema di minimo per un comune integrale doppio in forma ordinaria (cioè non parametrica), che si risolve rapidamente con l'applicazione immediata dei procedimenti del metodo diretto del Calcolo delle Variazioni.

Il problema di minimo a cui alludo è quello che io chiamo il *problema di Dirichlet per 3 funzioni*.

La soluzione che così si ottiene per il problema di Plateau coincide sostanzialmente con quella data dal Douglas; ma la sostituzione del funzionale studiato da questo Autore — che è una funzione di linea — con l'integrale doppio del problema di Dirichlet per tre funzioni — integrale che è una funzione di superficie — mentre a prima vista parrebbe rendere più

(1) Presentata nella seduta del 15 novembre 1936.

complicata la questione, in realtà la semplifica perchè, mettendoci di fronte ad uno degli integrali doppi usualmente considerati nel Calcolo delle Variazioni, permette una rapida applicazione di noti procedimenti. E per questa via viene conservato uno dei maggiori vantaggi che la soluzione del Douglas presenta in confronto delle soluzioni date dal Radò e dal McShane: quello di essere indipendente da un noto teorema di Schwarz sulla rappresentazione conforme (in senso generalizzato) delle superficie poliedriche. Siffatta indipendenza porta, fra l'altro, che la soluzione del problema di Plateau offre anche una soluzione diretta e semplice del problema della rappresentazione conforme su un cerchio di un'area piana racchiusa da una curva di Jordan chiusa e semplice; e da ciò segue, in particolare, che, risolto il problema di Dirichlet per tre funzioni nel caso di un dominio circolare, tale problema risulta senz'altro risolto anche per un dominio qualunque limitato da una curva di Jordan chiusa e semplice.

I. — *Posizione del problema.* Il problema di Plateau è quello della esistenza di una superficie a curvatura media nulla (superficie d'area minima) limitata da un dato contorno. Il teorema più generale, stabilito a questo proposito dal Douglas, si enuncia (nel caso di un solo contorno, che è quello di cui qui ci occupiamo) nel seguente modo:

Data nello spazio (x, y, z) una curva di Jordan Γ , semplice e chiusa, esiste una superficie S , del tipo topologico del disco circolare, limitata dalla Γ , la quale ammette una rappresentazione

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad u^2 + v^2 \leq 1,$$

tale che: 1°) $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ siano funzioni continue in tutto il cerchio $u^2 + v^2 \leq 1$, armoniche e soddisfacenti alle relazioni

$$x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2, \quad x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = 0^{(1)}$$

nell'interno del cerchio detto; 2°) le equazioni $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ pongano una corrispondenza biunivoca (ordinata e continua) fra i punti della circonferenza del cerchio indicato e quelli della curva Γ .⁽²⁾

Nel seguito diremo che una superficie risolve il problema di Plateau per il contorno Γ se soddisfa a tutte le condizioni indicate per la superficie S del teorema ora enunciato.

(1) Da queste relazioni e dal fatto che le $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ sono armoniche, segue che è sempre nullo, nell'interno del cerchio $u^2 + v^2 \leq 1$, il numeratore dell'espressione che dà la curvatura media della superficie S .

(2) Questo teorema si può enunciare — come effettivamente ha fatto il Douglas — per una curva di Jordan, semplice e chiusa, di uno spazio a $n (\geq 2)$ dimensioni. La dimostrazione che noi daremo vale senz'altro per ogni $n (\geq 2)$.

2. — *Il problema di Dirichlet per tre funzioni.* Sotto questa denominazione intendiamo il seguente problema che enunciamo soltanto per un dominio circolare, ma che si può porre per un qualunque dominio piano limitato da una curva di Jordan semplice e chiusa ⁽¹⁾:

Data, nello spazio (x, y, z) , una curva di Jordan Γ , semplice e chiusa, e considerata la classe K di tutte le superficie ⁽²⁾

$$S : x = (u, v) \quad , \quad y = y(u, v) \quad , \quad z = z(u, v) \quad , \quad u^2 + v^2 \leq 1,$$

tali che $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ siano funzioni continue e assolutamente continue in tutto il cerchio $\mathbb{C}[u^2 + v^2 \leq 1]$, che esista (finito) l'integrale

$$\Im S \equiv \iint_{\mathbb{C}} (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 + x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) du dv,$$

e che, posto

$$x(\cos \theta, \sin \theta) \equiv \xi(\theta), \quad y(\cos \theta, \sin \theta) \equiv \eta(\theta), \quad z(\cos \theta, \sin \theta) \equiv \zeta(\theta),$$

le

$$x = \xi(\theta) \quad , \quad y = \eta(\theta) \quad , \quad z = \zeta(\theta) \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

diano una rappresentazione analitica della curva Γ ⁽³⁾, si deve dimostrare che l'integrale $\Im S$ ammette nella classe K — supposta non vuota — almeno una superficie minimante, la quale gode di tutte le proprietà della superficie S del teorema del n. I ⁽⁴⁾.

La superficie minimante qui indicata risolve il problema di Plateau per per il contorno Γ .

3. — *Lemma.* Per procedere poi rapidamente nella risoluzione del problema di Dirichlet per tre funzioni, premetteremo il seguente lemma:

(1) Il problema si può porre, non soltanto per tre funzioni, ma anche per un numero qualunque $n (\geq 2)$ di funzioni; e quanto si dirà qui varrà senz'altro per ogni $n (\geq 2)$.

(2) Qui la superficie S deve essere intesa semplicemente come *la terna delle funzioni* $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$. Pertanto due superficie S date da due terne distinte di tali funzioni devono considerarsi come distinte, anche se risultano formate dagli stessi punti.

(3) Intendiamo con ciò che $\xi(\theta)$, $\eta(\theta)$, $\zeta(\theta)$ siano funzioni continue in tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$, con $\xi(0) = \xi(2\pi)$, $\eta(0) = \eta(2\pi)$, $\zeta(0) = \zeta(2\pi)$, e tali che il punto di coordinate $x = \xi(\theta)$, $y = \eta(\theta)$, $z = \zeta(\theta)$ si trovi sempre sulla Γ e al crescere di θ , da 0 a 2π , si muova sulla curva sempre nello stesso verso — potendo anche restare invariato per tutti i θ di un'intervallo parziale di $(0, 2\pi)$ — e percorra tutta la curva una ed una sola volta.

(4) Volendo limitarsi a quanto basta per la risoluzione del problema di Plateau, nel problema ora enunciato si può sostituire la classe K con quella parziale K' che si ottiene sostituendo la condizione che le $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ siano assolutamente continue in tutto \mathbb{C} con l'altra che, in ogni cerchio concentrico a \mathbb{C} e interno ad esso, le funzioni indicate risultino lipschitziane.

Sia Γ una curva di Jordan semplice e chiusa dello spazio (x, y, z) , e sia

$$R_n : x = \xi_n(\theta) , \quad y = \eta_n(\theta) , \quad z = \zeta_n(\theta) , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

con $n = 1, 2, 3, \dots$, una successione di rappresentazioni analitiche della Γ , soddisfacenti alla condizione che esistano tre valori, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ di θ , tali che $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$, $\theta_3 - \theta_1 < 2\pi$, ai quali la R_n faccia corrispondere tre punti fissi, distinti, A, B, C della Γ , sempre gli stessi per tutti gli n . Si supponga che esista una corrispondente successione di superficie

$$S_n : x = x_n(u, v) , \quad y = y_n(u, v) , \quad z = z_n(u, v) , \quad u^2 + v^2 \leq 1 ,$$

tali che: 1°) $x_n(u, v), y_n(u, v), z_n(u, v)$ siano funzioni continue in tutto il cerchio \mathfrak{C} , con derivate parziali del 1° ordine, continue, nell'interno di \mathfrak{C} ; 2°) sia sempre, con H fisso, indipendente da n ,

$$\iint_{\mathfrak{C}} (E_n + G_n) du dv \leq H^{(1)};$$

3°) in tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$ risulti sempre $x_n(\cos \theta, \sin \theta) = \xi_n(\theta)$, $y_n(\cos \theta, \sin \theta) = \eta_n(\theta)$, $z_n(\cos \theta, \sin \theta) = \zeta_n(\theta)$.

Allora le funzioni $\xi_n(\theta), \eta_n(\theta), \zeta_n(\theta)$, sono, in tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$, e per tutti i valori di n , ugualmente continue.

Indichiamo con $d_n(\theta', \theta'')$ la distanza fra i punti della Γ corrispondenti, secondo le equazioni di R_n , a θ' e θ'' , e supponiamo che l'eguale continuità indicata nell'enunciato non sussista. Esisteranno allora un numero $\lambda_1 > 0$ e una successione di coppie di valori di θ (dell'intervallo $(0, 2\pi)$): $\theta_{n_m, 1}, \theta_{n_m, 2}, m = 1, 2, \dots$, con le seguenti proprietà: 1°) è sempre $0 < \theta_{n_m, 2} - \theta_{n_m, 1} < 1:m$ oppure sempre $\theta_{n_m, 1} + (2\pi - \theta_{n_m, 2}) < 1:m$; 2°) $\lim \theta_{n_m, 1} = \lim \theta_{n_m, 2} = \theta_0$; 3°) $d_{n_m}(\theta_{n_m, 1}, \theta_{n_m, 2}) > \lambda_1$. Supponiamo, per fissare le idee, che sia $\theta_1 < \theta_0 \leq \theta_2$. Allora sarà sempre $0 < \theta_{n_m, 2} - \theta_{n_m, 1} < 1:m$; e potremo anche supporre che sia sempre $\theta_1 < \theta_{n_m, 1} < \theta_{n_m, 2} < \theta_3$. Se θ' è un valore qualunque dell'intervallo $(\theta_1, \theta_{n_m, 1})$ e θ'' è un qualunque valore dell'intervallo $(\theta_{n_m, 2}, \theta_3)$, il minimo della distanza $d_{n_m}(\theta', \theta'')$ sarà positivo e resterà, per tutti i valori di m , maggiore di un certo $\lambda_2 > 0$. Per i θ' e θ'' indicati, sarà dunque sempre $d_{n_m}(\theta', \theta'') > \lambda_2$. Indichiamo con λ il minore dei due numeri λ_1 e λ_2 . Indichiamo poi con Q_0 il punto della circonferenza di \mathfrak{C} di coordinate $u = \cos \theta_0, v = \sin \theta_0$, cioè il punto corrispondente a θ_0 ; con $Q_1, Q_3, Q_{n_m, 1}, Q_{n_m, 2}$ i punti cor-

(1) Adottiamo le classiche notazioni

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 , \quad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 , \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v .$$

rispondenti a $\theta_1, \theta_3, \theta_{n_m+1}, \theta_{n_m+2}$; con r la minore fra le distanze di Q_o da Q_1 e da Q_3 ; con r_{n_m} la maggiore delle distanze di Q_o da Q_{n_m+1} e da Q_{n_m+2} ; con C_{n_m} la parte del cerchio \mathfrak{C} compresa fra le due circonferenze di centro Q_o e raggi r e r_{n_m} . Per m sufficientemente grande, è $r_{n_m} < r$, perchè $r_{n_m} \rightarrow 0$ per $m \rightarrow \infty$.

Dopo di ciò, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} H &\geq \iint_{\mathfrak{C}} (E_{n_m} + G_{n_m}) du dv \geq \iint_{C_{n_m}} \dots = \\ &= \int_{r_{n_m}}^r \int_{\omega(\rho)}^{\omega_1(\rho)} \left[\Sigma \left(\frac{\partial x_{n_m}}{\partial \rho} \right)^2 + \Sigma \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial x_{n_m}}{\partial \omega} \right)^2 \right] \rho d\omega d\rho \geq \\ &\geq \int_{r_{n_m}}^r \frac{d\rho}{\rho} \int_{\omega(\rho)}^{\omega_1(\rho)} \Sigma \left(\frac{\partial x_{n_m}}{\partial \omega} \right)^2 d\omega, \end{aligned}$$

dove è

$$\Sigma \left(\frac{\partial x_{n_m}}{\partial \omega} \right)^2 = \left(\frac{\partial x_{n_m}}{\partial \omega} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_{n_m}}{\partial \omega} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_{n_m}}{\partial \omega} \right)^2.$$

Ora, per la diseguaglianza di Schwarz, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\omega(\rho)}^{\omega_1(\rho)} \left| \frac{\partial x_{n_m}}{\partial \omega} \right| d\omega &\leq \left\{ \int_{\omega(\rho)}^{\omega_1(\rho)} \left(\frac{\partial x_{n_m}}{\partial \omega} \right)^2 d\omega \right\}^{1/2} \{ \omega_1(\rho) - \omega(\rho) \}^{1/2} \leq \\ &\leq \pi^{1/2} \left\{ \int_{\omega(\rho)}^{\omega_1(\rho)} \left(\frac{\partial x_{n_m}}{\partial \omega} \right)^2 d\omega \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \int_{\omega(\rho)}^{\omega_1(\rho)} \Sigma \left(\frac{\partial x_{n_m}}{\partial \omega} \right)^2 d\omega &\geq \frac{1}{\pi} \Sigma \left\{ \int_{\omega(\rho)}^{\omega_1(\rho)} \left| \frac{\partial x_{n_m}}{\partial \omega} \right| d\omega \right\}^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{\pi} \Sigma | \xi_{n_m}(\omega_1(\rho)) - \xi_{n_m}(\omega(\rho)) |^2 > \frac{\lambda^2}{\pi}, \end{aligned}$$

e perciò

$$H > \frac{\lambda^2}{\pi} \int_{r_{n_m}}^r \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\lambda^2}{\pi} \log \{ r : r_{n_m} \},$$

ciò che è impossibile perchè per $m \rightarrow \infty$ è $r_{n_m} \rightarrow 0$. Il lemma è così dimostrato.

4. — *Risoluzione del problema di Dirichlet per tre funzioni.* Procediamo alla dimostrazione dell'esistenza di una superficie minimante per \Im_s in K , nell'ipotesi che questa classe non sia vuota.

Consideriamo una successione $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_n, \dots$ minimizzante per \Im_s in K . Posto

$$\bar{S}_n : x = \bar{x}_n(u, v) , \quad y = \bar{y}_n(u, v) , \quad z = \bar{z}_n(u, v) , \quad u^2 + v^2 \leq 1 ,$$

è

$$\Im_{S_n} \leq I + \frac{I}{n} ,$$

dove abbiamo indicato con I il limite inferiore di \Im_s in K .

Rappresentiamo con

$$S_n : x = x_n(u, v) , \quad y = y_n(u, v) , \quad z = z_n(u, v) , \quad u^2 + v^2 \leq 1 ,$$

la superficie tale che $x_n(u, v)$, $y_n(u, v)$, $z_n(u, v)$ siano le funzioni armoniche nell'interno di \mathfrak{C} , e continue in tutto \mathfrak{C} , che assumono gli stessi valori delle $\bar{x}_n(u, v)$, $\bar{y}_n(u, v)$, $\bar{z}_n(u, v)$ sulla circonferenza di \mathfrak{C} . Per la nota proprietà delle funzioni armoniche di rendere minimo l'integrale di Dirichlet, l'integrale \Im_{S_n} risulta finito, ed è

$$\Im_{S_n} \leq \Im_{\bar{S}_n} \leq I + \frac{I}{n} .$$

Perciò S_n appartiene alla classe K e la successione delle S_n è anch'essa minimizzante per \Im_s in K .

Fissiamo ora, sulla circonferenza di \mathfrak{C} , tre punti distinti A_o, B_o, C_o e pure tre punti distinti A, B, C sulla curva Γ . Mediante una trasformazione conforme del cerchio \mathfrak{C} in sè stesso, possiamo trasformare le funzioni armoniche $x_n(u, v), y_n(u, v), z_n(u, v)$ in altre tre funzioni armoniche $x_n^*(u, v), y_n^*(u, v), z_n^*(u, v)$, in modo che le equazioni della superficie

$$S_n^* : x = x_n^*(u, v) , \quad y = y_n^*(u, v) , \quad z = z_n^*(u, v) , \quad u^2 + v^2 \leq 1$$

facciano corrispondere ai punti A_o, B_o, C_o della circonferenza di \mathfrak{C} rispettivamente i punti A, B, C della Γ . Ed avendosi

$$\Im_{S_n^*} = \Im_{S_n} ,$$

anche la successione delle S_n^* è minimizzante per \Im_s in K .

In virtù del lemma del n. 3, le funzioni di θ :

$$x_n^*(\cos \theta, \sin \theta) , \quad y_n^*(\cos \theta, \sin \theta) , \quad z_n^*(\cos \theta, \sin \theta)$$

sono, per tutti i valori di n , ugualmente continue nell'intervallo $(0, 2\pi)$.

Dalla successione delle S_n^* si può pertanto estrarre una successione parziale — che per semplicità di scrittura supporremo coincidere con quella di tutte le S_n^* — convergente uniformemente sulla circonferenza di \mathbb{C} e quindi anche in tutto \mathbb{C} . Detta

$$S^* : x = x^*(u, v) , \quad y = y^*(u, v) , \quad z = z^*(u, v) , \quad u^2 + v^2 \leq 1 ,$$

la superficie limite a cui converge la successione delle S_n^* , le funzioni $x^*(u, v)$, $y^*(u, v)$, $z^*(u, v)$ risultano continue in tutto \mathbb{C} e armoniche nell'interno di \mathbb{C} ; e, posto $\xi^*(\theta) \equiv x^*(\cos \theta, \sin \theta)$, $\eta^*(\theta) \equiv y^*(\cos \theta, \sin \theta)$, $\zeta^*(\theta) \equiv z^*(\cos \theta, \sin \theta)$, le

$$(1) \quad x = \xi^*(\theta) , \quad y = \eta^*(\theta) , \quad z = \zeta^*(\theta) , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

danno una rappresentazione analitica della curva Γ . Inoltre, in virtù della semicontinuità inferiore dell'integrale di Dirichlet, si ha che $\Im S^*$ esiste (finito) e $\leq \min. \lim. \Im S_n^*$. Ciò, d'altronde, si verifica direttamente osservando che, per la convergenza uniforme di x_n^*, y_n^*, z_n^* verso x^*, y^*, z^* in tutto \mathbb{C} , le derivate parziali del primo ordine di x_n^*, y_n^*, z_n^* convergono uniformemente, in ogni cerchio *interno* a \mathbb{C} , verso le corrispondenti derivate parziali di x^*, y^*, z^* .

Ne segue che S^* appartiene alla classe K ed è $\Im S^* = I$. La S^* è dunque una superficie minimante per $\Im S$ in K.

Matematica. — *Sul problema di Plateau.* Nota II del Corrisp. L. TONELLI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sullo studio di una superficie nell'intorno di un suo punto e una nuova interpretazione della cubica che dà le tangenti di Darboux e Segre.* Nota⁽¹⁾ di N. ABRAMESCU, presentata dal Corrisp. E. BOMPIANI.

1. Assumiamo⁽²⁾ una retta $MD \equiv y - kx = 0$ quale normale MN in M (origine) di una curva piana (M), e consideriamo due punti M_1 ed M_2 prossimi ad M sulla curva (M), tali che le rette MM_1 ed MM_2 separino armonicamente la tangente MT e la normale MN in M. La retta $M_1 M_2$ interseca la tangente MT in un punto, che ha come limite il polo T_a di MD rispetto alla conica osculatrice in M, $ax^2 + 2bx\gamma + c\gamma^2 - 2d\gamma = 0$, $a = 9y_o''^4$, $b = 3y_o''^2y_o'''$, $c = 3y_o''y_o''' - 4y_o''^2$, $d = 9y_o''^3$, dove y_o'', \dots sono le derivate in M. Il punto caratteristico T_a ⁽³⁾ è definito dalla relazione

$$l_a = MT_a = \frac{3ky_o''}{3y_o''^2 + ky_o'''},$$

La retta congiungente M con il punto di mezzo di $M_1 M_2$ tende verso la retta $D_a = y - m_a x = 0$,

$$m_a = -\frac{3ky_o''^2}{3y_o''^2 + 2ky_o'''},$$

1° Se $k \rightarrow \infty$, MD è la normale MN, $l_a = 3y_o''/y_o'''$, $m_a = -3y_o''^2/2y_o'''$, D_a è la normale angolare $ax + 2by = 0$ (MM_1 ed MM_2 sono ugualmente inclinate sulla normale MN).

2° Se $k = -a/b$, MD è la normale affine, $l_a \rightarrow \infty$, $m_a = -a/b$, D_a è la normale affine.

3° Se $k = -a/2b$, MD è la normale angolare, $MT_a = -3y_o''/y_o'''$, $m_a \rightarrow \infty$, D_a è la normale MN.

4° Se $k = -b/c$, $l_a = 3y_o''y_o'''/(5y_o''^2 - 3y_o''y_o''')$, $m_a = y_o''^2y_o'''/(y_o''y_o''' - 2y_o''^2)$.

(1) Pervenuta all'Accademia il 20 luglio 1936.

(2) Ved. la mia Nota *Sur l'étude de la forme d'une courbe ou d'une surface dans le voisinage de l'un de ses points*. («Comptes Rendus», to. 202, 1936, p. 1397).

(3) Ved. anche: E. BOMPIANI, *Alcuni invarianti proiettivi di elementi curvilinei*. («Rendiconti Accademia dei Lincei», vol. XXII, ser. 6^a, 2^o sem., 1935, pp. 483-491).

2. Prendendo il punto O di una superficie come origine degli assi e la normale in O come asse delle ζ , si ha nell'intorno di O

$$\zeta = \frac{1}{2} F_2 + 1/6 F_3 \dots,$$

con

$$F_2 = b_0 x^2 + 2 b_1 xy + b_2 y^2,$$

$$F_3 = c_0 x^3 + 3 c_1 x^2 y + 3 c_2 xy^2 + c_3 y^3, \dots$$

Consideriamo una sezione normale, la cui traccia Ox_1 sul piano tangente forma l'angolo φ con l'asse delle x . Per ogni sezione normale esistono un punto T_a ed una retta D_a . Assumendo, in questa sezione, una retta $OD \equiv \zeta - kx_1 = 0$, quale normale (come per le curve piane, n. 1), si ottiene:

1° per $k \rightarrow \infty$, il luogo delle rette D_a è il cono $2\zeta F_3 + 3F_2^2 = 0$ e il punto T_a descrive nel piano tangente la cubica $F_2 - 1/3 F_3 = 0$. Vi sono una o tre sezioni normali, per le quali D_a coincide con la normale in O, e quindi in O un ombelico. Ogni superficie si divide in due regioni, tali che per ogni punto di esse vi sono rispettivamente tre sezioni normali distinte aventi in quel punto un ombelico, oppure una sola. Per ogni punto delle curve, che separano queste due regioni, vi sono generalmente due sezioni normali coincidenti aventi nei loro punti degli ombelichi.

2° Per $k = -a/2b$, il punto T_a , polo di OD rispetto alla conica osculatrice, descrive nel piano tangente la cubica $F_2 + 1/3 F_3 = 0$, determinata dai due primi termini dello sviluppo di ζ nell'intorno di O. Le tangenti di Darboux sono le tre rette congiungenti O con i punti di flesso di questa cubica e sono date da (1) $F \equiv F_3 + 3(lx + my) F_2 = 0$, dove l ed m sono delle costanti determinate dalle condizioni che esprimono che le forme F ed F_2 sono apolari. Si ha così, considerando i punti T_a , una interpretazione della cubica $F_2 + 1/3 F_3 = 0$.

$$3^\circ \quad k = -b/c, \quad OT_a = \frac{3\zeta''_0 \zeta'''_0}{5\zeta''''_0 - 3\zeta''_0 \zeta'''_0} \quad m_a = \frac{\zeta''''_0 \zeta'''_0}{\zeta''_0 \zeta'''_0 - 2\zeta''''_0}.$$

(1) Ved. FUBINI e ČECH, *Introduction à la Géométrie projective différentielle des surfaces*, 1931, p. 6; B. SEGRE, *La cubique indicatrice de l'élément linéaire projectif d'une surface*. (« Comptes Rendus », to. 184, 1927, p. 729); E. P. LANE, *The contact of a cubic surface with an analytic surface*. (« Transactions of the Amer. math. Society », 1927, to. 29, p. 471); B. COLOMBO, *Coincidenza delle tangenti di Clebsch colle tangenti di Darboux e Segre*. (« Boll. della Unione Mat. Italiana », to. VII, 1928, p. 100); L. GODEAUX, *Sur les quadriques de Moutard*. (« Bull. de la Société des Sciences de Liège », to. 2, 1933, p. 100); E. BOMPIANI, *Alcuni invarianti proiettivi di elementi curvilinei*. (« Rendiconti Accademia dei Lincei », vol. XXII, ser. 6^a, 2^o sem., 1935, pp. 483-491).

La retta D_a descrive il cono $\zeta(F_2 F_4 - 2F_3^2) = F_2^2 F_3$, e il luogo del punto T_a nel piano tangente è la curva $5F_3^2 - 3F_2 F_4 = 3F_2 F_3$, avente il punto O multiplo del 5° ordine con le tangenti $F_2 = 0$, $F_3 = 0$. Quando T_a è all'infinito, la sezione normale corrispondente è parabolica. Dunque, fra le sezioni normali relative a un medesimo punto, il numero delle sezioni paraboliche è 6, 4, 2 o 0. Queste sezioni dividono il piano tangente in tante regioni diverse quante sono le radici distinte dell'equazione in $\tan \varphi$; le sezioni normali appartenenti ad una medesima regione sono dello stesso genere, ellittico od iperbolico, e le sezioni che appartengono a due regioni contigue sono di genere diverso.

Matematica. — *Di una classe di superficie razionali che ammettono trasformazioni proiettive in sè.* Nota di EMMA CASTELNUOVO, presentata⁽¹⁾ dal Socio F. ENRIQUES.

Nella classificazione dei gruppi proiettivi⁽²⁾ dello spazio ordinario s'incontra un tipo essenzialmente algebrico costituito dalle omografie che lasciano ferma una cubica gobba e un punto unito su di essa, sottogruppo di quello⁽³⁾ che comprende tutte le trasformazioni in sè della cubica stessa. Le omografie del detto gruppo⁽²⁾ conducono da un punto dello spazio ai punti di una superficie razionale, il cui studio è stato iniziato da Enriques⁽²⁾ in una Memoria del 1893 e in una Nota successiva. Qui riprendiamo ed approfondiamo questo studio sciogliendo, in particolare, alcune difficoltà a cui la rappresentazione piana dà luogo, e determinando, così, le immagini delle singolarità della superficie.

§ 1. — Un'omografia che muti in sè la cubica C_3 ,

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = \rho \quad , \quad x_3 = \rho^2 \quad , \quad x_4 = \rho^3,$$

ed abbia come unito il punto $\rho = \infty$, produce sul parametro ρ una sostituzione lineare intera $u\rho + v$; le sue equazioni si possono quindi mettere sotto la forma

$$(1) \quad \begin{aligned} y_1 &= x_1 \quad , \quad y_2 = ux_2 + vx_1 \quad , \quad y_3 = u^2 x_3 + 2uvx_2 + v^2 x_1 \quad , \\ y_4 &= u^3 x_4 + 3u^2 vx_3 + 3uv^2 x_2 + v^3 x_1 \quad , \end{aligned}$$

dove si è indicato con $y \equiv (y_1, y_2, y_3, y_4)$ il punto che così viene a corrispondere ad $x \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Le (1), ove s'interpretino x_1, x_2, x_3, x_4 ,

(1) Nella seduta del 10 novembre 1936.

(2) F. ENRIQUES, *Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in se stesse.* « Atti R. Istituto Veneto », to. IV, ser. VII, 1892-93; e to. V, ser. VII, 1893-94.

come coordinate di un punto fisso dello spazio, ed u e v come parametri, rappresentano la superficie, luogo dei trasformati del punto x , che viene mutata in sè dalle ∞^2 omografie; al variare del punto x la superficie varia descrivendo il fascio

$$(2) \quad (y_1 y_3 - y_2^2)^3 k = (y_1^2 y_4 + 2 y_2^3 - 3 y_1 y_2 y_3)^2.$$

La superficie generica del fascio è semplice e del 6° ordine come si vede facilmente dalla (2); a questo risultato si può del resto giungere anche per via sintetica ragionando così: da un punto generico P di una retta r si possono condurre tre piani osculatori alla cubica in P_1, P_2, P_3 ; al variare del punto P su r si ha una serie di terne G_3 , che è una g_3^1 . Al nostro scopo occorre calcolare il numero dei gruppi di tre punti equivalenti ad un G_3 generico per una trasformazione con O fisso e che appartengono alla g_3^1 suddetta; se, per semplicità, si suppone che la retta r sia l'intersezione dei piani osculatori in due punti M ed N , il numero dei punti X che con OMN danno un gruppo proiettivo ad $OP_1 P_2 P_3$, o ad uno degli altri cinque che da esso si ottengono permutando P_1, P_2, P_3 , è ovviamente 6; la superficie è quindi del 6° ordine e, in generale, semplice, non essendo la quaterna $OP_1 P_2 P_3$ mutata in sè dal nostro gruppo ∞^2 . La superficie è anche di 6ª classe essendo il gruppo duale di se stesso; la indicheremo con F_6 . Ai casi *armonico* ed *equianarmonico* della quaterna $OP_1 P_2 P_3$, corrispondono nel fascio superficie contate rispettivamente due e tre volte; al caso della *quaterna con punto doppio* corrisponde una superficie spezzata, potendo il rapporto degenerare sia per la coincidenza di un piano osculatore col piano osculatore unito, sia per la coincidenza di due piani osculatori generici. Si trova facilmente che l'invariante razionale della quaterna $OP_1 P_2 P_3$ ha la seguente espressione

$$(3) \quad J = -4 \frac{(x_1 x_3 - x_2^2)^3}{(x_1^2 x_4 + 2 x_2^3 - 3 x_1 x_2 x_3)^2}$$

ed appare così la relazione $J = -\frac{4}{k}$ tra questa funzione J e il parametro del fascio.

Le superficie corrispondenti ai tre casi particolari sono:

1) *la rigata di Cayley*, rispondente al valore $k = 0$, contata due volte, che ha per direttrice doppia la retta unita ($y_1 = y_2 = 0$), e di cui una generatrice è la tangente consecutiva della cubica;

2) *il cono quadrico*, rispondente a $k = \infty$, contato tre volte, che proietta la cubica dal punto unito O ;

3) *la sviluppabile circoscritta* alla cubica, insieme col *piano osculatore unito* contato due volte, corrispondenti a $k = -4$. Esse ammettono, come è noto, più che ∞^2 trasformazioni proiettive in sè. Non dobbiamo mera-

vigliarci che le superficie del fascio abbiano un invariante; infatti esse non possono essere proiettivamente identiche, poiché il nostro gruppo ∞^2 non è contenuto come sottogruppo invariante in un altro più ampio.

§ 2. — La superficie generica del fascio contiene una rete omaloidica di cubiche gobbe, come ha fatto vedere Enriques nella Memoria citata; essa è dunque rappresentabile sul piano (facendo corrispondere alle cubiche gobbe le rette di questo) con un sistema lineare ∞^3 di cubiche; queste, essendo 6 l'ordine della superficie, sono le cubiche di genere 1 per tre punti base A, B, C. Si osservi che tale sistema è ampliabile in quello ∞^6 delle cubiche per A, B, C; la superficie è dunque la proiezione di una superficie Φ_6 dello spazio S_6 .

Dal sistema rappresentativo segue poi che le sezioni piane della F_6 sono ellittiche. Quest'ultima proprietà si stabilisce anche determinando direttamente le singolarità della superficie generica. Si trova facilmente, esaminando le singolarità delle superficie particolari del fascio, che la F_6 contiene come cuspidale la cubica unita, come triple la retta unita e la tangente successiva della cubica, e infine ha come quadruplo uniplanare (con cono osculatore degenere nel piano $y_1 = 0$) il punto unito O.

Tra le linee semplici appartenenti alla superficie presenta particolare interesse, oltre alla rete omaloidica di cubiche gobbe (sopra considerata) un sistema d'indice 3 di coniche, che si ottengono come sezioni della F_6 con i piani osculatori alla cubica cuspidale⁽¹⁾.

§ 3. — Abbiamo detto che le (1) sono le equazioni parametriche della superficie generica del fascio, ove s'interpretino le x_1, x_2, x_3, x_4 come coordinate di un punto dello spazio. Il sistema ∞^3 di cubiche

$$(4) \quad \lambda_1 y_1(u, v) + \lambda_2 y_2(u, v) + \lambda_3 y_3(u, v) + \lambda_4 y_4(u, v) = 0$$

è quindi rappresentativo delle superficie generica sul piano $[u, v]$. Se si osserva che y_3, y_2, y_1 definite come funzioni di u e v dalle formule (1) sono le successive polari del punto P(0, 1, 0) rispetto alla funzione $y_4(u, v)$, il sistema (4) può scriversi elegantemente così:

$$(4') \quad \lambda'_1 \frac{\partial^3 f(u, v)}{\partial v^3} + \lambda'_2 \frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial v^2} + \lambda'_3 \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} + \lambda'_4 f(u, v) = 0$$

$$\left[\lambda'_1 = \frac{1}{6} \lambda_1, \quad \lambda'_2 = \frac{1}{6} \lambda_2, \quad \lambda'_3 = \frac{1}{3} \lambda_3, \quad \lambda'_4 = \lambda_4 \right]$$

dove si è indicata con $f(u, v)$ la forma cubica

$$(5) \quad u^3 x_4 + 3 u^2 v x_3 + 3 u v^2 x_2 + v^3 x_1$$

(1) Infatti su un piano osculatore si ha un gruppo ∞^1 di omografie che lascia fissa una conica, e di cui le traiettorie sono coniche.

rappresentante la terna dei punti base sulla retta impropria, e dove $\frac{\partial f(u, v)}{\partial v}, \dots$, sono le polari successive del punto $P(0, 1, 0)$ rispetto alla terna (5). I tre punti base del sistema, A, B, C , appartenenti alla retta impropria, presentano dunque la particolarità di essere *allineati*, come si può stabilire anche per via geometrica; infatti alle ∞^2 omografie di F_6 corrispondono nel piano ∞^2 trasformazioni proiettive ciascuna delle quali lascia ferme le rette di un fascio. Ora, si vede facilmente che queste ∞^2 trasformazioni sono *omologie con asse fisso e centro variabile*; i tre punti base del sistema, essendo uniti, devono cadere sull'asse; così si verifica la proprietà di allineamento. Nella nostra rappresentazione l'asse è la retta impropria $w = 0$, e il centro di omologia descrive la retta $u = 0$.

Al variare del punto (x_1, x_2, x_3, x_4) si hanno ∞^1 sistemi dal tipo (4') rappresentanti sul piano le diverse superficie del fascio; queste hanno come invariante il birapporto (A, B, C, P) dei tre punti base del sistema e del punto intersezione dell'asse di omologia e della retta luogo dei centri; si trova infatti che l'invariante razionale di tale quaterna ha l'espressione (3).

§ 4. – Vogliamo trovare sul piano rappresentativo $[u, v]$ l'immagine dei punti e delle curve multiple della superficie F_6 . L'asse di omologia $w = 0$, non avendo intersezioni variabili colle ∞^3 cubiche per A, B, C , rappresenta un punto della F_6 ; tale punto, certamente unito, sarà necessariamente il punto quadruplo O . Come immagini delle sezioni per il punto O otteniamo un sistema ∞^2 di coniche, di cui i due punti base MM' debbono cadere sulla $w = 0$, rimanendo fissi per il gruppo di omologie speciali (avente il centro in $P(0, 1, 0)$) che è invariante rispetto al gruppo dato. Se ci riferiamo al sistema (4') si trova che i punti MM' sono i primi polari di P rispetto alla terna A, B, C .

Passiamo alla rappresentazione delle linee multiple; facciamo vedere che la cubica gobba doppia è rappresentata dalla retta $u = 0$, luogo dei centri delle omologie del gruppo, contata due volte, d'accordo col fatto che la curva immagine di essa deve ammettere ∞^2 trasformazioni omologiche in sé. Perciò occorre dimostrare che il passaggio di una cubica del sistema ∞^3 per un punto Q' della $u = 0$ porta di conseguenza il passaggio per un punto Q'' infinitamente vicino a Q' , cioè una cubica per Q' ha ivi tangente fissa q . Consideriamo alla scopo una cubica per Q' con tangente ivi q ; questa per le ∞^1 omologie di centro Q' viene trasformata in un sistema ∞^1 di cubiche aventi in Q' la tangente q ; essendo il sistema ∞^1 d'indice due⁽¹⁾, al variare di Q' sulla $u = 0$ si ottengono tutte le cubiche del nostro sistema ∞^3 . La cubica gobba cuspidale è dunque rappresentata dalla $u = 0$

(1) La cubica di partenza segando la $u = 0$ oltre che in Q' in due punti R e R' viene trasformata per le omologie di centro Q' e di elementi corrispondenti RS ed $R'S$, dove S è un punto qualsiasi di $u = 0$ in due cubiche per S .

contata due volte, col significato geometrico che abbiamo visto, conformemente al fatto che ad un punto Q di essa deve corrispondere sul piano una coppia neutra di punti coincidenti.

Appena sia assegnata la rappresentazione della cubica cuspidale e sia dato il sistema ∞^6 delle cubiche per A, B, C , si può determinare geometricamente il sistema $(4')$ rappresentativo delle sezioni piane di F_6 . Basta osservare che l'immagine della sezione piana generica si ottiene combinando linearmente le immagini di quattro sezioni particolari, indipendenti, della nostra F_6 ; come sezioni piane assumiamo quelle operate con piani osculatori alla cubica unita; queste sappiamo che sono coniche formanti un sistema ∞^1 d'indice tre. Questo sistema di coniche è composto di tre fasci; infatti le immagini delle sezioni di piani osculatori saranno sul piano $[u, v]$ cubiche del sistema ∞^3 seganti la retta $u = 0$ (immagine della cubica cuspidale) in tre punti infinitamente vicini, ed essendo le sezioni obbiettive degeneri in tre coniche, tali cubiche si spezzeranno nelle tre rette che da un punto di $u = 0$ proiettano la terza A, B, C . Se combiniamo linearmente quattro di queste terne di rette otteniamo l'immagine della sezione generica della F_6 , e il sistema rappresentativo $(4')$.

Veniamo finalmente all'immagine della retta tripla di F_6 , e della retta, pure tripla, infinitamente vicina ad essa. Facciamo vedere che la retta tripla per O è rappresentata dagli intorni del 1° ordine dei punti base A, B, C , d'accordo col fatto che per essa passano tre falde della superficie; e, infatti, questi intorni rappresentano tre rette della F_6 incidenti in O ; esse coincidono in una retta tripla, giacchè staccando uno degli intorni viene a staccarsi due volte la retta $w = 0$, e con essa gli intorni degli altri due punti. Come immagini delle sezioni per la retta tripla otteniamo un fascio di rette di cui il centro deve cadere sulla $w = 0$, rimanendo fisso per il gruppo di omologie speciali, che è invariante rispetto al gruppo dato. Se ci riferiamo al sistema rappresentativo $(4')$, si trova che il centro N di questo fascio è il secondo polare di $P(0, 1, 0)$ rispetto alla terza A, B, C .

La retta tripla infinitamente vicina è poi rappresentata dagli intorni del 2° ordine dei punti A, B, C ; infatti le cubiche del sistema ∞^3 che si osculano in A , si osculano anche in B e in C , dato che due cubiche aventi in A un contatto tripunto e che si toccano semplicemente in B e in C determinano un fascio di cui fa parte la $w = 0$ contata tre volte.

Concludendo possiamo riassumere quali sono nel piano rappresentativo le immagini delle singolarità della nostra F_6 :

il punto quadruplo è rappresentato dall'asse di omologia contato una volta; la cubica gobba doppia (cuspidale) dalla retta luogo dei centri delle omologie, contata due volte; e infine le due rette triple infinitamente vicine sono rappresentate, complessivamente, dall'asse delle omologie contato tre volte.

Matematica. — *Sulla generalizzazione di una formula di Tricomi⁽¹⁾.* Nota di A. ERDÉLYI presentata⁽²⁾ dal Socio G. FUBINI.

Mi permetto di approfittare di questa occasione per comunicarLe che i risultati raggiunti nelle Sue Note dei Lincei⁽³⁾, sono suscettibili di un'ulteriore generalizzazione, potendosi far uso, in luogo dei polinomii di Laguerre, delle funzioni ipergeometriche confluenti. Invero se si considera la funzione $N_{k,m}(t)$ definita⁽⁴⁾ mediante la formula

$$(1) \quad N_{k,m}(t) = \frac{t^{m-\frac{1}{2}}}{\Gamma(2m+1)} M_{k,m}(t) = \\ = \frac{t^{2m} e^{-\frac{1}{2}t}}{\Gamma(2m+1)} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + m - k; 2m + 1; t\right),$$

si ha, come mostrerò in un lavoro che uscirà prossimamente nella *Mathematische Zeitschrift*, che:

$$(1) \quad \mathcal{L}\{N_{k,m}(t)\} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^{2m+1}} \left(\frac{s - \frac{1}{2}}{s + \frac{1}{2}} \right)^{k-m-\frac{1}{2}};$$

formula donde possono trarsi conclusioni del tutto analoghe a quelle da Ella dedotte dalla Sua (4') (« Rend. Lincei », 21, p. 234) che, del resto, può considerarsi come un caso particolare della (2). Infatti, come segue dalla (1) e da una formula da me precedentemente data⁽⁵⁾, si ha:

$$(3) \quad N_{m+n+\frac{1}{2},m}(t) = \frac{n! t^{2m} e^{-\frac{1}{2}t}}{\Gamma(2m+n+1)} L_n^{(2m)}(t) \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

(1) Estratto da una lettera al prof. F. TRICOMI in Torino, per la traduzione della quale (dal tedesco all'italiano) l'A. ringrazia cordialmente il prof. Tricomi.

(2) Nella seduta del 1º novembre 1936.

(3) *Trasformazione di Laplace e polinomi di Laguerre*, I e II e *Ancora sull'inversione della trasformazione di Laplace*. [« Rendiconti Lincei » (6), 21 (1935), 232-239, 332-335 e 420-426].

(4) Per la teoria della funzione $M_{k,m}(t)$ cfr. WHITTAKER-WATSON, *Modern Analysis*, cap. XVI.

(5) *Ueber einige bestimmte Integrale, in denen die Whittakerschen $M_{k,m}$ -Funktionen auftreten*. [« Math. Zeitschrift », 40 (1936), 693-702] ultima formula di p. 699. Cfr. pure un mio lavoro che apparirà prossimamente nei « Jahresber. der Deutschen Math.-Vereinigung ».

da cui, ponendo $k = m + n + 1/2$, si deduce subito la surricordata Sua formula. Qui è, come d'abitudine,

$$(4) \quad \mathfrak{L} \{ F(t) \} \equiv \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt.$$

Per mostrare con un esempio come si presenti la generalizzazione degli importanti teoremi e relazioni da Lei stabilite, voglio qui schizzare la generalizzazione della bella formula:

$$(5) \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [L_n(a) - L_{n-1}(a)] [L_n(b) - L_{n-1}(b)] = e^{\min(a, b)}.$$

da Lei ottenuta a p. 425 del vol. 21 dei « Rendiconti dei Lincei ».

La, molto generale, formula da dimostrare è la seguente:

$$(6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2v+n)}{n!} N_{k+n, m}(a) N_{k+n, m}(b) = \\ = \int_0^{\min(a, b)} N_{k-v, m-v}(a-u) N_{k-v, m-v}(b-u) u^{2v-1} du$$

e vale per tutti i valori reali di a e b purchè sia

$$\Re(m) + \frac{1}{2} > \Re(v) > 0 \text{ (1).}$$

Prima di accennare alla dimostrazione di questa formula, desidero indicare alcuni suoi casi particolari. Per esempio, se si pone nella (6) $k = m + 1/2$ e si tien conto che dalla (1) segue

$$(7) \quad N_{m-v+\frac{1}{2}, m-v}(w) = \frac{w^{2m-2v} e^{-\frac{1}{2}w}}{\Gamma(2m-2v+1)},$$

in virtù della (3), si ha subito che:

$$(8) \quad (ab)^{2m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2v+n) n!}{[\Gamma(2m+n+1)]^2} L_n^{(2m)}(a) L_n^{(2m)}(b) = \\ = \frac{1}{[\Gamma(2m-2v+1)]^2} \int_0^{\min(a, b)} [(a-u)(b-u)]^{2m-2v} u^{2v-1} e^u du,$$

(1) Con $\Re(z)$ si indica qui, come d'abitudine, la *parte reale* del numero complesso z .

donde per $2v = 1$, sotto l'ipotesi $\Re(m) > 0$, segue in particolare che:

$$(9) \quad (ab)^{2m} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(2m) n!}{\Gamma(2m+n+1)} \right)^2 L_n^{(2m)}(a) L_n^{(2m)}(b) = \\ = \int_0^{\min(a,b)} [(a-u)(b-u)]^{2m-1} e^u du.$$

D'altro lato, per $m = v$, $\Re(m) > 0$, abbiamo dalla (8):

$$(10) \quad (ab)^{2m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2m+n)\Gamma(2m+n+1)} L_n^{(2m)}(a) L_n^{(2m)}(b) = \\ = \int_0^{\min(a,b)} u^{2m-1} e^u du = (-1)^{2m} \gamma[2m, -\min(a, b)],$$

dove, come d'abitudine, con

$$\gamma(v, x) = \int_0^x u^{v-1} e^{-u} du$$

si denota la funzione gamma *incompleta*. In particolare, per $2m = 1$, dalla (10) segue:

$$(11) \quad ab \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} L_n^{(1)}(a) L_n^{(1)}(b) = e^{\min(a, b)} - 1,$$

formula che, essendo notoriamente

$$w L_n^{(1)}(w) = -(n+1)[L_{n+1}(w) - L_n(w)],$$

è identica alla (5). Ella vede qual quantità di formule singole racchiude la (6) in se! Per brevità mi limito ad accennare ulteriormente soltanto al fatto che dalla (6) discendono come caso particolare delle interessantissime relazioni fra i polinomi di Hermite o, rispettivamente, le a loro strettamente imparentate funzioni del cilindro parabolico, e certi polinomi $k_{2n}(t)$ considerati da Batemann nonché le funzioni di Bessel.

Il modo più facile per dimostrare la (6) è di servirsi del metodo usato da Doetsch⁽¹⁾ per ritrovare la (5), e cioè operare due volte di seguito con la trasformazione di Laplace. Invero, se operiamo successivamente sul primo membro della (6) le due trasformazioni laplaciane:

$$\mathcal{L}_{(a)}\{F\} \equiv \int_0^\infty e^{-ax} F(a) da \quad , \quad \mathcal{L}_{(b)}\{F\} \equiv \int_0^\infty e^{-bx} F(b) db,$$

(1) *Le formule di Tricomi sui polinomi di Laguerre*. [«Rendic. Lincei» (6), 22 (1935), 300-304].

avuto riguardo alla (2), avremo:

$$\begin{aligned}
 & \mathfrak{L}_{(a)} \mathfrak{L}_{(b)} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2v+n)}{n!} N_{k+v,m}(a) N_{k+v,m}(b) \right\} = \\
 & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2v+n)}{n!} \mathfrak{L}_{(a)} \{ N_{k+v,m}(a) \} \mathfrak{L}_{(b)} \{ N_{k+v,m}(b) \} = \\
 & = \frac{I}{\left[\left(\alpha + \frac{I}{2} \right) \left(\beta + \frac{I}{2} \right) \right]^{2m+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2v+n)}{n!} \left(\frac{\alpha - \frac{I}{2}}{\alpha + \frac{I}{2}} \frac{\beta - \frac{I}{2}}{\beta + \frac{I}{2}} \right)^{k+m+n-\frac{I}{2}} = \\
 & = \frac{I}{\left[\left(\alpha + \frac{I}{2} \right) \left(\beta + \frac{I}{2} \right) \right]^{2m+1}} \left(\frac{\alpha - \frac{I}{2}}{\alpha + \frac{I}{2}} \frac{\beta - \frac{I}{2}}{\beta + \frac{I}{2}} \right)^{k+m-\frac{I}{2}} \Gamma(2v) \left(I - \frac{\alpha - \frac{I}{2}}{\alpha + \frac{I}{2}} \frac{\beta - \frac{I}{2}}{\beta + \frac{I}{2}} \right)^{-2v} = \\
 & = \frac{\Gamma(2v)}{\left[\left(\alpha + \frac{I}{2} \right) \left(\beta + \frac{I}{2} \right) \right]^{2m-2v+1}} \left(\frac{\alpha - \frac{I}{2}}{\alpha + \frac{I}{2}} \frac{\beta - \frac{I}{2}}{\beta + \frac{I}{2}} \right)^{k+m-\frac{I}{2}} (\alpha + \beta)^{-2v};
 \end{aligned}$$

donde tenuto ulteriormente conto della (2) e della ben nota relazione:

$$\mathfrak{L}_{(b)} \{ b^{2v-1} e^{-\alpha b} \} = \Gamma(2v)(\alpha + \beta)^{-2v},$$

segue:

$$\mathfrak{L}_{(a)} \mathfrak{L}_{(b)} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \dots \right\} = \mathfrak{L}_{(b)} \{ N_{k-v,m-v}(b) \} \mathfrak{L}_{(b)} \{ b^{2v-1} e^{-\alpha b} \} \mathfrak{L}_{(a)} \{ N_{k-v,m-v}(a) \}.$$

Ciò posto eliminiamo anzitutto la trasformazione $\mathfrak{L}_{(b)}$, avremo così in base al *Faltungssatz*:

$$\mathfrak{L}_{(a)} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \dots \right\} = \int_0^b N_{k-v,m-v}(b-u) u^{2v-1} e^{-\alpha u} \mathfrak{L}_{(a)} \{ N_{k-v,m-v}(a) \} du;$$

ma, se si considera la funzione $G(a)$ definite dalle formule:

$$G(a) = 0 \quad \text{per} \quad 0 < a < u$$

$$G(a) = F(a-u) \quad \Rightarrow \quad u < a$$

si ha notoriamente che

$$e^{-\alpha u} \mathfrak{L}_{(a)} \{ F(a) \} = \mathfrak{L}_{(a)} \{ G(a) \};$$

quindi non vi è che da identificare $F(a)$ con la $N_{k-v,m-v}(a)$ dell'ultimo integrale e da eliminare anche la trasformazione $\mathfrak{L}_{(a)}$ per ottenere senz'altro la (6).

In altra occasione mostrerò come anche gli altri risultati contenuti nei Suoi lavori citati in principio, possano venir parimenti generalizzati.

Matematica. — *Sulle varietà semi-razionali a tre dimensioni.* Nota di L. ROTH presentata⁽¹⁾ dal Socio G. CASTELNUOVO.

Molti anni or sono il Fano⁽²⁾ ha dimostrato che esistono delle varietà algebriche a tre dimensioni le quali, pur avendo tutti i generi nulli, non sono razionali. Queste varietà sono la V_3^4 generale di S_4 , e la V_3^6 intersezione generale d'una quadrica e d'una forma cubica di S_5 ; inoltre, siccome su di queste l'operazione di aggiunzione successiva ha sempre termine, segue che tale proprietà non basta a caratterizzare le varietà razionali o riferibili alle V_3 rigate.

La V_3^4 e la V_3^6 sudette si possono chiamare, con Fano, *semi-razionali*, poichè occupano un posto intermedio tra le varietà razionali, aventi di conseguenza tutti i generi nulli, e quelle con qualche genere o plurigenere maggiore di zero. Esse sono le prime della serie di varietà $V_3^{2\pi-2}$ di $S_{\pi+1}$, di cui le sezioni iperpiane $|F|$ hanno tutti i generi uguali a uno, e di cui la sezione con un $S_{\pi-1}$ generico forma la base per le superficie F che la contengono. In un lavoro di prossima pubblicazione ho ripreso lo studio di queste ultime e nella presente Nota vengono riportati alcuni dei risultati più interessanti.

i. In primo luogo, poichè il sistema $|F|$ possiede una superficie i -aggiunta d'ordine zero, segue che la $V_3^{2\pi-2}$ ha il genere geometrico e tutti i plurigeneri nulli. Per dimostrare che essa ha pure il genere aritmetico nullo, calcoliamo prima gli altri invarianti Ω_0 , Ω_1 e Ω_2 . Ora, il sistema canonico (virtuale) è dato dal sistema $|-F|$, e quindi in base alle note formule per i caratteri del sistema $|kF|$ risulta che

$$\Omega_0 = -(2\pi - 1), \quad \Omega_1 = 1 - 3(\pi - 1), \quad \Omega_2 = -(\pi + 2),$$

e così, dalla formula

$$2P_a = \Omega_0 + \Omega_1 + \Omega_2 + 4,$$

troviamo che $P_a = 0$.

(1) Nella seduta del 15 novembre 1936.

(2) Ved. FANO, *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli.* «Atti del Congresso Internaz. Bologna» (1928), to. IV, p. 115.

Alla varietà in parola spettano le seguenti proprietà:

I. La $V_3^{2\pi-2}$ è intersezione completa di $\binom{\pi-2}{2}$ quadriche linearmente indipendenti di $S_{\pi+1}$.

II. Su di essa, le forme di ordine qualunque segano un sistema completo di superficie.

Dall'ultimo teorema segue che

III. Ogni superficie algebrica contenuta nella $V_3^{2\pi-2}$ è intersezione completa con una forma di $S_{\pi+1}$: risultato già noto per $\pi \leq 5$.

IV. La proiezione della $V_3^{2\pi-2}$ da una curva C^v di genere ρ , normale non-speciale, è una V_3 di ordine $2(\pi-v+\rho-2)$ della stessa serie, contenente una rigata di ordine $v+2-2\rho$ e di genere ρ .

2. Veniamo ora ad esaminare alcune varietà particolari: per $\pi = 3, 4$ abbiamo la V_3^4 e la V_3^6 già nominate. Il Fano ha dimostrato non soltanto che queste sono irrazionali, ma che esse sono birazionalmente distinte; infatti, la V_3^4 non contiene altro sistema completo di superficie aventi tutti i generi uguali a uno, all'infuori del sistema delle sue sezioni iperpiane, e quindi non si può trasformare in una V_3^6 ; ed essa non ammette trasformazioni birazionali in sè. Invece, la V_3^6 può trasformarsi birazionalmente mediante le proiezioni doppie dalle ∞^1 rette contenute in essa. Enriques ha provato che la V_3^6 è riferibile a un'involuzione di S_3 , onde viene stabilita l'esistenza di involuzioni irrazionali dello spazio. Notiamo infine che dal fatto che si può rappresentare una quadrica di S_5 sullo S_4 per mezzo delle quadriche V_3^2 aventi per curva-base una quartica razionale, segue che

La V_3^6 è birazionalmente identica ad una V_3^6 di S_4 avente per curva tripla una quartica razionale.

Dunque, questa varietà sestica di S_4 è pure irrazionale e birazionalmente distinta dalla V_3^4 .

Per $\pi = 5$ abbiamo la V_3^8 intersezione completa di tre quadriche di S_6 ; seguendo la via indicata da Fano si dimostra che

La V_3^8 intersezione di tre quadriche di S_6 è irrazionale e birazionalmente distinta dalla V_3^4 e dalla V_3^6 .

Quest'ultima proprietà risulta dalle osservazioni fatte dianzi. La V_3^8 si proietta in una V_3^6 di S_4 avente per superficie doppia una F_3 a sezioni di genere 2; quindi

La V_3^6 di S_4 che possiede una superficie doppia di ordine 5 a sezioni di genere 2 è irrazionale.

Evidentemente la V_3^8 contiene ∞^1 rette, da una delle quali si proietta in una V_3^4 di S_4 contenente una rigata cubica che impone 17 punti doppi alle forme quartiche che devono contenerla. Così si deduce che

La V_3^4 di S_4 che contiene una rigata cubica e (di conseguenza) 17 nodi, è irrazionale; su di essa, una base è fornita dalla rigata e da una sezione iperpiana.

Per un punto generico della V_3^4 passa un piano, segante la rigata R in una conica, di cui l'ulteriore intersezione con la V_3^4 è un'altra conica quadriseccante R. In questo modo si arriva a rappresentare la V_3^4 sopra un'involtuzione I_4 di S_3 . Dunque,

Nello spazio S_3 esistono delle involuzioni irrazionali del quart'ordine.

3. Un caso particolare della V_3^8 si può ottenere nel modo seguente. Consideriamo le quadriche di S_4 che hanno per curva-base una quartica ellittica C^4 ; esse rappresentano le sezioni iperpiane d'una V_3^4 intersezione di due quadriche di S_6 , la quale possiede una retta doppia, corrispondente al fascio di superficie quadriche che contiene la C^4 . Quindi da codesta rappresentazione si vede che

Una V_3^4 di S_4 la quale possiede come curva doppia una quartica ellittica è birazionalmente identica ad una V_3^8 , avente due punti doppi.

L'irrazionalità di questa V_3^8 , e così della V_3^4 , non si può stabilire coi mezzi precedenti e rimane per ora dubbia. Però esistono certamente dei casi particolari della V_3^4 che sono razionali; ad ogni modo è interessante paragonare la V_3^4 con un'altra avente pure una quartica doppia. Possiamo dimostrare che

Una V_3^4 di S_4 avente per curva doppia una quartica razionale, è razionale.

Infatti, se rappresentiamo una quadrica di S_5 , come al n. 2, per mezzo delle quadriche di S_4 passanti per una c^4 razionale, segue che la V_3^4 intersezione di due quadriche di S_5 è equivalente alla suddetta V_3^4 , la quale risulta razionale.

4. Per $\pi = 6$ abbiamo la V_3^{10} intersezione d'una quadrica di S_7 con una V_3^5 sezione della Grassmanniana delle rette di S_4 . Ora quest'ultima si può rappresentare sopra S_4 mediante le quadriche V_3^2 che hanno per curva-base una cubica razionale, onde

La V_3^{10} può rappresentarsi sopra una V_3^4 di S_4 avente per curva doppia una cubica razionale.

Da una sua conica (certo esistente) la V_3^{10} si proietta in una V_3^4 di S_4 contenente una rigata razionale del quart'ordine e, di conseguenza, 21 punti doppi.

Per $\pi = 7$ la V_3^{12} si ottiene come intersezione d'una quadrica di S_8 con una V_3^6 di Segre, la quale può rappresentarsi notoriamente sopra S_4 mediante le quadriche che passano per due rette sghembe. Segue che

La V_3^{12} è equivalente a una V_3^4 di S_4 avente per curva doppia due rette sghembe.

Da una sua cubica razionale la V_3^{12} si proietta in una V_3^4 di S_4 che contiene una rigata razionale del quint'ordine e, quindi, 24 punti doppi.

È chiaro che le varietà $V_3^{2\pi-2}$, di cui le superficie sezioni sono dotate d'un sistema canonico d'ordine zero, hanno qualche analogia con le superficie di Del Pezzo, e così sorge la domanda se esse, come queste, formano una serie finita quando si escludono i coni e le varietà rigate. A tale domanda, posta dal Fano per primo, non si sa ancora dare una risposta completa; ma si può dire che, sebbene esistano dei tipi generali pei valori di π maggiori di 7, tutti questi — ed anche certi tipi particolari che sono riferibili alla V_3^3 generale di S_4 — si possono trasformare in forme quartiche di S_4 aventi qualche singolarità. E così risulta che, all'infuori del tipo $\pi = 4$, tutte le varietà sono rappresentabili sopra forme quartiche. Di più, se si fa eccezione al caso $\pi = 3$, tutti i tipi si possono rappresentare sopra uno spazio doppio S_3 , avente per superficie di diramazione una sestica le cui singolarità si complicano sempre di più coll'aumentare di π . Questi due fatti, messi uno accanto all'altro, dovrebbero rendere molto probabile una risposta affermativa alla detta questione.

Meccanica (Aeronautica). — *Sulla equazione dei tre momenti per una trave continua inflessa e sollecitata assialmente, con flessiorigidezza variabile linearmente lungo ogni campata.* Nota II⁽¹⁾ di L. CESARI e di F. CONFORTO, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

3. I coefficienti A, B, C, D dell'equazione Albenga-Minelli tendono per $\alpha' \rightarrow 0$ ai corrispondenti coefficienti dell'equazione di Albenga, che sono:

$$(9) \quad A = D = \frac{I}{\mu'} \left(\frac{I}{\mu'} - \frac{I}{\operatorname{senh} \mu'} \right), \quad B = C = \frac{I}{\mu'} \left(\frac{I}{\operatorname{tgh} \mu'} - \frac{I}{\mu'} \right).$$

Per poter dimostrare ciò, supponiamo intanto α' già sufficientemente piccolo, sia $0 \leq \alpha' \leq 1/2$. L'equazione differenziale (1'') ha i punti singolari $\xi = -\frac{I}{\alpha'}$, $\xi = \infty$, onde i suoi integrali sono sviluppabili in serie di potenze di ξ nell'intorno di $\xi = 0$, uniformemente convergenti rispetto ad $0 \leq \alpha' \leq 1/2$ e rispetto a ξ nell'interno di ogni cerchio di centro $\xi = 0$ e raggio < 2 .

Sarà precisamente:

$$(10) \quad T(\xi, \alpha') = \sum_{n=0}^{\infty} T^{(n)}(0, \alpha') \frac{\xi^n}{n!}, \quad T'(\xi, \alpha') = \sum_{n=0}^{\infty} T^{(n+1)}(0, \alpha') \frac{\xi^n}{n!}$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 25 ottobre 1936.

e analogamente per V. Ma è:

$$\frac{d^2}{d\xi^2}[(1 + \alpha'\xi)T(\xi, \alpha')] - \mu'^2 T(\xi, \alpha') = 0$$

onde derivando n volte rispetto a ξ e posto $\xi = 0$

$$T^{(n+2)}(0, \alpha') + (n+2)\alpha' T^{(n+1)}(0, \alpha') - \mu'^2 T^{(n)}(0, \alpha') = 0.$$

Questa relazione per $\alpha' \rightarrow 0$, per la continuità degli integrali dipendenti da un parametro, si riduce a

$$T^{(n+2)}(0, 0) = \mu'^2 T^{(n)}(0, 0)$$

ossia:

$$T^{(2n)}(0, 0) = \mu'^{2n} T(0, 0), \quad T^{(2n+1)}(0, 0) = \mu'^{2n} T'(0, 0)$$

e quindi, potendosi fare il passaggio al limite sulle (10) per la uniforme convergenza rispetto ad α' , si ha per $\xi = 1$ ed $\alpha' = 0$:

$$T(1, 0) = T(0, 0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu'^{2n}}{2n!} + T'(0, 0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu'^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$T'(1, 0) = T(0, 0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu'^{2n+2}}{(2n+1)!} + T'(0, 0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu'^{2n}}{2n!}.$$

Si ha così:

$$T(1, 0) = T(0, 0) \cosh \mu' + T'(0, 0) \frac{1}{\mu'} \sinh \mu'$$

$$T'(1, 0) = T(0, 0) \mu' \sinh \mu' + T'(0, 0) \cosh \mu'$$

ed analogamente per la V. Sostituendo nelle espressioni di A, B, C, D, dove sia fatto $\alpha' = 0$, si ritrovano le (9).

4. Noi abbiamo ora dimostrato che quando $\alpha' \rightarrow 0$, i coefficienti A, B, C, D tendono ai corrispondenti coefficienti (9) dell'equazione di Albenga.

Tuttavia i coefficienti A, B, C, D per valori di α' sufficientemente piccoli non possono essere calcolati con le formule (8) e quindi usando le tavole delle funzioni cilindriche, poiché i due argomenti in cui queste funzioni devono essere calcolate $\frac{2\mu'i}{\alpha'}$ e $\sqrt{1 + \alpha'}$ diventano molto grandi per $\alpha' \rightarrow 0$ e quindi escono dalle tavole ora esistenti di dette funzioni. Per valori di α' piccolissimi però, anziché prolungare le tavole delle funzioni cilindriche esistenti, conviene tener conto delle seguenti considerazioni:

La soluzione $y(\xi, \alpha')$ del problema (1'), (2) per $\alpha' < 1$ può svilupparsi in serie di potenze di α' convergente uniformemente per ogni $0 \leq \xi \leq 1$ e per ogni $0 \leq \alpha' \leq 1 - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ arbitrario. Avremo cioè:

$$y(\xi, \alpha') = y(\xi, 0) + \alpha' y_1(\xi, 0) + \frac{\alpha'^2}{2!} y_2(\xi, 0) + \dots$$

dove:

$$y_n(\xi, 0) = \left[\frac{\partial^n}{\partial \alpha'^n} y(\xi, \alpha') \right]_{\alpha'=0}.$$

Ne risulterà che anche i coefficienti A, B, C, D saranno sviluppabili in serie di potenze di α' , convergenti uniformemente per ogni $0 \leq \alpha' \leq 1 - \varepsilon$. Per valori di α' sufficientemente piccoli basterà limitarsi ad un certo numero finito di termini. In tali sviluppi il termine non contenente α' deve coincidere con il relativo coefficiente (9) dell'equazione di Albenga.

5. Siano ora $T(\xi, \alpha')$ e $V(\xi, \alpha')$ due integrali qualsiasi dell'equazione omogenea (1''). Detti integrali saranno essi pure per $0 \leq \alpha' \leq 1 - \varepsilon$ uniformemente rappresentabili con le serie:

$$T(\xi, \alpha') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha'^n}{n!} T_n(\xi), \quad V(\xi, \alpha') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha'^n}{n!} V_n(\xi)$$

ove:

$$T_n(\xi) = \left[\frac{\partial^n}{\partial \alpha'^n} T(\xi, \alpha') \right]_{\alpha'=0}, \quad V_n(\xi) = \left[\frac{\partial^n}{\partial \alpha'^n} V(\xi, \alpha') \right]_{\alpha'=0}.$$

$T_n(\xi)$ e $V_n(\xi)$ debbono perciò soddisfare alle equazioni differenziali seguenti, che si ottengono dalla (1'') resa omogenea derivando, rispetto ad α' , n volte, e ponendo indi $\alpha' = 0$:

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{d^2}{d\xi^2} T_0 - \mu'^2 T_0 = 0 \\ \frac{d^2}{d\xi^2} [T_n + n\xi T_{n-1}] - \mu'^2 T_n = 0 \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

L'arbitrarietà nella scelta delle T_n e V_n , soddisfacenti a queste condizioni, potrà essere utilizzata onde avere la massima semplicità di calcoli.

Porremo perciò:

$$T_0(\xi) = \operatorname{senh} \mu' \xi, \quad V_0(\xi) = \cosh \mu' \xi;$$

indi supporremo che tutte le T_n e V_n , $n = 1, 2, \dots$ soddisfino alle condizioni ai limiti:

$$(12) \quad T_n(0) = 0, \quad T_n(1) = 0, \quad V_n(0) = 0, \quad V_n(1) = 0.$$

In tal modo è:

$$\Delta = \begin{vmatrix} T(o, \alpha') & V(o, \alpha') \\ T(i, \alpha') & V(i, \alpha') \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_o(o) & V_o(o) \\ T_o(i) & V_o(i) \end{vmatrix} = -\operatorname{senh} \mu'$$

ed inoltre, posto ad esempio:

$$\Delta_{1n} = \begin{vmatrix} T_o(i) & V_o(i) \\ T_n(i) & V_n(i) \end{vmatrix}$$

è:

$$(13) \quad \Delta_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha'^n}{n!} \Delta_{1n}$$

ed analogamente per $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$.

Per $n = 1$ si ha dalle (11) e tenendo conto delle condizioni (12):

$$T_1(\xi) = -\frac{i}{4} \left[\left(3\xi - 3 - \frac{\mu'}{\operatorname{tgh} \mu'} \right) \operatorname{senh} \mu' \xi + \mu' \xi^2 \cosh \mu' \xi \right]$$

$$V_1(\xi) = \frac{i}{4} \left[\left(-\mu' \xi^2 + \mu' + \frac{3}{\operatorname{tgh} \mu'} \right) \operatorname{senh} \mu' \xi - 3\xi \cosh \mu' \xi \right].$$

Si ha così dalle (7) e tenendo conto delle (13):

$$A = \frac{i}{\mu'} \left[\frac{i}{\mu'} - \frac{i}{\operatorname{senh} \mu'} \right] + \frac{\alpha'}{4 \operatorname{senh} \mu'} \left[\frac{i}{\mu'} - \frac{i}{\operatorname{tgh} \mu'} \right]$$

$$B = \frac{i}{\mu'} \left[\frac{i}{\operatorname{tgh} \mu'} - \frac{i}{\mu'} \right] + \frac{\alpha'}{4 \mu' \operatorname{senh} \mu'} \left[\frac{\mu'}{\operatorname{senh} \mu'} + 2 \cosh \mu' - 3 \frac{\operatorname{senh} \mu'}{\mu'} \right]$$

$$C = \frac{i}{\mu'} \left[\frac{i}{\operatorname{tgh} \mu'} - \frac{i}{\mu'} \right] + \frac{\alpha'}{4} \left[\frac{i}{\operatorname{senh}^2 \mu'} - \frac{i}{\mu'^2} \right]$$

$$D = \frac{i}{\mu'} \left[\frac{i}{\mu'} - \frac{i}{\operatorname{senh} \mu'} \right] + \frac{\alpha'}{4 \mu' \operatorname{senh} \mu'} \left[4 \frac{\operatorname{senh} \mu'}{\mu'} - \frac{\mu'}{\operatorname{tgh} \mu'} - 3 \right].$$

In modo analogo si tratterebbero i coefficienti delle potenze superiori di α' .

6. Quanto abbiamo visto per la trave tesa e inflessa può essere ripetuto con lievi modificazioni delle formule per la trave compressa e inflessa.

Daremo in altro lavoro su una rivista tecnica più ampi sviluppi per la trave tesa, nonchè le formule per la trave compressa. Inoltre daremo notizie particolareggiate sul calcolo numerico dei coefficienti A, B, C, D, calcolo numerico che è tutt'ora in corso presso l'Istituto per le Applicazioni del Calcolo. Verranno ivi date infine le tabelle ed i grafici dei coefficienti stessi.

Meccanica. — *Una forma più generale della terza legge di Keplero.* Nota di L. LABOCETTA, presentata⁽¹⁾ dal Socio G. A. CROCCO.

I. L'EQUILIBRIO DINAMICO DEGLI AGGREGATI NEL MOTO INTORNO A UN CORPO ATTRAENTE. — Quando un aggregato costituito da un certo numero di atomi elementari⁽²⁾ si muove sotto l'azione di un corpo centrale attraente, descrivendo ad es. una circonferenza intorno a questo, esso si trova soggetto a due forze continuamente in equilibrio: la forza centrifuga e la forza attraente, rispettivamente dovute alla sua massa cinetica ed alla sua massa pesante.

Siccome queste due masse sono entrambe proporzionali alla quantità di materia può avvenire che degli atomi si distacchino dall'aggregato in moto, o che degli atomi si aggreghino ad esso (purchè il distacco o l'aggregazione si compiano senza urti) senza che la traiettoria venga alterata e restando invariata la velocità, e quindi la frequenza propria del moto originale.

Assai diverso è il caso di un aggregato complesso comprendente, ad es., p atomi elementari con q cariche elettriche libere, sul quale il corpo centrale attraente agisce per effetto di cariche elettriche da esso possedute. In tal caso affinchè si conservino inalterate le caratteristiche del moto variando la composizione dell'aggregato, occorre che p e q variino insieme restando costante il loro rapporto. Ma se l'aggregato perde od acquista un atomo, restando invariato il numero delle cariche elettriche — anche se ciò avvenga senza urto — esso non può, in genere, restare sulla stessa orbita, né la sua traiettoria conservare la stessa forma. Mancando l'urto si ha il passaggio brusco ad un'orbita ellittica tangente internamente alla circonferenza per la perdita di un atomo ed invece il passaggio ad un'orbita tangente esternamente per l'aggregazione di uno o più atomi. I fenomeni inversi si produrrebbero nel caso della perdita o dell'acquisto di una o più delle cariche elettriche.

Ciò che si è detto per l'equilibrio nel moto su di un'orbita circolare vale anche per il caso del moto su di un'orbita ellittica aggiungendo alla forza attraente del corpo centrale ed alla forza centrifuga anche la resistenza d'inerzia per l'accelerazione, o la ritardazione, tangenziale.

(1) Nella seduta del 1° novembre 1936.

(2) Come massa dell'atomo elementare ho sempre assunto, secondo l'uso, $1/16 \text{ O}_{16}$. È chiaro però che ora come massa elementare converrebbe scegliere quella del neutrone. Ciò non altera le formole e solo di pochissimo i valori numerici.

Apparisce quindi la convenienza di dare alla legge di Keplero che regola questi moti una forma più generale applicabile ad aggregati nei quali le forze inerziali e quelle attrattive sono dovute ad elementi diversi e che si riduce a quella ordinaria quanto la variazione dell'aggregato avviene restando costante la proporzione fra gli elementi di cui è composto.

2. LA LEGGE DI KEPLERO PER GLI AGGREGATI SEMPLICI. — Se si hanno dei pianeti che percorrono delle orbite ellittiche i cui semiassi maggiori sono rispettivamente $r_1, r_2, \dots, r_i, \dots$ compiendo le loro rivoluzioni nei tempi $T_1, T_2, \dots, T_i, \dots$ la terza legge di Keplero afferma la costanza del rapporto

$$(1) \quad r_1^3/T_1^2 = r_2^3/T_2^2 = \dots = r_i^3/T_i^2 = \dots$$

È questa una relazione puramente cinematica fra tempi e distanze, nella quale non apparisce né la massa ZM del corpo centrale attraente, né quella $p_1 M, p_2 M, \dots, p_i M, \dots$ dei singoli pianeti, intendendosi qui di indicare con M la massa di un atomo elementare e con $Z, p_1, p_2, \dots, p_i, \dots$ il numero degli atomi elementari costituenti il corpo centrale ed i singoli pianeti.

Neanche appariscono in essa le velocità dei singoli pianeti e ciò anzitutto perchè la velocità lineare di questi varia continuamente nel mentre essi percorrono le loro orbite, e d'altra parte perchè nella (1) è contenuto soltanto il semiasse maggiore dell'orbita, cosicchè questa può variar di forma assumendo tutte le eccentricità possibili per uno stesso valore del tempo periodico. Fissata però l'eccentricità dell'orbita resta costante durante il percorso di essa la velocità areolare, che varia in senso inverso dell'eccentricità essendo nulla per l'eccentricità uno, ellisse degenere, e raggiungendo il massimo valore per l'eccentricità nulla, ossia per l'orbita circolare, per la quale è costante anche la velocità lineare e quindi la velocità angolare. Ai semiassi $r_1, r_2, \dots, r_i, \dots$, considerati come raggi di orbite circolari, si possono perciò associare le velocità areolari massime $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ e le corrispondenti velocità lineari $v_1, v_2, \dots, v_i, \dots$ ed angolari $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots$. Introducendo questi valori nella (1) essa diventa

$$(2) \quad A_1 v_1 = A_2 v_2 = \dots = A_i v_i = \dots$$

$$(3) \quad v_1^2 r_1 = v_2^2 r_2 = \dots = v_i^2 r_i = \dots$$

$$(4) \quad \omega_1^2 r_1^3 = \omega_2^2 r_2^3 = \dots = \omega_i^2 r_i^3 = \dots$$

Poichè queste relazioni debbono valere qualunque sia il raggio r_i dell'orbita sulla quale si muove il pianeta, esse sono in particolare verificate anche per il pianeta, di massa infinitamente piccola, circolante a contatto con la superficie del corpo centrale quando questo sia ridotto alla condizione

di sfera normale⁽¹⁾ di Z atomi elementari. In questo caso però chiamando $c, \lambda_i, e, 2\pi\tau$, la velocità della luce, il raggio della sfera atomica gravitazionalmente definita ed il tempo proprio di essa, e ponendo per il coefficiente k della legge di gravitazione l'espressione assoluta⁽²⁾ del suo valore $c^2 \lambda_i M^{-1}$, le relazioni da (1) a (4) diventano rispettivamente:

$$(5) \quad r^3/T^2 = \frac{1}{4\pi^2} k M Z = \frac{1}{4\pi^2} c^2 \lambda_i Z$$

$$(6) \quad Av = \frac{1}{2} k M Z = \frac{1}{2} c^2 \lambda_i Z$$

$$(7) \quad v^2 r = k M Z = c^2 \lambda_i Z$$

$$(8) \quad \omega^2 r^3 = k M Z = c^2 \lambda_i Z.$$

Nell'ultimo membro si hanno così i valori delle costanti kepleriane, riportate al primo membro di queste relazioni, messi sotto forma assoluta, poichè infatti risultano espressi mediante fattori geometrici, $1/2$ e $1/4\pi^2$, un numero intiero, Z , e costanti universali, c, e, λ_i .

3. LA LEGGE DI KEPLERO PER GLI AGGREGATI COMPLESSI. — Nel caso di aggregati comprendenti ciascuno insieme con p_i atomi elementari anche q_i cariche elettriche, aventi cioè una carica $e q_i$, se il corpo centrale attraente ha una carica Ze , si dovrà avere come condizione di equilibrio nel movimento di questi aggregati sulle loro orbite

$$(9) \quad (p_1/q_1) v_1^2 r_1 = (p_2/q_2) v_2^2 r_2 = \dots = Ze^2/M.$$

Se è T_i il tempo periodico corrispondente all'orbita di raggio r_i , cosicchè $v_i = 2\pi r_i/T_i$, con questo valore di v_i la relazione (9) diventa

$$(10) \quad (p_1/q_1) \frac{r_1^3}{T_1^2} = (p_2/q_2) \frac{r_2^3}{T_2^2} = \dots = \frac{Ze^2}{4\pi^2 M}.$$

Per la velocità areolare e per quella angolare si ottiene

$$(11) \quad (p_1/q_1) A_1 v_1 = (p_2/q_2) A_2 v_2 = \dots = Ze^2/M$$

$$(12) \quad (p_1/q_1) \omega_1^2 r_1^3 = (p_2/q_2) \omega_2^2 r_2^3 = \dots = Ze^2/M.$$

(1) L. LABOCETTA, *Definizione assoluta e significato fisico delle costanti gravitazionali di Newton, Einstein, Keplero*. Questi «Rendiconti», vol. XX, 1934, p. 327.

(2) L. LABOCETTA, *Una definizione assoluta della costante della gravitazione*. «Atti S. I. P. S. Riun. Napoli 11-17 ottobre 1934», vol. II, p. 309.

Raccogliendo le (9), (10), (11), (12) si ha complessivamente

$$(13) \quad (p/q)(r^3/T^2) = Ze^2/4\pi^2 M$$

$$(14) \quad (p/q)Av = Ze^2/2M$$

$$(15) \quad (p/q)v^2r = Ze^2/M$$

$$(16) \quad (p/q)\omega^2r^3 = Ze^2/M.$$

Relazioni nelle quali le costanti al primo membro differiscono da quelle (5), (6), (7), (8) corrispondenti alla legge di Keplero originale per la presenza del fattore p/q . Ma questo fattore ha per effetto che assegnando al tempo periodico dell'aggregato, alla sua velocità lineare, o a quella angolare, un certo valore determinato, non si ha per il raggio dell'orbita corrispondente un valore unico, ma tanti valori diversi per quanti sono i valori che può assumere il rapporto p/q . Se il numero q delle cariche elettriche resta costante e varia il numero p degli atomi elementari da 1 a n si ottiene in corrispondenza a questi valori un sistema di n orbite distinte: il moto risulta quantificato⁽¹⁾.

4. LA FORMA QUANTICA DELLA LEGGE DI KEPLERO. — Per lo studio del moto sulle orbite quantificate, come innanzi detto, convien sapere esprimere l'energia cinetica di un aggregato in funzione degli elementi dell'orbita sulla quale esso si muove.

Partendo perciò dalla (5) e dalla (13) si osservi che introducendo in esse per r^2/T^2 il suo valore $v^2/4\pi^2$ esse si trasformano nella (7) e nella (15); e siccome poi il raggio della sfera atomica elettromagneticamente definita è $\lambda_2 = e^2/mc^2$, cosicchè viene $e^2 = \lambda_2 mc^2$, m essendo qui la massa dell'elettrone, portando questo valore di e^2 nella (15) le due relazioni (7) e (15) possono anche scriversi

$$(17) \quad pv^2r = pc^2\lambda_1 Z$$

$$(18) \quad pv^2r = q\lambda_2 mc^2 Z/M.$$

Per l'energia cinetica dei due aggregati, che si suppone qui abbiano entrambi la massa pM , viene

$$(19) \quad E_1 = \frac{I}{2} p M v^2 = \frac{I}{2} p Z M c^2 \lambda_1 \frac{I}{r}$$

$$(20) \quad E_2 = \frac{I}{2} p M v^2 = \frac{I}{2} q Z m c^2 \lambda_2 \frac{I}{r}.$$

(1) L. LABOCGETTA, *La quantificazione dei moti nella meccanica classica*. « Ric. Scient. » VII, 15-30 giugno 1936, p. 508.

In queste relazioni la frequenza s'introduce osservando che esse possono identicamente scriversi

$$(21) \quad E_1 = pZ \cdot \frac{I}{2} 2\pi \cdot Mc\lambda_1 \cdot \frac{c}{2\pi r}$$

$$(22) \quad E_2 = qZ \cdot \frac{I}{2} 2\pi \cdot mc\lambda_2 \cdot \frac{c}{2\pi r}$$

ed è notevole che, come è messo in evidenza dalla seconda di queste relazioni, l'energia cinetica dell'aggregato complesso non dipende dal numero p di atomi in esso contenuti ma il valore di essa è già completamente determinato dal numero q delle sue cariche elettriche e dal raggio dell'orbita su cui si muove; come d'altra parte era necessariamente da attendersi.

Ora i prodotti $Mc\lambda_1$ e $mc\lambda_2$ che appariscono nella (21) e nella (22) non sono altro che i momenti delle quantità di moto, momenti angolari, dell'atomo elementare e dell'elettrone che percorrono ciascuno la sua orbita fondamentale e $\frac{I}{2} 2\pi Mc\lambda_1$, $\frac{I}{2} 2\pi mc\lambda_2$ sono gli integrali dell'azione sulle dette due orbite, mentre $c/2\pi r$ è la frequenza propria della sfera normale di raggio r . Ponendo perciò

$$(23) \quad Mc\lambda_1 = \hbar_1, \quad b_1 = \frac{I}{2} 2\pi \hbar_1$$

$$(24) \quad mc\lambda_2 = \hbar_2, \quad b_2 = \frac{I}{2} 2\pi \hbar_2$$

$$(25) \quad \tilde{\nu} = c/2\pi r$$

dove si è indicato con $\tilde{\nu}$ una frequenza, con b_1 e b_2 i due quanti ⁽¹⁾ gravitazionale ed elettromagnetico e con \hbar_1 , \hbar_2 i corrispondenti momenti angolari, si ottiene

$$(26) \quad E_1 = pZb_1 \tilde{\nu}, \quad E_2 = qZb_2 \tilde{\nu}.$$

Ponendo a raffronto queste due relazioni con quella di Planck, relativa al quanto della radiazione,

$$(27) \quad E = nh\nu$$

con la quale entrambe formalmente coincidono, quando si faccia $Z = 1$ si scorge che la relazione di Planck altro non è che la terza legge di Keplero diversamente scritta.

(1) L. LABOCETTA, *Il quanto gravitazionale e significato fisico della costante di Keplero* «Ric. Scient.», VII₁, 31 marzo 1935, p. 384; *Il quanto elettromagnetico e la quantificazione delle orbite.* «Ric. Scient.», VI₁, 15-31 marzo 1936, p. 219.

Più evidente apparisce l'identità se si passano al primo membro le grandezze variabili scrivendo

$$(28) \quad E_1/\tilde{v} = p Z h_1, \quad E_2/\tilde{v} = q Z h^2$$

poichè è

$$(29) \quad E_1/\tilde{v} = \left(\frac{4\pi^3 M p}{c} \right) \frac{r^3}{T^2}, \quad E_2/\tilde{v} = \left(\frac{4\pi^3 M p}{c} \right) \frac{r^3}{T^2}$$

cosicchè ponendo il fattore costante $c/4\pi^3 M = C$ viene

$$(30) \quad r^3/T^2 = C Z h_1, \quad r^3/T^2 = (q/p) C Z h_2$$

relazioni notevoli perchè mostrano in qual modo, nel campo della meccanica classica, il rapporto costante fra gli elementi, tempi e distanze, delle orbite kepleriane trova la sua espressione a mezzo della costante di Planck.

Meccanica. — *Le oscillazioni isocarene attorno le configurazioni di equilibrio generale.* Nota I di G. ARRIGHI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

§ 1. — Quando si faccia astrazione dalla resistenza dei mezzi e si riferiscono i momenti al baricentro G, la seconda equazione cardinale dei moti isocarenici dei galleggianti si scrive nella forma particolare

$$(1) \quad M' = \tilde{\omega} V (P - G) \wedge e,$$

dove M è il momento-impulso, $\tilde{\omega}$ il peso specifico (costante) del liquido, V il volume (costante) di carena, P il centro di carena al tempo t e e un vettore unitario verticale volto in alto il quale, al tempo t , coincide col vettore della normale in P alla superficie dei centri di carena⁽²⁾. In questa Nota ci proponiamo di ricavare il sistema cui si riduce la equazione (1) relativamente al caso dei piccoli moti isocarenici attorno le configurazioni di equilibrio

(1) Nella seduta del 15 novembre 1936.

(2) Per la geometria e la meccanica delle isocarene vedi le mie Note: *Introduzione alla geometria differenziale della superficie dei centri di carena*, in «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», vol. LXVII, 1932; *L'evoluta della superficie dei centri di carena*, in «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», vol. XVII, 1933; *Il problema cinematico delle rotazioni isocarene dei galleggianti*, in «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», vol. LXVIII, 1933; *La statica dei galleggianti e la dinamica delle isocarene*, in «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», vol. XVIII, 1933; *Le oscillazioni isocarene attorno le configurazioni cui competono moti di puro giro permanente*, in «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», vol. XXIV, 1936.

generale, avendo già, in precedenza, trattato dei moti attorno le configurazioni di equilibrio cui competono moti isocarenici di puro giro permanente.

Sia P_0 un centro di carena cui compete una posizione di equilibrio del galleggiante e P , nell'intorno di P_0 , sia il centro di carena al tempo t ; detti: \mathbf{n} il vettore (unitario) della normale in P_0 alla superficie dei centri di carena, volto all'interno di essa, ed $\mathbf{u}, \mathbf{v} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{u}$ le direzioni principali di curvatura della predetta superficie in P_0 , limitatamente al moto da noi preso in considerazione, potrà porsi

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (P - P_0) \times \mathbf{u} = -\rho \mathbf{u} \times \delta \mathbf{c} \\ (P - P_0) \times \mathbf{v} = -\rho \mathbf{v} \times \delta \mathbf{c} \end{array} \right.$$

dove ρ, ρ , sono i raggi principali di curvatura rispetto a \mathbf{u}, \mathbf{v} e $\delta \mathbf{c}$ è un vettore piccolo del 1° ordine definito da

$$\delta \mathbf{c} = \mathbf{e} - \mathbf{n}.$$

In considerazione di quest'ultima e per l'identità

$$(P - G) = (P - P_0) + (P_0 - G)$$

può poi scriversi

$$\begin{aligned} (P - G) \wedge \mathbf{c} &= (P - P_0) \wedge \mathbf{n} + (P_0 - G) \wedge \mathbf{n} + \\ &\quad + (P - P_0) \wedge \delta \mathbf{c} + (P_0 - G) \wedge \delta \mathbf{c}, \end{aligned}$$

onde, ponendo

$$g \mathbf{n} = G - P_0$$

e, trascurando i termini di ordine superiore al primo (ciò che faremo sempre nel seguito), con successivi passaggi, si ha

$$\begin{aligned} (P - G) \wedge \mathbf{c} &= (P - P_0) \wedge \mathbf{n} - g \mathbf{n} \wedge \delta \mathbf{c} = \\ &= (P - P_0) \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \wedge \mathbf{n} + (P - P_0) \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{n} - g \mathbf{n} \wedge \delta \mathbf{c} = \\ &= - (P - P_0) \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + (P - P_0) \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - g \mathbf{n} \wedge \delta \mathbf{c}; \end{aligned}$$

moltiplicando scalarmente per \mathbf{i} e tenendo presente le (2) si ha in definitiva

$$(3) \quad \begin{aligned} (P - G) \wedge \mathbf{c} \times \mathbf{i} &= \rho \mathbf{u} \times \delta \mathbf{c} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{i} - \\ &\quad - \rho \mathbf{v} \times \delta \mathbf{c} \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{i} - g \mathbf{n} \wedge \delta \mathbf{c} \times \mathbf{i}, \end{aligned}$$

valendo espressioni analoghe per $(P - G) \wedge \mathbf{c} \times \mathbf{j}$ e $(P - G) \wedge \mathbf{c} \times \mathbf{k}$.

§ 2. — Si dicano ora: θ, θ_1 gli angoli di \mathbf{k} con \mathbf{c} ed \mathbf{n} ; ψ, φ gli angoli della traccia orizzontale del piano $(G, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ con \mathbf{i} e una direzione

orizzontale fissa; ψ_1, φ_1 gli angoli della intersezione dei piani (G, i, j) , (P_0, u, v) con i ed u ; resulta allora:

$$(4) \quad \mathbf{c} = \sin \psi \sin \theta \mathbf{i} + \cos \psi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k};$$

$$(5) \quad \mathbf{u} = (\cos \varphi_1 \cos \psi_1 - \sin \varphi_1 \sin \psi_1 \cos \theta_1) \mathbf{i} - (\cos \varphi_1 \sin \psi_1 + \sin \varphi_1 \cos \psi_1 \cos \theta_1) \mathbf{j} + \sin \varphi_1 \sin \theta_1 \mathbf{k}$$

$$(6) \quad \mathbf{v} = (\sin \varphi_1 \cos \psi_1 + \cos \varphi_1 \sin \psi_1 \cos \theta_1) \mathbf{i} - (\sin \varphi_1 \sin \psi_1 - \cos \varphi_1 \cos \psi_1 \cos \theta_1) \mathbf{j} - \cos \varphi_1 \sin \theta_1 \mathbf{k}$$

$$(7) \quad \mathbf{n} = \sin \psi_1 \sin \theta_1 \mathbf{i} + \cos \psi_1 \sin \theta_1 \mathbf{j} + \cos \theta_1 \mathbf{k}.$$

Operando con δ sulla (4) e ponendo

$$(\alpha) \quad \theta = \theta_1 + \delta\theta, \quad \psi = \psi_1 + \delta\psi,$$

si ha successivamente

$$(8) \quad \begin{aligned} \delta \mathbf{c} &= (\cos \psi \sin \theta \delta\psi + \sin \psi \cos \theta \delta\theta) \mathbf{i} - \\ &- (\sin \psi \sin \theta \delta\psi - \cos \psi \cos \theta \delta\theta) \mathbf{j} - \sin \theta \cdot \delta\theta \cdot \mathbf{k} = \\ &= (\cos \psi_1 \sin \theta_1 \delta\psi + \sin \psi_1 \cos \theta_1 \delta\theta) \mathbf{i} - \\ &- (\sin \psi_1 \sin \theta_1 \delta\psi - \cos \psi_1 \cos \theta_1 \delta\theta) \mathbf{j} - \sin \theta_1 \cdot \delta\theta \cdot \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Dalle (5), (6), (8), con facili passaggi che non trascriviamo, segue allora

$$(9) \quad \begin{cases} \mathbf{u} \times \delta \mathbf{c} = \cos \varphi_1 \sin \theta_1 \delta\psi - \sin \varphi_1 \delta\theta \\ \mathbf{v} \times \delta \mathbf{c} = \sin \varphi_1 \sin \theta_1 \delta\psi + \cos \varphi_1 \delta\theta, \end{cases}$$

mentre, dalle (7), (8), discende

$$(10) \quad \begin{cases} \mathbf{n} \wedge \delta \mathbf{c} \times \mathbf{i} = \sin \psi_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \delta\psi - \cos \psi_1 \delta\theta \\ \mathbf{n} \wedge \delta \mathbf{c} \times \mathbf{j} = \cos \psi_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \delta\psi + \sin \psi_1 \delta\theta \\ \mathbf{n} \wedge \delta \mathbf{c} \times \mathbf{k} = -\sin^2 \theta_1 \delta\psi. \end{cases}$$

Sostituendo, mediante le (9), (10), nella (3), si ricava

$$\begin{aligned} (P - G) \wedge \mathbf{c} \times \mathbf{i} &= \\ &= \sin \theta_1 [\rho \cos \varphi_1 \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{i} - \rho_1 \sin \varphi_1 \mathbf{u} \times \mathbf{i} - g \sin \psi_1 \cos \theta_1] \delta\psi - \\ &- [\rho \sin \varphi_1 \mathbf{v} \times \mathbf{i} + \rho_1 \cos \varphi_1 - g \cos \psi_1] \delta\theta. \end{aligned}$$

Ma dalle (5), (6), resulta

$$\sin \varphi_1 \mathbf{u} \times \mathbf{i} - \cos \varphi_1 \mathbf{v} \times \mathbf{i} = -\sin \psi_1 \cos \theta_1$$

$$\cos \varphi_1 \mathbf{u} \times \mathbf{i} + \sin \varphi_1 \mathbf{v} \times \mathbf{i} = \cos \psi_1;$$

onde, sostituendo nella precedente, discende ancora

$$(P - G) \wedge \mathbf{c} \times \mathbf{i} = \sin \theta_i [(\rho - g) \cos \varphi_i \mathbf{v} \times \mathbf{i} - (\rho_i - g) \sin \varphi_i \mathbf{u} \times \mathbf{i}] \delta\psi - \\ - [(\rho - g) \sin \varphi_i \mathbf{v} \times \mathbf{i} + (\rho_i - g) \cos \varphi_i \mathbf{u} \times \mathbf{i}] \delta\theta$$

ovvero

$$(P - G) \wedge \mathbf{c} \times \mathbf{i} = D \delta\psi - E \delta\theta$$

dove si è posto

$$D = \sin \theta_i [(\rho - g) \cos \varphi_i \mathbf{v} \times \mathbf{i} - (\rho_i - g) \sin \varphi_i \mathbf{u} \times \mathbf{i}]$$

$$E = (\rho - g) \sin \varphi_i \mathbf{v} \times \mathbf{i} + (\rho_i - g) \cos \varphi_i \mathbf{u} \times \mathbf{i}.$$

Si otterebbe in guisa analoga

$$(P - G) \wedge \mathbf{c} \times \mathbf{j} = F \delta\psi - G \delta\theta$$

$$(P - G) \wedge \mathbf{c} \times \mathbf{k} = H \delta\psi - K \delta\theta$$

dove F, G, H, K si determinano con le opportune rotazione circolari.

§ 3. — Circa le componenti del vettore rotazione rispetto agli assi $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, per essere

$$p = \sin \psi \sin \theta \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \cos \psi \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$q = \cos \psi \sin \theta \cdot \frac{d\varphi}{dt} - \sin \psi \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$r = \frac{d\psi}{dt} + \cos \theta \frac{d\varphi}{dt},$$

e tenendo presente le (α) del paragrafo precedente, resulta

$$p = \sin \psi_i \sin \theta \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \cos \psi_i \frac{d\delta\theta}{dt}$$

$$q = \cos \psi_i \sin \theta_i \cdot \frac{d\varphi}{dt} - \sin \psi_i \frac{d\delta\theta}{dt}$$

$$r = \frac{d\delta\psi}{dt} + \cos \theta_i \frac{d\varphi}{dt}.$$

Trascurando i prodotti delle p, q, r a due a due perchè piccoli di ordine superiore al primo, e, indicando, modo solito, con A, B, C i momenti principali baricentrali d'inerzia del galleggiante, la equazione (1) si spezza nel sistema lineare del secondo ordine:

$$A \sin \psi_i \sin \theta_i \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + A \cos \psi_i \frac{d^2 \delta\theta}{dt^2} = \tilde{\omega} V (D \delta\psi - E \delta\theta)$$

$$B \cos \psi_i \sin \theta_i \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - B \sin \psi_i \frac{d^2 \delta\theta}{dt^2} = \tilde{\omega} V (F \delta\psi - G \delta\theta)$$

$$C \frac{d^2 \delta\psi}{dt^2} + C \cos \theta_i \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \tilde{\omega} V (H \delta\psi - K \delta\theta).$$

Supponendo di aver chiamato \mathbf{k} l'asse non perpendicolare a \mathbf{n} , dalla terza di queste equazioni si ricava

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{1}{\cos \theta_i} \frac{d^2 \delta\psi}{dt^2} + \frac{\tilde{\omega} V}{C \cos \theta_i} (H \delta\psi - K \delta\theta)$$

e, sostituendo nelle precedenti,

$$\begin{aligned} & - A \sin \psi_i \operatorname{tg} \theta_i \frac{d^2 \delta\psi}{dt^2} + A \cos \psi_i \frac{d^2 \delta\theta}{dt^2} = \\ & = \tilde{\omega} V \left[\left(D - \frac{A}{C} \sin \psi_i \operatorname{tg} \theta_i H \right) \delta\psi - \left(E - \frac{A}{C} \sin \psi_i \operatorname{tg} \theta_i K \right) \delta\theta \right] \\ & - B \cos \psi_i \operatorname{tg} \theta_i \frac{d^2 \delta\psi}{dt^2} - B \sin \psi_i \frac{d^2 \delta\theta}{dt^2} = \\ & = \tilde{\omega} V \left[\left(F - \frac{B}{C} \cos \psi_i \operatorname{tg} \theta_i H \right) \delta\psi - \left(G - \frac{B}{C} \cos \psi_i \operatorname{tg} \theta_i K \right) \delta\theta \right] \end{aligned}$$

ovvero, in definitiva

$$(11) \quad \begin{cases} L \frac{d^2 \delta\theta}{dt^2} - M \frac{d^2 \delta\psi}{dt^2} = \tilde{\omega} V (N \delta\psi - O \delta\theta) \\ P \frac{d^2 \delta\theta}{dt^2} + Q \frac{d^2 \delta\psi}{dt^2} = \tilde{\omega} V (R \delta\psi - S \delta\theta) \end{cases}$$

dove si è posto

$$L = A \cos \psi_i, \quad M = A \sin \psi_i \operatorname{tg} \theta_i,$$

$$N = D - \frac{A}{C} \sin \psi_i \operatorname{tg} \theta_i H, \quad O = E - \frac{A}{C} \sin \psi_i \operatorname{tg} \theta_i K$$

$$P = B \sin \psi_i, \quad Q = B \cos \psi_i \operatorname{tg} \theta_i,$$

$$R = -F + \frac{B}{C} \cos \psi_i \operatorname{tg} \theta_i H, \quad S = -G + \frac{B}{C} \cos \psi_i \operatorname{tg} \theta_i K.$$

La integrazione e l'analisi del sistema (11) saranno oggetto di una seconda Nota.

Chimica (Chimica fisica). — *Spettro Raman di idrocarburi aromatici a nuclei condensati.* — I. *Antracene e fenantrene e loro simmetria molecolare.* Nota⁽¹⁾ di R. MANZONI ANSIDEI, presentata dal Socio M. BETTI.

In una brevissima comunicazione apparsa nella « Ricerca Scientifica »⁽²⁾ ho recentemente pubblicato gli spettri Raman dell'antracene e del fenantrene. Questi spettri mancavano ancora nella bibliografia e per ottenerli ho dovuto superare non piccole difficoltà data la fluorescenza intensa e il relativo forte fondo che si ha tentando gli spettri Raman di questi idrocarburi. D'altra parte era necessaria la conoscenza di questi spettri per le esigenze di una ricerca generale sulla simmetria delle molecole dei corpi aromatici che si sta compiendo in questo laboratorio.

Sono riuscito dopo vari tentativi ad ottenere discreti spettri (se pur incompleti) distillando nel vuoto i prodotti, già chimicamente purissimi, ed eseguendo gli spettri in soluzione in diversi solventi (acetone, tetrachloruro di carbonio, cloroformio, solfuro di carbonio) con l'aggiunta di una piccola traccia di nitrobenzolo. In spettri di paragone venivano registrate le righe date dal solvente con la traccia di nitrobenzolo operando in condizioni perfettamente identiche a quelle nelle quali si sperimentava con le sostanze da esaminare. In tal modo si potevano rilevare accuratamente le righe Raman da attribuirsi agli idrocarburi aromatici in esame.

Nella tabella I sono riportati gli spettri Raman ottenuti per l'antracene e per il fenantrene accanto agli spettri ultrarossi recentemente pubblicati per questi due corpi da Lecomte⁽³⁾ (le frequenze dei massimi ultrarossi non sono riportate al vuoto).

DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

Dall'esame dei dati sperimentali appare subito manifesta: a) la povertà di righe Raman dello spettro dell'antracene rispetto a quello del fenantrene analogamente alla povertà di massimi di assorbimento ultrarossi del primo rispetto al secondo; b) la non corrispondenza tra le righe Raman e ultrarosse dell'antracene in opposto alla buona, se non generale, corrispondenza

(1) Pervenuta all'Accademia il 19 ottobre 1936.

(2) « La Ricerca Scientifica », ser. II, anno VII, vol. I, nn. 7-8 (aprile, 1936).

(3) LECOMTE e LAMBERT, *Publications Scientif. et Techn. du Minist. de l'Air*, N. 34, Paris, Gauthier-Villars (1933).

TABELLA I.

Spettri Raman e ultrarossi dell'antracene e del fenantrene (ν in cm^{-1}).

| ANTRACENE | | FENANTRENE | |
|---------------|--------------------|---------------|--------------------|
| Effetto Raman | Assorb. ultrarosso | Effetto Raman | Assorb. ultrarosso |
| 1631 (3) | | 1609 (5) | |
| 1558 (3 1/2) | | 1571 (1/2) | |
| 1478 (1/2) ↑ | — | 1524 (2) (?) | |
| 1400 (8) | — | 1476 (2) ↑ | 1478 |
| 1262 (1) | — | 1439 (5) | — |
| 1178 (1 1/2) | — | 1424 (0) | — |
| 1161 (1/2) | — | 1418 (1/2) | — |
| — | 1142 | 1346 (8) | — |
| — | 1130 | 1242 (1) | — |
| 1007 (1/2) | — | 1231 (1 1/2) | — |
| — | 986 | 1202 (1/2) | 1211 |
| — | 916 | 1182 (1/2) | — |
| — | 863 | 1156 (1) | — |
| 751 (1/2) | — | 1140 (1/2) | 1134 |
| — | 726 | — | 1080 |
| 521 (0) | — | 1037 (3) | — |
| 388 (1) | | 1018 (2) | 1022 |
| | | 971 (1/2) | 980 |
| | | 946 (1/2) | 944 |
| | | — | 864 |
| | | 841 (1) | — |
| | | — | 814 |
| | | 738 (1 1/2) | 738 |
| | | 710 (1) | 709 |
| | | — ↓ | 623 |
| | | 540 (1/2) | |
| | | 487 (0) | |
| | | 405 (3) | |
| | | 274 (1) | |
| | | 247 (1) | |

tratto esplorato in ultrarosso

tratto esplorato in ultrarosso

tra gli spettri ultrarosso e Raman per il fenantrene (s'intende per la zona ultrarossa esplorata da Lecomte).

Recentemente Bonino⁽¹⁾ in questi « Rendiconti » ha riassunto un metodo, elaborato nei lavori di Wigner e di Tisza, onde calcolare rapidamente coll'aiuto della teoria dei gruppi i tipi e i numeri delle oscillazioni proprie di una molecola nonché le loro regole di selezione in Raman ed in ultrarosso. Valendomi delle indicazioni contenute in questo lavoro di Bonino ho eseguiti i calcoli per le molecole dell'antracene e del fenantrene alle quali la fenomenologia chimica assegna simmetrie profondamente diverse.

Ordinariamente le formule chimico-organiche (a parte la dibattuta quistione dei « doppi legami » che sarebbe più esatto oggi definire la quistione « della configurazione » a cui può dar luogo la perturbazione delle autofunzioni p_z degli atomi di carbonio delle rispettive molecole⁽²⁾) attribuiscono alla molecola dell'antracene un piano di simmetria σ_b coincidente con il

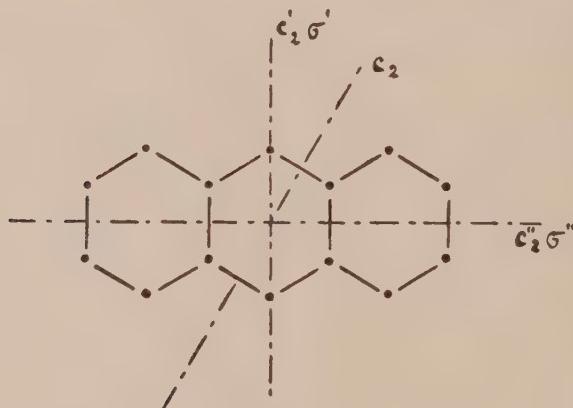


Fig. 1.

piano della molecola (supponendo cioè tutti gli atomi « giacenti » in un solo piano), un asse binario di simmetria C_2 perpendicolare a tale piano e due altri assi di simmetria C_2 e C_2' giacenti nel piano σ_b e ortogonali fra loro, due piani di simmetria σ' , σ'' ortogonali a σ_b e taglienti questo piano secondo C_2 e C_2' . Ne viene di conseguenza un centro di simmetria i . Il gruppo di simmetria è dunque il D_{2h} (o V_h) con otto classi di elementi (compresa l'unità) e perciò con otto rappresentazioni irriducibili. Le oscillazioni della molecola (simmetriche o antisimmetriche a C_2) si suddivideranno in otto tipi. La tabella dei caratteri per questo gruppo non è data splicitamente né dai lavori di Wigner né da quelli Tisza ed è stata calco-

(1) BONINO, « Rend. Acc. Lincei ».

(2) Ved., per es., BRIEGLER, « Zeits. Phys. Chem. », B. 31, 58 (1935).

lata da Bonino in un lavoro in corso di stampa nella *Gazzetta Chimica Italiana*. Valendomi di questa tabella sono giunto per la molecola dell'antracene alle conclusioni riassunte nella tabella II. Il calcolo è stato eseguito per lo « scheletro » carbonico della molecola dell'antracene considerando i C—H come uniche masse e trascurando perciò le oscillazioni di valenza e di deformazione riferibili a tali gruppi atomici.

TABELLA II.
Antracene (scheletro carbonico C_{14}).

| Tipo | Simmetria | | | Numero di oscilla- zioni | Effetto Raman | Assorb. ultrarosso |
|------------------|--------------|--------------|--------------|--------------------------------|------------------|-----------------------|
| | σ_b | σ' | σ'' | | | |
| A ₁ | simmetrica | simmetrica | simmetrica | 7 | polarizzata | inattiva |
| A ₂ | simmetrica | antisimmetr. | antisimmetr. | 6 | depolarizzata | inattiva |
| B ₁ | antisimmetr. | antisimmetr. | simmetrica | 2 | depolarizzata | inattiva |
| B ₂ | antisimmetr. | simmetrica | antisimmetr. | 3 | depolarizzata | inattiva |
| A' ₁ | antisimmetr. | antisimmetr. | antisimmetr. | 3 | inattiva | inattiva |
| A' ₂ | antisimmetr. | simmetrica | simmetrica | 3 | inattiva | attiva |
| B' ₁ | simmetrica | simmetrica | antisimmetr. | 6 | inattiva | attiva |
| B' ₂ | simmetrica | antisimmetr. | simmetrica | 6 | inattiva | attiva |
| Totali | | | | 36 | 18 | 15 |

La simmetria che la fenomenologia chimica attribuisce alla molecola del fenantrene è profondamente diversa da quella dell'antracene. Infatti con-

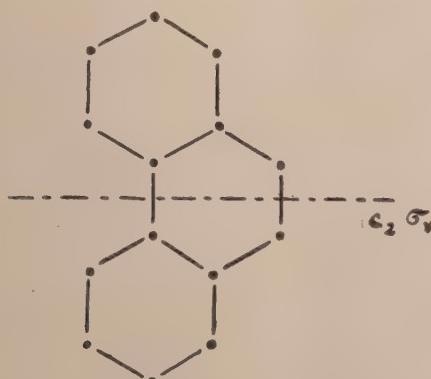


Fig. 2.

siderando pure qui tutti gli atomi giacenti in un piano di simmetria σ_b non resterebbe che un asse C_2 binario contenuto in detto piano e un piano speculare σ_v perpendicolare a σ_b e tagliante questo secondo C_2 . Il gruppo di simmetria è C_{2v} con quattro classi di elementi (compresa l'unità) e perciò le oscillazioni (simmetriche e antisimmetriche a C_2) si classificherebbero in quattro tipi distinti. La tabella dei caratteri del gruppo C_{2v} è data sia da Wigner⁽¹⁾ che da Tisza⁽²⁾ e con l'aiuto di questa ho calcolato per la molecola del fenantrene i dati riassunti nella tabella III.

TABELLA III.
Fenantrene (scheletro carbonico C_{14}).

| Tipo | Simmetria | | Numero di oscillazioni | Effetto Raman | Assorbimento ultrarosso |
|------------------|----------------|----------------|---------------------------|---------------|----------------------------|
| | σ_b | σ_v | | | |
| A ₁ | simmetrica | simmetrica | 13 | polarizzata | attiva |
| A ₂ | antisimmetrica | antisimmetrica | 6 | depolarizzata | inattiva |
| B ₁ | simmetrica | antisimmetrica | 12 | depolarizzata | attiva |
| B ₂ | antisimmetrica | simmetrica | 5 | depolarizzata | attiva |
| Totali | | | 36 | 36 | 30 |

L'esame delle tabelle II e III ci avverte che per la molecola dell'antracene (secondo la supposta simmetria D_{2h}) è da attenderci un numero di righe Raman che è uguale alla metà di quelle che dovremmo attenderci nello spettro del fenantrene. Analogamente per lo spettro ultrarosso dell'antracene sarebbe da attenderci la metà dei massimi di assorbimento presenti dallo spettro ultrarosso del fenantrene. Le previsioni teoriche ci darebbero dunque ragione della povertà di righe Raman e di massimi di assorbimento ultrarosso che si riscontrano sperimentalmente per l'antracene rispetto al fenantrene. Gli spettri stessi sia ultrarossi sia Raman si mostrano però ancora incompleti, ma ciò nonostante permettono un ulteriore paragone con i risultati teorici. Invero la teoria (vedi tabella II) prevede che i massimi di assorbimento ultrarosso dell'antracene devono corrispondere ad oscillazioni inattive in effetto Raman. Effettivamente i sei massimi ultrarossi trovati da Lecomte per l'antracene non trovano corrispondenza con le rispettive righe Raman. Le differenze quadratiche medie tra le frequenze dei tre massimi ultrarossi ($1142, 986, 726 \text{ cm}^{-1}$) e le frequenze delle righe

(1) WIGNER, «Gött. Nach. Mat. Phys. Kl.», anno 1930, p. 133.

(2) TISZA, «Zeits. f. Phys.», 82, 48 (1933).

Raman a cui questi più si avvicinano è di circa 22 numeri d'onda valore tale da farci concludere (data la precisione delle misure di Lecomte) sulla non coincidenza anche di questi tre massimi con righe Raman.

Per il fenantrene invece la teoria (vedi tabella III) prevederebbe che tutti i massimi di assorbimento ultrarosso debbano corrispondere a oscillazioni attive in effetto Raman. La teoria non conclude per il viceversa dato che le oscillazioni di tipo A₂ sono attive e depolarizzate in effetto Raman mentre sono inattive in ultrarosso.

L'osservazione dei dati sperimentali sopra registrati mostra una buona corrispondenza tra i massimi ultrarossi trovati da Lecomte per il fenantrene e le posizioni delle rispettive righe Raman. Per i massimi ultrarossi «corrispondenti» a righe Raman (otto massimi su dodici dati nello spettro di Lecomte) abbiamo differenze nelle rispettive posizioni fra i due spettri importanti uno scarto quadratico medio di circa 4¹, numeri d'onda, scarto che ricade nettamente nelle differenze sperimentali.

Non trovano corrispondenza nello spettro Raman del fenantrene i massimi a 1080, 864, 814, 623 cm⁻¹. Occorre però ricordare che nello spettro ultrarosso si hanno facilmente da registrare i toni superiori e di combinazione che compaiono solo eccezionalmente in effetto Raman. Ora la 814 cm⁻¹ può classificarsi come un tono superiore della frequenza fondamentale 405 cm⁻¹ ($405 \times 2 = 810 \text{ cm}^{-1}$) presente nello spettro Raman. La 1080 cm⁻¹ può facilmente ritenersi il tono superiore della 540 cm⁻¹ che pure appare in effetto Raman. La 623 cm⁻¹ che non trova riscontro nell'effetto Raman potrebbe ritenersi un tono di combinazione tra la frequenza fondamentale 405 cm⁻¹ ed una eventuale frequenza fondamentale a 220–225 cm⁻¹ che dovrebbe essere analoga alle rispettive frequenze fondamentali a 188 cm⁻¹ del benzolo e 208 cm⁻¹ della naftalina. Queste frequenze sono indicate da Lecomte come necessarie anche nel calcolo delle diverse frequenze di combinazione che appaiono negli spettri ultrarossi dei due suddetti idrocarburi aromatici.

Righe Raman del fenantrene che non corrispondano a massimi ultrarossi sono invece da attendersi teoricamente. Infatti la tabella III ci dice che per il solo «scheletro» C₁₄ del fenantrene si dovrebbero avere sei oscillazioni corrispondenti a righe Raman depolarizzate ma inattive in ultrarosso (oscillazioni di tipo A₁). Un semplice calcolo ci mostra che considerando anche gli idrogeni e cioè per la completa serie di oscillazioni della molecola C₁₄H₁₀ si avrebbero undici oscillazioni di tipo A₂ attive in Raman ma per le quali non si dovrebbe avere corrispondenza nello spettro ultrarosso.

La conoscenza dei gradi di depolarizzazione delle righe Raman potrebbe permetterci una discussione più approfondita. Però da quanto sopra emerge già come notevolmente probabile la simmetria di D_{2h} per il nucleo dell'antracene e la C_{2v} per quello del fenantrene.

Chimica (Chimica fisica). — *Sulla simmetria molecolare del tiofene.* Nota II⁽¹⁾ di G. B. BONINO, presentata dal Socio M. BETTI.

In un precedente lavoro⁽²⁾ ho sviluppato alcune considerazioni sulla simmetria molecolare del tiofene in relazione ai suoi spettri Raman e ultrarossi supponendo di attribuire alla molecola stessa la simmetria C_{2v} . In questa Nota riassumerò le ricerche eseguite seguendo altre ipotesi relative alla simmetria molecolare del tiofene. Per mantenere una certa aderenza con casi riferibili a modelli già proposti e discussi dai chimici mi soffermerò prima sui seguenti due modelli: *a*) modello pentagonale (con o senza doppi legami) a molecola non piana (per es. con gli idrogeni non giacenti nel piano dell'anello eterociclico). *b*) Modello piramidale a base quadrata con quattro C-H complanari ai vertici della base e uno zolfo « tetravalente » al vertice della piramide stessa. Considererò poi anche un terzo modello: *c*) modello quadrato piano dedotto dal modello *b*) proiettando l'etero atomo al centro del quadrato base.

Il modello *a*) può corrispondere nel modo più generale alle formule a tipo Kekuleiano sia a quelle a tipo centrico (Bamberger⁽³⁾, Ciamician-Angeli⁽⁴⁾ ecc.) o a ripartizione periferica della valenza (Steinkopf⁽⁵⁾) qualora non si suppongano gli idrogeni nel piano dell'anello eterociclico. Questo modello in fondo rappresenta l'ordinaria interpretazione chimica con il minimo di ipotesi supplenti. (La complanarità di tutte le masse che porterebbe per il modello pentagonale del tiofene alla simmetria C_{2v} più che in base a discutibili criteri stereochimici può essere oggi sostenuta da considerazioni quantiche ispirate specialmente ai lavori di Hückel⁽⁶⁾ e di Pauling⁽⁷⁾). Già in un lavoro di alcuni anni fa in collaborazione col dott. Manzoni⁽⁸⁾ ho trattato dello spettro Raman del tiofene cercando di raggiungere con i mezzi più semplici e coi minimo di nuove ipotesi sulla simmetria molecolare qualche risultato che permetesse di interpretare gli spettri stessi. Ponemmo allora a base dei nostri ragionamenti un modello del tipo *a*). Questo modello *a*)

(1) Pervenuta all'Accademia il 25 ottobre 1936.

(2) BONINO, questi « Rendiconti », vol. XXIV, ser. 6^a, fasc. 9, p. 288, 1936.

(3) « Ann. », 273, 373 (1893).

(4) « Ber. », 24, 1347 (1891).

(5) « Ann. », 424, 66 (1921).

(6) « Zeits. f. Phys. », 70, 204 (1931).

(7) « Journ. Amer. Chem. Soc. », 53, 1367 (1931).

(8) « Zeits. Phys. Chem. », B. 25, 327 (1934).

avrebbe come elementi di simmetria (oltre come ovvio all'unità E) un piano di simmetria (σ) perpendicolare al piano dell'anello eterociclico e passante per l'etero atomo. Il corrispondente gruppo di simmetria C_s ammette le seguenti rappresentazioni irriducibili ed i seguenti caratteri:

| C_s | E | σ |
|-------|---|----------|
| A' | I | I |
| A'' | I | -I |

Le oscillazioni si distinguono quindi in due tipi: A' simmetriche rispetto al piano σ e A'' antisimmetriche rispetto allo stesso. Ambedue questi tipi sono attive in effetto Raman ed in assorbimento ultrarosso. In effetto Raman le A' sono polarizzate e le A'' depolarizzate. Un facile calcolo ci dice che per la molecola del tiofene secondo il modello a) dovremmo avere 11 oscillazioni semplici del tipo A' e 10 oscillazioni pure semplici di tipo A'', tutte come si è detto attive in Raman ed ultrarosso. Il paragone con i fatti sperimentali potrebbe avvalorare solo fino ad un certo punto questa ipotesi. Infatti non solo permane la difficoltà già precedentemente accennata⁽¹⁾ a proposito della simmetria C_{2v} , ma pure si rileva un fatto contraddittorio dato dall'assenza in assorbimento ultrarosso della riga Raman depolarizzata da noi trovata a 867 cm^{-1} e che potrebbe essere invece spiegata come riferibile ad una oscillazione di tipo A₂ ammettendo la simmetria C_{2v} .

Il modello di tipo b) per la molecola del tiofene è stato proposto da E. Kirchhof⁽²⁾ sulla base di considerazioni derivanti dallo studio termochimico del tiofene e però non ha avuto seguito tra i chimici specialmente per il fatto che non riesce ad un primo esame a prevedere isomeri α e β sostituiti. Oggi tale difficoltà potrebbe trovare anche una soluzione e d'altra parte l'idea di uno zolfo tetravalente nel tiofene potrebbe prestarsi ad una discussione qualitativa in base a considerazione di indole quantomeccanica. Ammessa l'ipotesi piramidale a base quadrata per la molecola del tiofene si vede subito che la simmetria che le competerebbe sarebbe la C_{4v} con un asse quaternario passante per l'atomo di zolfo e perpendicolare al piano dei C-H, due coppie di piani di simmetria contenenti l'asse quaternario e taglienti gli uni (σ') i «lati» del quadrato base e gli altri i «vertici» dello stesso secondo le diagonali. Le operazioni di simmetria del gruppo C_{4v} sono E (operazione identica), $2C_4^{(1)}$ (rotazioni di $\pm \frac{2}{4}\pi$ attorno all'asse quater-

(1) «Ch. Ztg.», 48, n. 28, p. 113 (1924).

(2) Ved. nota (2) prima pagina.

nario), $C_4^{(2)}$ (rotazione di $2 \cdot \frac{2\pi}{4}$ c. s.), $2\sigma_v'$ (riflessione nei due piani σ') $2\sigma_v''$ (riflessioni nei due piani σ''). La tabella delle rappresentazioni irriducibili e dei rispettivi caratteri di questo gruppo è la seguente:

| C_{4v} | E | $2C_4^{(1)}$ | $C_4^{(2)}$ | $2\sigma_v'$ | $2\sigma_v''$ |
|----------------|---|--------------|-------------|--------------|---------------|
| A ₁ | I | I | I | I | I |
| A ₂ | I | I | I | -I | -I |
| B ₁ | I | -I | I | I | -I |
| B ₂ | I | -I | I | -I | I |
| E ₁ | 2 | O | -2 | O | O |

Avremo cioè oscillazioni di 5 tipi diversi: A₁ totalsimmetriche; A₂ simmetriche rispettivamente al C₄; B₁, B₂ antisimmetriche a C₄ e le E₁ doppiamente degeneri. Le A₁ e le E₁ sono attive in ultrarosso, le A₂ sono proibite in effetto Raman, le A₁ sono polarizzate, le B₁, B₂, E₁ depolarizzate, come rilevasi dalla tabella seguente:

*Oscillazioni della molecola del tiofene C₄H₄S secondo un modello b)
a simmetria C_{4v}.*

| Tipi di oscillazioni | Numero di oscillazioni | Effetto Raman | Assorbimento ultrarosso |
|----------------------|------------------------|---------------|-------------------------|
| A ₁ | 4 | polarizzata | attiva |
| A ₂ | 1 | inattiva | inattiva |
| B ₁ | 2 | depolarizzata | inattiva |
| B ₂ | 4 | depolarizzata | inattiva |
| E ₁ | 5 (x 2) | depolarizzata | attiva |
| Totali | 21 | 20 | 14 |

Si avrebbero cioè solo 4 oscillazioni polarizzate in effetto Raman corrispondenti a 4 frequenze di assorbimento ultrarosso e poi 5 frequenze (doppiamente degeneri) depolarizzate in effetto Raman ed attive in ultrarosso. Ora lo spettro Raman del tiofene mostra (come si è visto in un precedente lavoro⁽¹⁾) sicuramente sette e probabilmente otto righe Raman polarizzate

(1) Questi «Rendiconti», vol. XXIV, ser. 6^a, fasc. 7-8, p. 207, 1936.

che sembrano corrispondere anche a massimi di assorbimento ultrarosso (almeno fino ai limiti sperimentalmente accessibili per le misure di Coblenz). Questo risultato sperimentale è in netto contrasto con le esigenze dell'ipotesi svolta. Si può perciò concludere che il modello piramidale della molecola del tiofene proposto da Kirchhoff è in netto contrasto con i fatti sperimentali dedotti dallo studio degli spettri Raman e ultrarossi. Noto d'altra parte che tale modello non riuscirebbe nemmeno a prevedere perchè frequenze attive in ultrarosso possano mancare in effetto Raman.

Ed invero resterebbe ancora da chiarire l'assenza in spettro Raman delle tre frequenze $1590, 1540, 1240 \text{ cm}^{-1}$ che appaiono nello spettro ultrarosso di assorbimento del tiofene. Per il massimo di assorbimento a 1590 cm^{-1} potrebbe pensarsi ad una frequenza di combinazione (per es. $1131 + 452 \text{ cm}^{-1}$, ovvero $749 + 852 \text{ cm}^{-1}$) dato anche che tale frequenza manca non solo nello spettro Raman del tiofene ma pure in quello dei derivati e corrisponde ad un molto debole assorbimento in ultrarosso. Sarebbe più difficile attribuire a frequenze di combinazione la 1540 e la 1240 cm^{-1} dello spettro ultrarosso del tiofene anche perchè queste due frequenze appaiono nettamente nello spettro Raman dell' α -metiltiofene come se la diminuita simmetria molecolare di questo derivato permettesse l'apparire in effetto Raman di tali frequenze, (inattive nello spettro Raman del tiofene non sostituito), eventualmente a causa di speciali caratteristiche di simmetria della sua molecola. In tale ipotesi può essere interessante la discussione del modello tipo c) che presenta un centro di simmetria dato che in presenza di detto centro le oscillazioni simmetriche allo stesso sarebbero attive in spettro Raman ed inattive in ultrarosso mentre le oscillazioni antisimmetriche pur essendo attive in ultrarosso mancherebbero in effetto Raman.

Potremo perciò discutere tale modello piano della molecola del tiofene a simmetria tetragonale con 4C-H complanari posti ai vertici di un quadrato che porta al suo centro l'atomo di zolfo. A parte la possibilità per l'atomo di zolfo di uno stato eccitato tetravalente $3s\ 3p^4\ 3d\ 5D$ il quale (seguendo la trattazione generale di Pauling (vedi nota ⁽²⁾ pag. 1387)) potrebbe con le quattro autofunzioni $3s, 3p_x, 3p_y, 3d_{xy}$ dare uno stato di valenza capace di quattro forti legami giacenti nel piano xy e diretti a 90 gradi uno dall'altro secondo le direzioni del centro ai vertici di un quadrato, si potrebbe avere anche una « coordinazione » dei quattro C-H con uno zolfo centrale seguendo il metodo svolto da Mulliken ⁽¹⁾ impegnando sia il livello fondamentale dello zolfo $3s^2\ 3p^4\ ^3P$ sia alcuni dei livelli eccitati più bassi (esempio $3s^2\ 3p^3\ 4s\ ^1S, 3s^2\ 3p^3\ 4p\ ^3P$). Si considerino a ciò i carboni del tiofene nel cosiddetto stato di quantizzazione trigonale ⁽²⁾ con tre autofunzioni di valenza ibride $2s\ 2p_x\ 2p_y$ con massimi a 120° uno dall'altro

(1) « Phys. Rev. », 43, 279 (1933).

(2) Ved. nota (7) pagina prima di questa nota.

nel piano xy (e di cui una per ciascun atomo « lega » il rispettivo atomo di idrogeno). Si potrebbero allora costruire degli « orbitali » molecolari « leganti » nel piano xy costruendo delle combinazioni lineari con le autofunzioni $2s$, $2p_x$, $2p_y$ dei quattro carboni e con le autofunzioni $3p_x$ e $3p_y$ dello zolfo secondo una delle rappresentazioni irriducibili del gruppo D_4 (asse C_4 coincidente con l'asse delle z). Resterebbe allora un sestetto di autofunzioni p_z dato da quattro funzioni $2p_z$ dei quattro atomi di carbonio e due autofunzioni $3p_z$ dell'atomo di zolfo che non combinano con gli orbitali precedenti (x, y) e colle quali si può costruire un orbitale secondo l'asse delle z . Questo porterebbe alla perturbazione di sei autofunzioni p_z con certe differenze però dalla perturbazione che si verifica per le sei autofunzioni del benzolo; anche per la diversa simmetria. Una tale « coordinazione » dei C-H all'atomo di zolfo potrebbe discutersi più ampiamente qualora un modello piano della molecola del tiofene a simmetria D_{4h} dovesse presentare ulteriore interesse. La difficoltà della apparente mancata previsione di α e β sostituiti non è tale da escludere del tutto, per il tiofene non sostituito, la possibilità di un modello molecolare a simmetria D_{4h} eventualmente in equilibrio con un modello a simmetria C_{2v} .

Gli elementi di simmetria del gruppo D_{4h} sono 16 divisi in dieci classi che sono indicate nella seguente tabella (l'operazione S_4 corrisponde ad una rotazione di $\frac{2\pi}{4}$ e riflessione nel piano σ_h).

TABELLA
delle rappresentazioni irriducibili e dei caratteri per il gruppo D_{4h} .

| D_{4h} | E | $2C_4^{(1)}$ | $C_4^{(2)}$ | $2C'_2$ | $2C''_2$ | i | $2S_4$ | σ_h | $2\sigma'$ | $2\sigma''$ |
|-----------------|---|--------------|-------------|---------|----------|----|--------|------------|------------|-------------|
| A ₁ | I | I | I | I | I | I | I | I | I | I |
| A ₂ | I | I | I | -I | -I | I | I | I | -I | -I |
| B ₁ | I | -I | I | -I | I | I | I | -I | I | -I |
| B ₂ | I | -I | I | I | -I | I | I | -I | -I | I |
| E ₁ | 2 | 0 | -2 | 0 | 0 | 2 | 0 | -2 | 0 | 0 |
| A' ₁ | I | I | I | I | I | -I | -I | -I | -I | -I |
| A' ₂ | I | I | I | -I | -I | -I | -I | -I | I | I |
| B' ₁ | I | -I | I | -I | I | -I | -I | I | -I | I |
| B' ₂ | I | -I | I | I | -I | -I | -I | I | I | -I |
| E' ₁ | 2 | 0 | -2 | 0 | 0 | -2 | 0 | 2 | 0 | 0 |

Analogamente ai casi precedenti si ottengono i numeri di oscillazioni dei diversi tipi nonché le loro regole di selezione:

| Tipo ^ . . . | A ₁ | A ₂ | B ₁ | B ₂ | E ₁ | A' ₁ | A' ₂ | B' ₁ | B' ₂ | E' ₁ | Num. totale |
|------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|
| | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 (x 2) | 0 | 2 | 2 | 2 | 4 (x 2) | 21 |
| Numero . . . | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 (x 2) | 0 | 2 | 2 | 2 | 4 (x 2) | 21 |
| Effetto Raman | pol. | i | — | dep. | dep. | — | i | i | i | i | 6 |
| Ultrarosso . . . | i | i | — | i | i | — | a | i | i | a | 10 |

(pol. = polarizzata; dep. = depolarizzata; a = attiva; i = inattiva).

Si avrebbero cioè cinque frequenze fondamentali (di cui una doppiamente degenera) attive in effetto Raman. Soltanto due oscillazioni corrisponderebbero a righe Raman polarizzate e nessuna delle righe Raman dovrebbe corrispondere a frequenze di assorbimento in ultrarosso. Ciò è in netto contrasto con l'esperienza qualora si volesse attribuire alla molecola del tiofene *soltanto* il modello ora discusso.

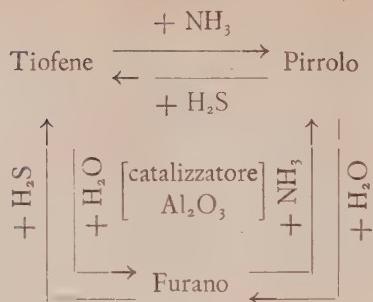
Potrebbe però essere messa in discussione l'ipotesi se accanto ad una forma preponderante di tiofene pentagonale a simmetria C₂, non possa sussistere una seconda forma in proporzioni assai più ridotte a simmetria D_{4h}. Se ciò fosse, dato che alla simmetria D_{4h} corrisponderebbero delle frequenze attive in ultrarosso e proibite in effetto Raman, potrebbero imputarsi a tale forma le due frequenze di assorbimento in ultrarosso dello spettro di Coblenz del tiofene che non corrispondono a righe Raman. L'eventualità di una forma quale quella schematizzata (ad etero-atomo centralmente coordinato) per il tiofene e anche nel caso del pirrolo e del furano non sarebbe in contraddizione p. es. con la possibilità di ottenere pirrolo per distillazione secca dal sale ammonico dell'acido α -furancarbonico⁽¹⁾, tiofene per riscaldamento dello stesso acido con solfuro di bario⁽²⁾, pirrolo per condensazione dell'acetaldeide con NH₃ su Al₂O₃, ecc.⁽³⁾. Anche le recenti esperienze di Juriew⁽⁴⁾ che mostrano la possibilità di trasformare uno nell'altro con semplici reazioni catalitiche i tre suddetti corpi eterociclici secondo lo schema:

(1) SCHWANERT, « Ann. », 116, 278.

(2) PAAL e TAFEL, « Ber. », 18, 457 (1885).

(3) TSCHITSCHIBABIN, « Jour. Russ. Phys. Chem. Ges. », 47, 703 (1915).

(4) « Ber. », 69, 1002 (1936).



possono rendere interessante la prospettata eventualità.

Però prima di tentare una discussione di questo genere stimerei innanzitutto opportuno rivedere con particolare cura lo spettro ultrarosso del tiofene dato da Coblenz mettendo una speciale diligenza non solo nella sua interpretazione teorica ma anche nella discriminazione della purezza delle sostanze esaminate. Invero nel caso dello spettro Raman del pirrolo è recente l'esempio di un nostro rilievo sulla purezza dei prodotti esaminati che ha permesso di chiarire alcune difficoltà prospettate da un lavoro di Stern⁽¹⁾.

Per ora nel caso del tiofene il maggior numero di righe Raman e ultrarosse sono favorevoli ad una simmetria C_{2v} . Resta ancora aperto il problema per una completa discussione alla quale saranno pure utili analoghe indagini per il caso del pirrolo (di cui abbiamo in corso la discussione) e del furano per il quale mancano però ancora gli spettri ultrarossi.

(1) BONINO, « Gazz. Chim. Ital. », 66, 316 (1936).

Chimica (Chimica fisica). — *Esame coi raggi di elettroni di alcuni polimeri vinilici⁽¹⁾.* Nota di G. NATTA e R. RIGAMONTI, presentata⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

L'esame di una serie di polimeri vinilici a peso molecolare compreso tra 50.000 e 600.000 era stato da noi⁽³⁾ da tempo iniziato su un gruppo di composti, forniti gentilmente dal prof. Staudinger, che vivamente ringraziamo. Esso ci aveva dapprima condotti per le lamine lungamente invecchiate allo strano risultato della identità delle distanze reticolari calcolate dai fotogrammi di tali composti, identità che si estendeva anche a sostanze di natura chimica nettamente diversa, quali i derivati della cellulosa. Come abbiamo dimostrato in seguito⁽⁴⁾, tale identità trova la sua ragione nel fatto che i fotogrammi ottenuti non erano che quelli di un sottile strato di grasso, mono o bimolecolare, che ricopre la superficie dei preparati invecchiati negli ambienti dei comuni laboratori. Tali fotogrammi risultano identici per tutti i tipi di grassi, quando si trovino in strati così sottili, perché essi presentano in tale stato un fenomeno interessante, da noi discusso, di isomorfismo bidimensionale⁽⁵⁾.

Abbiamo pertanto ripreso l'esame dei polimeri vinilici operando con le accurate cautele descritte in uno dei sopraccitati lavori, in modo da escludere la presenza, altrimenti inevitabile, di impurità ed ottenere così le linee relative alla sostanza da esaminare. Furono esaminati coi raggi di elettroni i seguenti polimeri: polivinilcloruro, polivinilbromuro, polivinilacetato, polivinilalcool, polistirolo e polidicloroetilene asimmetrico. Di questi i primi quattro fornirono fotogrammi con poche linee, il polistirolo sia fotogrammi con bande che fotogrammi con parecchie linee, il polidicloroetilene invece si è dimostrato nettamente cristallino ed ha fornito fotogrammi ricchi di linee.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale delle R. Università di Pavia e di Roma.

(2) Nella seduta del 15 novembre 1936.

(3) G. NATTA, «Trabajos del IX Congreso Intern. de Química Pura y aplicada», to. II, Madrid, aprile, 1934; G. NATTA, M. BACCAREDDA, «Congresso della Società Italiana Progresso Scienze», Napoli, 11 ottobre 1934; G. NATTA, «Giorn. Chim. Ind. Appl.», 16, 285 (1934).

(4) G. NATTA, M. BACCAREDDA e R. RIGAMONTI, «Gazz. Chim. Ital.», 65, 182 (1935).

(5) G. NATTA, R. RIGAMONTI, «Rend. Acc. Lincei» (6), 22, 242 (1935).

L'esame venne effettuato per trasparenza su lamine sottili a mezzo di elettroni veloci (40-60 KV.). I risultati sono raccolti nelle seguenti tabelle I-VII. Le lamine furono ottenute lasciando evaporare su di uno specchio d'acqua alcune gocce di una soluzione diluitissima in solventi volatili dei polimeri considerati. Per il polivinilalcool i preparati furono ottenuti per evaporazione di lamine liquide di soluzioni acquose diluitissime.

TABELLA I.

Polivinilcloruro.

| Linea | Intensità | Distanza reticolare fotogramma N.: | | | | | | | Media |
|-------|-----------|------------------------------------|------|------|------|------|------|------|-------|
| | | 422 | 374 | 368 | 421 | 403 | 401 | 381 | |
| 1 | ff | 5.08 | 5.15 | 5.12 | 5.15 | 5.12 | 5.30 | 5.15 | 5.15 |
| 2 | f | 3.60 | 3.60 | 3.54 | 3.60 | 3.64 | 3.64 | 3.60 | 3.60 |
| 3 | mf | 2.26 | 2.28 | 2.25 | 2.27 | 2.29 | 2.25 | 2.28 | 2.27 |
| 4 | md | 1.78 | — | — | 1.81 | — | — | 1.82 | 1.80 |
| 5 | d | 1.58 | 1.57 | 1.55 | 1.59 | 1.58 | 1.58 | 1.57 | 1.57 |
| 6 | md | 1.27 | 1.26 | 1.26 | 1.27 | 1.27 | 1.26 | 1.26 | 1.26 |

TABELLA II.

Polivinilbromuro.

| Linea | Intensità | Distanza reticolare fotogramma N.: | | | | Media |
|-------|-----------|------------------------------------|------|------|------|-------|
| | | 393 | 394 | 389 | 387 | |
| 1 | ff | 4.95 | 4.95 | 5.16 | 5.16 | 5.05 |
| 2 | — | — | — | — | 4.26 | 4.26 |
| 3 | f | 3.91 | 3.91 | 3.91 | 3.86 | 3.90 |
| 4 | mf | 2.25 | 2.25 | 2.32 | 2.25 | 2.27 |
| 5 | dd | 1.61 | — | — | — | 1.61 |
| 6 | d | 1.20 | — | — | — | 1.20 |

TABELLA III.

Polivinilalcool.

| Linea | Intensità media | Distanza reticolare fotogramma N.: | | | | |
|-------|-----------------|------------------------------------|------|------|------|------|
| | | 264 | 375 | 376 | 415 | 416 |
| 1 | ff | 4.76 | 4.73 | 4.64 | 4.64 | 4.64 |
| 2 | ff | 4.27 | — | 4.08 | — | 4.13 |
| 3 | d | — | — | — | — | 3.90 |
| 4 | dd | 3.73 | 3.79 | — | — | 3.73 |
| 5 | dd | 3.18 | — | — | — | — |
| 6 | md | 3.00 | — | — | 3.04 | 3.00 |
| 7 | m | 2.81 | — | — | 2.81 | 2.81 |
| 8 | d | 2.54 | — | 2.50 | — | — |
| 9 | dd | 2.42 | — | — | — | — |
| 10 | f | 2.22 | 2.22 | 2.22 | 2.22 | 2.22 |
| 11 | dd | 1.91 | — | — | — | 1.91 |
| 12 | m | 1.84 | — | — | — | 1.84 |
| 13 | d | 1.63 | 1.69 | — | 1.72 | 1.72 |
| 14 | dd | 1.49 | 1.51 | — | 1.52 | — |
| 15 | d | 1.30 | 1.29 | — | — | — |
| 16 | md | 1.26 | — | 1.24 | 1.26 | 1.25 |

TABELLA IV.

Polistirolo: fotogramma tipo A.

| Linea | Intensità | Distanza reticolare fotogramma N.: | | | | | Media |
|-------|-----------|------------------------------------|------|------|------|------|-------|
| | | 1158 | 1155 | 1162 | 1159 | 1164 | |
| 1 | f | 4.52 | 4.52 | 4.63 | 4.43 | 4.64 | 4.55 |
| 2 | m | 2.22 | 2.11 | 2.14 | 2.06 | 2.20 | 2.15 |
| 3 | d | 1.21 | 1.18 | 1.22 | 1.16 | 1.24 | 1.20 |

TABELLA V.

Polistirolo: fotogramma tipo B.

| Linea | Intensità | Distanza reticolare fotogramma N.: | | | | | | | |
|-------|-----------|------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| | | 252 | 426 | 409 | 257 | 424 | 427 | 256 | 411 |
| 1 | f | 5.50 | 5.50 | 5.50 | 5.50 | 5.42 | 5.46 | 5.46 | 5.55 |
| 2 | m | 5.05 | — | — | — | — | 5.15 | — | — |
| 3 | dd | 3.45 | 3.47 | 3.42 | — | — | 3.45 | — | — |
| 4 | dd | 3.19 | — | — | — | — | 3.14 | 3.13 | 3.14 |
| 5 | ff | 2.79 | 2.80 | 2.79 | 2.79 | 2.78 | 2.78 | 2.79 | 2.76 |
| 6 | dd | 2.48 | — | — | — | — | 2.40 | — | 2.39 |
| 7 | ff | 2.26 | 2.28 | 2.27 | 2.27 | 2.26 | 2.26 | 2.27 | 2.24 |
| 8 | dd | 2.11 | — | — | — | — | 2.05 | — | — |
| 9 | d | 1.94 | 1.98 | 1.96 | 1.97 | — | — | — | 1.95 |
| 10 | dd | — | — | — | — | — | 1.89 | — | — |
| 11 | mf | 1.82 | 1.83 | 1.82 | 1.83 | 1.84 | 1.83 | 1.81 | 1.83 |
| 12 | m | 1.71 | 1.73 | 1.73 | 1.72 | 1.71 | 1.72 | 1.72 | 1.71 |
| 13 | md | 1.60 | — | — | 1.63 | — | — | 1.62 | — |
| 14 | f | — | — | — | — | — | 1.57 | 1.57 | 1.59 |
| 15 | md | 1.55 | 1.53 | 1.57 | 1.56 | 1.54 | 1.54 | — | — |
| 16 | d | 1.48 | — | 1.50 | 1.50 | — | — | 1.49 | — |
| 17 | md | 1.35 | 1.37 | 1.37 | 1.37 | 1.36 | 1.36 | 1.37 | 1.35 |
| 18 | dd | — | — | — | — | — | 1.33 | — | — |
| 19 | md | 1.25 | 1.26 | 1.25 | 1.25 | 1.24 | — | 1.25 | 1.24 |
| 20 | d | 1.11 | 1.15 | 1.12 | 1.12 | 1.14 | — | 1.11 | — |
| 21 | d | 1.06 | — | 1.07 | 1.07 | — | — | 1.06 | — |
| 22 | d | 0.99 | — | — | 1.03 | 1.01 | 1.02 | 1.02 | 1.02 |
| 23 | dd | 0.96 | — | 0.95 | — | — | — | — | — |
| 24 | dd | 0.90 | — | — | — | — | 0.91 | — | 0.90 |
| 25 | dd | — | — | 0.84 | — | — | — | — | — |
| 26 | dd | — | — | 0.82 | — | — | — | — | — |
| 27 | dd | 0.74 | — | — | — | — | — | — | — |
| 28 | dd | 0.71 | — | — | — | — | — | — | — |

TABELLA VI.

Polivinilacetato.

| Linea | Intensità | Distanza reticolare fotogramma N.: | | | | | | | | | | Media |
|-------|-----------|------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| | | 246 | 325 | 326 | 286 | 287 | 245 | 244 | 1160 | 1161 | | |
| 1 | dd | 4.58 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 4.58 |
| 2 | f | 4.15 | 4.03 | 4.03 | 3.95 | 3.91 | 4.17 | 3.91 | 4.01 | 3.97 | 4.01 | |
| 3 | dd | 3.72 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 3.72 |
| 4 | m | 2.18 | 2.14 | 2.17 | 2.12 | 2.14 | 2.13 | 2.18 | 2.04 | 2.08 | 2.13 | |
| 5 | d | 1.20 | 1.20 | 1.17 | 1.17 | 1.16 | 1.18 | 1.16 | 1.16 | 1.13 | 1.17 | |

TABELLA VII.

Polidicloroetilene asimmetrico.

| Linea | Intensità | Distanza reticolare fotogramma N.: | | | |
|-------|-----------|------------------------------------|------|------|------|
| | | 854 | 875 | 923 | 916 |
| 1 | ff | 5.88 | 5.62 | 5.66 | 5.63 |
| 2 | dd | 4.08 | 4.11 | 4.24 | 4.13 |
| 3 | f | — | — | — | 3.57 |
| 4 | d | 3.45 | 3.45 | 3.40 | 3.39 |
| 5 | md | 3.12 | 3.11 | 3.10 | 3.08 |
| 6 | mf | 2.83 | 2.81 | 2.82 | 2.78 |
| 7 | m | 2.45 | 2.44 | 2.45 | 2.44 |
| 8 | dd | 2.23 | 2.21 | — | — |
| 9 | d | — | — | — | 2.15 |
| 10 | md | 2.09 | 2.08 | 2.07 | 2.07 |
| 11 | dd | 1.92 | 1.94 | 1.91 | 1.90 |
| 12 | d | 1.73 | 1.71 | 1.73 | 1.69 |
| 13 | d | 1.59 | 1.55 | 1.55 | 1.55 |
| 14 | dd | 1.37 | 1.35 | 1.36 | 1.36 |
| 15 | dd | 1.23 | 1.22 | — | 1.16 |

Una constatazione di carattere affatto generale, fatta nell'esame di tutti questi composti, è che quanto più elevato è il peso molecolare di uno stesso polimero, quanto maggiore è cioè il suo grado di polimerizzazione, tanto più nette risultano le linee dei fotogrammi ottenuti. Così per es. il fotogramma 403 relativo ad un polivinilcloruro difficilmente solubile, e quindi ad alto peso molecolare, presentava delle linee abbastanza nette, mentre il fotogramma 401, di un polivinilcloruro facilmente solubile, e quindi a basso peso molecolare, aveva delle linee molto larghe, tali da potersi considerare quasi delle bande. Analogamente per il polistirolo che presenta in genere delle bande e non delle linee nette; però tali bande erano più strette per i prodotti altomolecolari, come quelli dei fotogrammi 1158 (peso molecolare 650.000), 1155 e 1159 (polistirolo difficilmente solubile) e diventavano sfumate tanto da apparire come semplici aloni per prodotti a relativamente basso peso molecolare.

Tale fatto indica probabilmente una più spiccata tendenza delle catene di questi polimeri ad orientarsi parallelamente le une alle altre, tanto più facilmente quanto maggiore è la loro lunghezza; molecole corte si disporrebbero più caoticamente, come quelle di un liquido. A ciò fa riscontro una maggior elasticità delle fibre e delle pellicole ottenute coi prodotti altomolecolari rispetto a quelle ottenute con gli emicolloidi. Altra causa potrebbe essere la maggior temperatura di fusione degli alti rispetto ai bassi polimeri, che in certi casi si comportano come liquidi ad alta viscosità.

I fotogrammi a linee nette di polistirolo (polistirolo B) furono dati da preparati di stirolo recentemente distillato, forniti dal Dott. Kern, solo in parte lentamente polimerizzati per azione della luce e che dovevano quindi contenere delle molecole lunghissime di polistirolo disciolte in grande volume di stirolo monomero.

Per nessuno dei prodotti esaminati è stato però possibile definire con sicurezza una struttura o per il piccolo numero di interferenze ottenute o per l'impossibilità di ordinare le linee dei fotogrammi sui diagrammi di Hull. Migliori risultati potrebbero forse ottenersi stirando le lame durante l'esame. Notevoli difficoltà si presentano però per tale esame, data la estrema sottigliezza dei preparati necessaria per il loro esame coi raggi E.

In figura sono riprodotti alcuni fotogrammi dei prodotti esaminati: alcuni (ad es. il polistirolo, fotogramma tipo B, il polidicloroetilene asimmetrico) sono ricchi di linee abbastanza nette; per il polidicloroetilene si è anche avuto un fotogramma parzialmente orientato, di cui però non ci è stato possibile decifrare l'ordinamento.

Se pure non si sono potute ordinare le linee dei fotogrammi ottenuti, non di meno le distanze reticolari osservate permettono qualche deduzione interessante. Si nota ad esempio in tutti i fotogrammi, anche in quelli che presentano solo tre aloni, una riflessione corrispondente ad una distanza re-

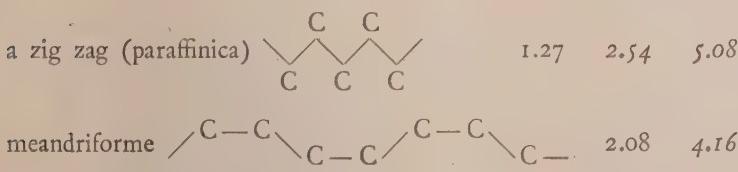
ticolare di circa 2.20 Å (variante da un minimo di 2.13 ad un massimo di 2.27 Å).

Un'altra distanza reticolare comune è quella di 1.20-1.26 Å.

| | | |
|------------------------------|------|------|
| Polivililacetato | 2.13 | 1.17 |
| Polistirolo A | 2.15 | 1.20 |
| Polistirolo B | 2.27 | 1.25 |
| Polivinilalcool | 2.22 | 1.25 |
| Polivinilcloruro | 2.27 | 1.26 |
| Polivinilbromuro | 2.27 | 1.20 |
| Polidicloroetilene | 2.08 | 1.20 |

Tali distanze reticolari potrebbero avere una causa comune indipendente dalla natura del radicale legato alla catena. Riportiamo i valori dei periodi di identità possibili o dei loro sottomultipli più semplici lungo l'asse della catena per un polimero lineare, ammesso l'angolo delle valenze del carbonio di 109°30' e la distanza C-C di 1.55 Å, quali risultano dagli studi più precisi sulla catena paraffinica.

Catene in un piano:



Catena spiraliforme:

| | | | | |
|---------------------|------|------|------|------|
| Trigira | 1.15 | 2.30 | 3.45 | 6.90 |
| Tetragira | 0.90 | 1.80 | 3.60 | |

Solo nel caso che le catene dei polimeri considerati siano disposte nel piano delle pellicole (cosa particolarmente probabile per il polivinilalcool) si può aspettarsi una concordanza tra una delle distanze reticolari trovate sperimentalmente ed un periodo di identità teorico. La riflessione di intensità per lo più media o forte corrispondente a 2.20 Å circa si avvicina di più al dato corrispondente alla catena trigira od alla meandriforme. La distanza reticolare 1.20-1.26 Å si avvicina invece alla proiezione sull'asse della catena della distanza teorica tra due atomi di carbonio consecutivi nella catena a zig-zag paraffinica.

Non si può da questi dati trarre perciò una conclusione decisiva sulla forma della catena dei derivati polivinilici, che potrebbe essere deformata in modo diverso per i diversi tipi di polimeri a seconda delle dimensioni dei gruppi sostituenti. Risultati più conclusivi si potranno forse ottenere dalle ricerche che stiamo per intraprendere coi raggi di elettroni sui polimeri stirati.

L'analisi röntgenografica ha infatti permesso in molti casi (caucciù; guttaperca, derivati della cellulosa) di ottenere risultati più interessanti nell'esame di polimeri stirati. Nel campo dei polimeri vinilici non ci risulta che siano stati esaminati coi raggi X che il polistirolo ed il polivinilalcool. Per quest'ultimo Halle e Hoffmann hanno osservato⁽¹⁾ una distanza reticolare di 2.57 Å che noi non abbiamo riscontrato in modo evidente nei nostri fotogrammi elettronici.

Conclusioni.

Sono state esaminate le interferenze prodotte sui raggi di elettroni da lamine sottili (spessore 10^{-5} cm.) di alcuni polimeri lineari vinilici: polivinilbromuro, polivinilcloruro, polivinilalcool, polivinilacetato, polistirolo, polidichloroetilene.

Per molti di essi sono stati esaminati prodotti a diverso peso molecolare.

I fotogrammi elettronici, che risultano più nitidi di quelli röntgenografici, dimostrano che alcuni polimeri (polistirolo A, polivinilacetato) presentano bande di interferenza analoghe a quelle dei liquidi, che alcuni altri (polistirolo B, polidichloroetilene) forniscono alcune linee di interferenza indicanti una struttura nettamente cristallina, mentre altri ancora (polivinilcloruro, polivinilbromuro, polivinilalcool) presentano fotogrammi intermedi.

In generale i prodotti a relativamente basso peso molecolare, pur essendo solidi, presentano, a differenza di quelli più alti, strutture simili a quelle dei liquidi.

Vengono discusse alcune particolari distanze reticolari comuni a diversi polimeri vinilici.

Chimica. — *Sul dimorfismo del fosforo bianco.* Nota di G. NATTA e L. PASSERINI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

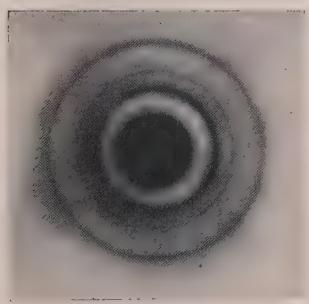
(1) F. HALLE, «Kolloid Zeitschr.», 69, 329 (1934).



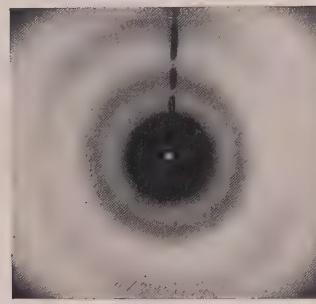
Polistirolo A



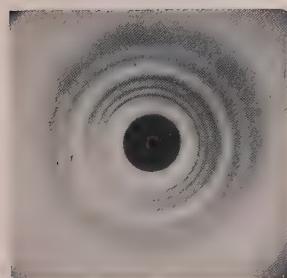
Polistirolo B



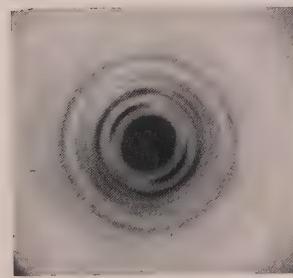
Polivinilalcool



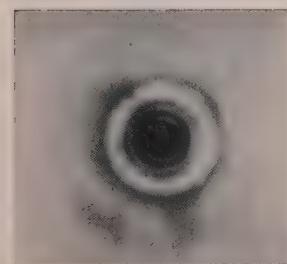
Polivinilacetato



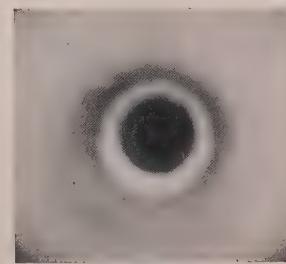
Polidicloroetilene asimmetrico



Polidicloroetilene asimmetrico



Polivinilcloruro



Polivinilbromuro

Chimica (Chimica biologica). — *Relazione tra temperatura e attività del fermento glicogenolitico del fegato degli animali pecilotermi*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di E. TRIA, presentata dal Corrisp. S. Visco.

Per quanto siano state eseguite numerose ricerche sugli enzimi digestivi degli animali pecilotermi, ancora molto dibattuta è la questione se l'*optimum* di temperatura degli enzimi stessi sia più basso che negli animali a sangue caldo, il che si connette strettamente al problema della identità o meno degli enzimi appartenenti alle varie classi animali.

In realtà, tra tutti i numerosi lavori eseguiti, solo pochi resistono ad una critica accurata, perchè molto spesso i ricercatori si sono serviti di metodi non adatti, ed hanno stabilito dei confronti tra determinazioni eseguite con tecniche diverse, senza tenere alcun conto del pH, della concentrazione salina, della durata dell'azione, e di tanti altri fattori i quali modificano notevolmente l'attività enzimatica. Solo così è possibile spiegare le divergenze che esistono su questo argomento tra i vari studiosi.

La maggior parte delle ricerche è stata eseguita sulla pepsina e sulla tripsina. I lavori più recenti sono quello di Pjatnitzkij⁽³⁾, che ha studiato la pepsina di rana, ed ha potuto notare che essa ha un comportamento termico molto simile alla pepsina dei mammiferi, e quello di Korschujew e Koschtojanz⁽⁴⁾, i quali, studiando la tripsina di alcuni animali a sangue freddo, hanno visto che l'*optimum* di temperatura si trova a circa 40° C, che la stabilità termica è meno elevata che negli animali a sangue caldo, e, in fine, che la stabilità termica è più elevata nelle specie di acqua dolce esaminate, che in alcune forme artiche.

Per quanto riguarda l'amilasi, prescindendo dalle antiche ricerche che, per le ragioni suseinte, non possono far testo, non esistono che i lavori di Oya e Harada, di Yio, e di Chesley.

Oya e Harada⁽⁵⁾ hanno studiato l'amilasi dei cechi pilorici di *Seriola*

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia generale della R. Università di Roma e nella Stazione Zoologica di Napoli.

(2) Pervenuta all'Accademia il 20 agosto 1936.

(3) N. P. PJATNIZKIJ, *Zur Kenntnis der Proteasenatur. — VII. Vergleichende Untersuchungen über das Pepsin bei Kalt- und Warmblütern.* «Zeitschr. physiol. Chem.», 194, 43, 1931.

(4) P. KORSCHUJEW et C. KOSCHTOJANZ, *Données sur la physiologie comparée des ferment digestifs. — I. La trypsine des animaux à sang chaud et à sang froid. Optimum et stabilité termiques.* «Zool. Journ.», Moscou, XIII, 71, 1934 (Cit. in «L'Année Biologique», 1936, ser. 3^a, to. XI, fasc. I, 1^{re} partie, p. 30).

(5) T. OYA e K. HARADA, *On amylase in pyloric caeca of Seriola quinqueradiata.* «Journ. Imp. Fish. Inst.», Tokyo, 22, 28, 1926.

quinquiradiata, ed hanno trovato un *optimum* di temperatura che non è più basso che nei mammiferi.

Yio⁽¹⁾, studiando la diastasi secreta dalla ghiandola della schiusa in alcuni plagiostomi, ha potuto notare che tale enzima agisce presso a poco alla stessa maniera sia ad alta che a bassa temperatura.

Chesley⁽²⁾, l'ultimo autore che si è occupato dell'argomento, studiando l'amilasi dei cechi pilorici e del pancreas interdigitato di un pesce, il *Brevortia tyrannus*, ha riscontrato un *optimum* di temperatura più basso che per l'amilasi della saliva umana, e che varia da 40° a 35° col variare della durata della digestione da 10' a 30'. Alle ricerche di Chesley si può obiettare che i risultati ottenuti con l'amilasi salivare umana e con l'amilasi pancreatici di pesce non sono strettamente confrontabili, perchè, anche nello stesso animale, esistono delle differenze tra l'*optimum* di temperatura dell'amilasi salivare e dell'amilasi pancreatici. Ma, a parte questa obiezione, le ricerche di Chesley sono indubbiamente le più complete eseguite finora.

Nessun autore si è occupato, per quanto è a mia conoscenza, dell'amilasi epatica degli animali pecilotermi.

Ho ritenuto utile di intraprendere lo studio dell'argomento, operando su poltiglie di fegato, allo scopo di avvicinarsi il più possibile alle condizioni in cui agisce in natura il fermento glicogenolitico; e, per avere dei dati confrontabili con quelli ottenuti da Visco e Duce⁽³⁾, i quali nel 1929 studiarono l'azione della temperatura sull'amilasi di fegato di cani e di conigli, mi sono servito della stessa tecnica descritta dai due autori e che brevemente riassumo.

Estirpati rapidamente il fegato all'animale in esperimento, lo si è ridotto in poltiglia per mezzo di un tritacarne. Quantità eguali in peso di questa, distribuite in tanti matracci, contenenti ciascuno 10 cc. di soluzione all'1% di NaCl, sono state mantenute in termostato a temperature diverse per 90'. Si è poi proceduto alla deproteinizzazione col metodo di Schenk, e nel liquido deproteinizzato, dal quale si era scacciato completamente l'idrogeno solforato, si è determinato il glucosio col metodo di Issekutz. La quantità di glucosio è stata riferita a 1 gr. di fegato.

Nelle tabelle e nel diagramma annessi sono riferiti i risultati delle mie esperienze.

(1) O. T. YIO, *Sur la nature physiologique de la diastase secrétée par la glande de l'écllosion chez les Plagiostomes ("Scylliorhinus canicula" L. Gill).* « Comp. Rend. Acad. Sc. », Paris, 193, 545, 1931.

(2) L. C. CHESLEY, *The influence of temperature upon the amylases of cold and warm-blooded animals.* « Biol. Bull. », 66, 330, 1934.

(3) S. VISCO e W. DUCE, *Contributo alla conoscenza della attività della amilasi del fegato.* « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », Napoli, 4, 267, 1929.

TABELLA I.
Esperienze con fegato di "Scillium canicula"
 (mgr. di glucosio per grammo di fegato).

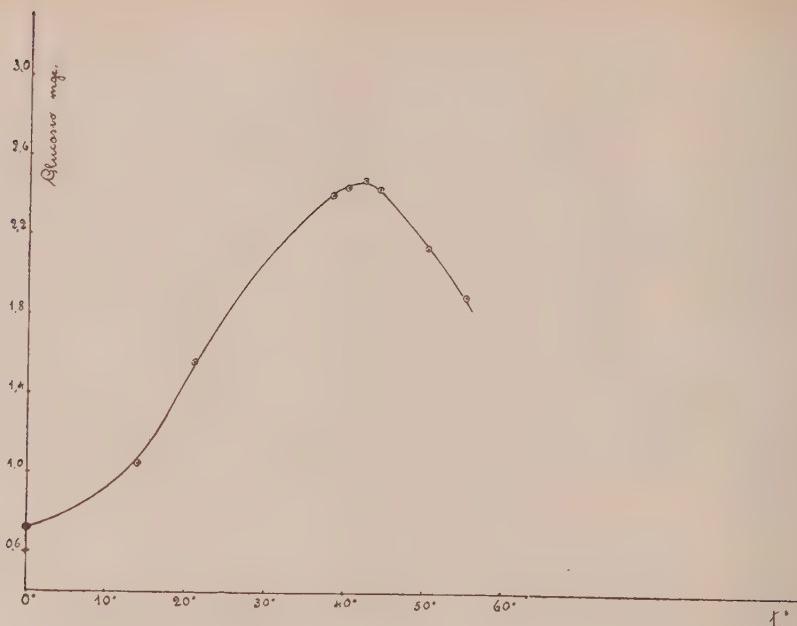
| | 0° | 14° | 21° | 38° | 40° | 42° | 44° | 50° | 55° |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 0,625 | 1,015 | 1,520 | 2,280 | 2,340 | 2,428 | 2,430 | 2,180 | 1,810 |
| 2 | 0,642 | 1,124 | 1,485 | 2,480 | 2,480 | 2,490 | 2,490 | 2,090 | 1,650 |
| 3 | 0,640 | 1,080 | 1,638 | 2,510 | 2,520 | 2,520 | 2,520 | 2,142 | 1,710 |
| 4 | 0,680 | 1,140 | 1,615 | 2,350 | 2,484 | 2,510 | 2,395 | 2,164 | 1,630 |

TABELLA II.
Esperienze con fegato di "Scillium maculatum"
 (mgr. di glucosio per grammo di fegato).

| | 0° | 14° | 21° | 38° | 40° | 42° | 44° | 50° | 55° |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 0,854 | 1,256 | 1,640 | 2,480 | 2,560 | 2,630 | 2,640 | 2,320 | 1,950 |
| 2 | 0,742 | 1,110 | 1,520 | 1,115 | — | — | 2,420 | 2,080 | 1,760 |

TABELLA III.
Esperienze con fegato di "Scorpena Scropha".
 Si sono aggiunti 2 mgr. di glicogeno per grammo di poltiglia di fegato
 (mgr. di glucosio per grammo di fegato).

| | 0° | 14° | 21° | 38° | 40° | 42° | 44° | 50° | 55° |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 0,740 | 1,110 | 1,530 | 2,340 | 2,420 | 2,510 | 2,540 | 2,210 | 2,120 |
| 2 | 1,150 | 1,450 | 1,730 | 2,640 | — | — | 2,920 | 2,430 | 2,350 |
| 3 | 0,960 | 1,320 | 1,640 | 2,530 | — | — | 2,830 | 2,510 | 2,330 |
| 4 | 1,080 | 1,410 | 1,710 | 2,640 | — | — | 2,940 | 2,660 | 2,420 |
| 5 | 0,850 | 1,140 | 1,510 | 1,980 | 2,240 | 2,360 | 2,420 | 1,480 | 1,410 |



Risulta chiaramente che, nelle condizioni sperimentali sopra indicate, esiste per l'amilasi epatica dei pecilotermi da me presi in esame un *optimum* di temperatura tra 42° e 44°.

Se si paragona questo risultato con quelli ottenuti da Visco e Duce, si trova che non esistono notevoli differenze tra il comportamento dell'amilasi epatica degli animali a sangue caldo e di quelli a sangue freddo, salvo che, mentre nei cani la velocità di reazione resta costante da 40° a 50° C., ed è soltanto a partire da questa temperatura che essa comincia a diminuire, nei pecilotermi da me presi in esame, l'enzima si dimostra già meno attivo non appena si superano i 44°, ed a 50° le quantità di glucosio, formate sono alquanto minori. Questo comportamento, del resto, è molto simile a quello trovato per l'amilasi epatica dei conigli dagli autori citati.

Concludendo, a me pare che le lievi differenze tra le amilasi epatiche delle varie specie animali dipendano dalle condizioni diverse nelle quali gli enzimi esplicano la loro azione, e che esse siano, in ogni caso, troppo piccole per poter ammettere che esistano differenze di comportamento di fronte alla temperatura tra l'amilasi epatica degli animali a sangue caldo e quella degli animali a sangue freddo.

N. P.

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 6 dicembre 1936 Anno (XV)

Presidenza del prof. F. MILLOSEVICH

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sul problema di Plateau.* Nota II⁽¹⁾ del Corrisp. L. TONELLI.

§. Esaminiamo la variazione prima di \mathfrak{J}_S sulla S^* . A tale scopo, consideriamo (utilizzando un ragionamento dovuto al Radò) una qualsiasi funzione $\psi(u, v)$ definita in tutto \mathbb{C} e ivi sempre continua insieme con le sue derivate parziali del 1° ordine, e mediante essa costruiamo la trasformazione del piano (u, v) nel piano (α, β)

$$(2) \quad \alpha = u \cos \varepsilon \psi - v \sin \varepsilon \psi, \quad \beta = u \sin \varepsilon \psi + v \cos \varepsilon \psi,$$

dove ε è un parametro. Se ε è in valore assoluto sufficientemente piccolo, e se i piani (u, v) e (α, β) li supponiamo sovrapposti, con gli assi u e α coincidenti, e così pure v e β , le (2) danno una trasformazione biunivoca e continua del cerchio \mathbb{C} in sè stesso, la quale trasforma la circonferenza di \mathbb{C} in sè stessa. Dalle (2) ricaviamo allora

$$(2') \quad u = u(\alpha, \beta, \varepsilon), \quad v = v(\alpha, \beta, \varepsilon),$$

con $u(\alpha, \beta, \varepsilon)$ e $v(\alpha, \beta, \varepsilon)$ funzioni continue con derivate parziali del 1° ordine continue in tutto \mathbb{C} ; e se poniamo $x^*(u(\alpha, \beta, \varepsilon), v(\alpha, \beta, \varepsilon)) \equiv x(\alpha, \beta, \varepsilon)$, $y^*(u(\alpha, \beta, \varepsilon), v(\alpha, \beta, \varepsilon)) \equiv y(\alpha, \beta, \varepsilon)$, $z^*(u(\alpha, \beta, \varepsilon), v(\alpha, \beta, \varepsilon)) \equiv z(\alpha, \beta, \varepsilon)$, queste funzioni di $(\alpha, \beta, \varepsilon)$ risultano continue

(1) Presentata nella seduta del 15 novembre 1936.

in tutto \mathfrak{C} , con derivate parziali del 1° ordine continue nei punti interni a \mathfrak{C} . Le equazioni

$$x = x(\alpha, \beta, \varepsilon) \quad , \quad y = y(\alpha, \beta, \varepsilon) \quad , \quad z = z(\alpha, \beta, \varepsilon) \quad , \quad \alpha^2 + \beta^2 \leq 1,$$

definiscono una superficie, che indicheremo con S_ε , e per $\alpha = \cos \theta$, $\beta = \sin \theta$, danno una rappresentazione analitica della curva Γ .

Mostriamo che, per la superficie S_ε , l'integrale \mathcal{I} (nel quale si considereranno ora come variabili di integrazione α e β) esiste (finito). E, infatti, per la S_ε ,

$$(3) \quad E + G = E^*(u_\alpha^2 + u_\beta^2) + 2F^*(u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta) + G^*(v_\alpha^2 + v_\beta^2),$$

onde, in tutto \mathfrak{C} ,

$$E + G \leq (E^* + G^*) M,$$

con M costante; ed è poi

$$\begin{aligned} I = \mathcal{I}_{S^*} &= \iint_{\mathfrak{C}} (E^* + G^*) du dv = \iint_{\mathfrak{C}} (E^* + G^*) \frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta > \\ &> m \iint_{\mathfrak{C}} (E^* + G^*) d\alpha d\beta, \end{aligned}$$

con m costante > 0 , se ε è sufficientemente piccolo in valore assoluto (perchè per $\varepsilon \rightarrow 0$ è $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)} \rightarrow 1$). Ne segue così

$$\iint_{\mathfrak{C}} (E + G) d\alpha d\beta < \{ MI : m \}.$$

La superficie S_ε , quando si considerino α e β in luogo di u e v , è dunque una superficie della classe K.

Indicato con \mathcal{I}_ε l'integrale \mathcal{I} relativo alla S_ε , si ha che, per $\varepsilon = 0$, la S_ε diventa la S^* ed è $\mathcal{I}_0 = I$; e dovendo essere, per ogni ε sufficientemente piccolo, $\mathcal{I}_\varepsilon \geq I$, la derivata di \mathcal{I}_ε rispetto ad ε dovrà annullarsi per $\varepsilon = 0$.

Per calcolare la derivata di \mathcal{I}_ε facciamo un cambiamento di variabili, passando dalle α e β alle u e v mediante le (2). Otteniamo, tenendo conto della (3), e ponendo $D = \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(u, v)}$,

$$\mathcal{I}_\varepsilon = \iint_{\mathfrak{C}} [E^*(\alpha_v^2 + \beta_v^2) - 2F^*(\alpha_u \alpha_v + \beta_u \beta_v) + G^*(\alpha_u^2 + \beta_u^2)] \frac{du dv}{D}.$$

Derivando qui sotto il segno, si ha

$$(4) \quad \left[\frac{d \mathcal{I}_\epsilon}{d \epsilon} \right]_{\epsilon=0} = \iint_{\mathfrak{C}} \{ [v(E^* - G^*) - 2uF^*]\psi_u + \\ + [u(E^* - G^*) + 2vF^*]\psi_v \} du dv = 0.$$

Ora è, per l'armonicità delle funzioni x^*, y^*, z^* ,

$$\frac{\partial}{\partial u} [v(E^* - G^*) - 2uF^*] + \frac{\partial}{\partial v} [u(E^* - G^*) + 2vF^*] = 0,$$

ed esiste pertanto una funzione $\Omega(u, v)$ continua, nell'interno di \mathfrak{C} , insieme con le sue derivate parziali del 1° ordine, e tale che sia

$$\Omega_v = v(E^* - G^*) - 2uF^*, \quad \Omega_u = -u(E^* - G^*) - 2vF^*.$$

Ω_v e Ω_u ammettono allora le derivate parziali di tutti gli ordini; e risultando $\Omega_{uu} + \Omega_{vv} = 0$, la Ω è armonica nell'interno di \mathfrak{C} . Con questa Ω la (4) si scrive

$$(5) \quad \iint_{\mathfrak{C}} (\Omega_v \psi_u - \Omega_u \psi_v) du dv = 0.$$

Data l'arbitrarietà della ψ , quest'uguaglianza porta che la Ω sia una costante. Infatti, considerato lo sviluppo in serie di Fourier della Ω :

$$\Omega = \frac{1}{2}a_0 + \sum r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

(dove è $u = r \cos \theta$, $v = r \sin \theta$), il quale converge uniformemente rispetto ad r e θ , purchè $r \leq r_1 < 1$, ed è derivabile termine a termine, e prendendo una prima volta $\psi = r^m \cos m\theta$ e un'altra volta $\psi = r^m \sin m\theta$, dalla (5), scritta nella forma

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \iint_{\mathfrak{C}} (\Omega_v \psi_u - \Omega_u \psi_v) du dv = 0,$$

dove \mathfrak{C}_r è il cerchio concentrico a \mathfrak{C} e di raggio $r (< 1)$, si deduce, per $m > 0$, $b_m = 0$, $a_m = 0$. È dunque $\Omega = \text{cost.}$, onde $\Omega_u = \Omega_v = 0$ e perciò $E^* - G^* = 0$, $F^* = 0$, in tutti i punti interni a \mathfrak{C} .

6. Da quanto si è ora provato segue, per un'osservazione del Douglas, che le funzioni $\xi^*(\theta)$, $\eta^*(\theta)$, $\zeta^*(\theta)$ non possono essere tutte costanti su uno stesso arco γ della circonferenza di \mathfrak{C} . Ed infatti, in caso contrario, per il principio di simmetria le funzioni indicate resterebbero analitiche in

tutti i punti di γ (esclusi al più gli estremi) e in essi punti varrebbero ancora le $E^* = G^*$, $F^* = 0$, mentre poi dovrebbe essere, derivando le $\xi^*(\theta)$, $\eta^*(\theta)$, $\zeta^*(\theta)$ e uguagliando a zero,

$$\begin{aligned} -x_u^* \sin \theta + x_v^* \cos \theta &= 0 \quad , \quad -y_u^* \sin \theta + y_v^* \cos \theta = 0 \quad , \\ -\zeta_u^* \sin \theta + \zeta_v^* \cos \theta &= 0 \end{aligned}$$

da cui, quadrando e sommando, $E^* = G^* = 0$, onde $x_u^* = x_v^* = y_u^* = y_v^* = \zeta_u^* = \zeta_v^* = 0$. Perciò le funzioni $x_u^* - ix_v^*$, $y_u^* - iy_v^*$, $\zeta_u^* - i\zeta_v^*$, che sono funzioni analitiche di $w = u + iv$, si annullerebbero su γ , che è un arco interno al loro dominio di regolarità; esse sarebbero pertanto identicamente nulle. Dovrebbe essere dunque, in tutto \mathfrak{C} , $x_u^* = x_v^* = y_u^* = y_v^* = \zeta_u^* = \zeta_v^* = 0$, e le funzioni x^* , y^* , ζ^* sarebbero delle costanti, il che è impossibile, perché le (1) danno una rappresentazione analitica della curva $\Gamma^{(1)}$.

Il fatto qui provato mostra che le (1) pongono una corrispondenza biunivoca (ordinata e continua) fra i punti della circonferenza di \mathfrak{C} e quelli della curva Γ , e con ciò il problema di Dirichlet per tre funzioni è completamente risoluto dalla superficie S^* .

7. *Risoluzione del problema di Plateau.* — Risoluto il problema di Dirichlet per tre funzioni, resta risoluto anche il problema di Plateau, vale a dire resta dimostrato il teorema del Douglas enunciato nel n. 1, sotto però l'ipotesi supplementare che la classe K non sia vuota. È facile vedere che questa ipotesi è verificata se la curva Γ è *rettificabile*; lo è dunque, in particolare, se Γ è un poligono. Ma poichè vi sono delle curve di Jordan, semplici e chiuse, per le quali l'ipotesi detta non risulta verificata, occorre liberarsi da questa ipotesi. Ciò si ottiene considerando la curva Γ come la curva limite di una successione di poligoni semplici e chiusi e applicando il seguente teorema dovuto al Douglas: *Se $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n, \dots$ è una successione di curve di Jordan, semplici e chiuse, tali che per ciascuna di esse esista una superficie S_n soluzione del problema di Plateau per la curva medesima, e che Γ_n converga (nel senso del Fréchet) verso una curva di Jordan, semplice e chiusa, Γ , dalla successione delle S_n se ne può estrarre un'altra convergente verso una soluzione del problema di Plateau per il contorno Γ .*

8. *Osservazione I.* — Tutte le superficie minimanti per \mathcal{J}_S in K sono soluzioni del problema di Plateau per il contorno Γ . Ed infatti, se

$$S_o : x = x_o(u, v), \quad y = y_o(u, v), \quad \zeta = \zeta_o(u, v), \quad u^2 + v^2 \leq 1,$$

è una di queste superficie minimanti, $x_o(u, v)$, $y_o(u, v)$, $\zeta_o(u, v)$ devono essere funzioni armoniche nell'interno di \mathfrak{C} , perché se, per esempio, $x_o(u, v)$

(1) Abbiamo qui riprodotto un ragionamento di T. Radò.

non fosse armonica, la superficie \bar{S}_o che si otterrebbe sostituendo, nella prima delle equazioni della S_o , la $x_o(u, v)$ con la funzione armonica $\bar{x}_o(u, v)$ che assume gli stessi valori della $x_o(u, v)$ sulla circonferenza di \mathcal{C} apparterrebbe anch'essa alla classe K e darebbe

$$\mathcal{J}_{S_o} < \mathcal{J}_{\bar{S}_o},$$

cioè che è impossibile per essere S_o superficie minimante per \mathcal{J}_S . Quanto si è detto nei nn. 5 e 6 mostra allora che S_o è una soluzione del problema di Plateau per il contorno Γ .

9. *Osservazione II.* — Consideriamo la classe H di tutte le superficie S : $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $u^2 + v^2 \leq I$, tali che $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ siano funzioni continue e assolutamente continue in tutto \mathcal{C} , che esista (finito) l'integrale \mathcal{J}_S e che le equazioni $x = x(\cos \theta, \sin \theta)$, $y = y(\cos \theta, \sin \theta)$, $z = z(\cos \theta, \sin \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$,

diano una rappresentazione analitica di una curva di Jordan semplice e chiusa.

Indicato con I_o il minimo limite dei valori dell'integrale \mathcal{J}_S per tutte le possibili successioni di superficie della classe H tali che i loro contorni tendano (nel senso di Fréchet) alla curva Γ — e intendendo che sia $I_o = +\infty$ qualora tale minimo limite non sia finito oppure non esista nessuna successione della specie considerata — ne risulta, se la classe K non è vuota, $I_o \leq I$. Ma se supponiamo $I_o < +\infty$ e nella dimostrazione del n. 4 sostituiamo I con I_o (e facciamo nel ragionamento una piccola evidente modificazione, utilizzando poi una pure evidente generalizzazione del lemma del n. 3), otteniamo, in luogo della superficie S^* , una superficie S_o^* appartenente anch'essa alla classe K e tale che $\mathcal{J}_{S_o^*} \leq I_o$. Ed essendo necessariamente $\mathcal{J}_{S_o^*} \geq I$, ne viene che la classe K non è vuota e che è

$$I_o = I,$$

la quale uguaglianza vale perciò sotto l'ipotesi $I_o < +\infty$ oppure anche sotto l'ipotesi che la classe K non sia vuota.

10. *Osservazione III.* — Se esiste una soluzione S' del problema di Plateau per il contorno Γ la quale abbia la più piccola area fra tutte le superficie, del tipo topologico del disco circolare, limitate dal contorno Γ , anche la superficie S^* gode di questa proprietà. Ed infatti, poiché l'area $A(S')$ della S' è data da

$$\iint_{\mathbb{C}} \sqrt{E' G' - F'^2} du dv = \frac{I}{2} \iint_{\mathbb{C}} (E + G) du dv,$$

si ha

$$A(S') \geq \frac{I}{2} I = \frac{I}{2} J_{S^*}$$

$$= \iint_{\mathbb{C}} \sqrt{E^* G^* - F^{*2}} du dv = A(S^*),$$

e perciò $A(S') = A(S^*)$.

11. *Osservazione IV.* — Indichiamo con j il minimo limite delle aree di tutte le possibili successioni di superficie poliedriche (del tipo topologico del disco circolare) tali che i loro contorni tendano (nel senso del Fréchet) alla curva Γ . Se S è una superficie della classe H si ha (McShane) che la sua area $A(S)$ è data dall'integrale classico, ed è perciò

$$A(S) \leq \frac{I}{2} \iint_{\mathbb{C}} (E + G) du dv.$$

Ne segue $j \leq \frac{I}{2} I_0$. D'altra parte, poichè, per un noto teorema di Schwarz, le superficie poliedriche considerate nella definizione di j si possono rappresentare in modo conformi (in senso generalizzato) su \mathbb{C} , e quindi in modo che la loro area sia data da

$$\frac{I}{2} \iint_{\mathbb{C}} (E + G) du dv,$$

ne viene $\frac{I}{2} I_0 \leq j$. Risulta pertanto

$$j = \frac{I}{2} I_0.$$

Ma se è $I_0 < +\infty$, la classe K non è vuota (n. 9) e si ha

$$A(S^*) = \frac{I}{2} I = \frac{I}{2} I_0 = j.$$

E siccome j non può superare il limite inferiore i delle aree di tutte le superficie S , del tipo topologico del disco circolare, limitate dal contorno Γ , tenendo conto della $A(S^*) \geq i$, si ottiene $A(S^*) = i = j$. Pertanto, se è $j < +\infty$, la superficie S^* ha area finita ed ha la più piccola area fra tutte le superficie, del tipo topologico del disco circolare, limitate dal contorno Γ ; se poi è $j = +\infty$, è pure $i = +\infty$ e non esistono superficie, del detto tipo topologico, limitate dal contorno Γ ed aventi area finita ⁽¹⁾.

(1) La prima soluzione generale del problema della più piccola area limitata da un dato contorno è dovuta al Radò.

Matematica. — *Su la semicontinuità nei problemi di Mayer e di Lagrange.* Nota⁽¹⁾ del Corrisp. L. TONELLI.

B. Manià⁽²⁾ e (successivamente) L. M. Graves⁽³⁾ hanno dato dei teoremi sulla semicontinuità per i problemi di Mayer e di Lagrange. Per un problema di Mayer relativo all'equazione

$$u' = F(x, y, x', y', u) \quad (\text{forma parametrica})$$

oppure all'altra

$$u' = f(x, y, y', u) \quad (\text{forma ordinaria}),$$

la semicontinuità è stabilita dal Manià supponendo la F o la f non crescenti rispetto alla u . Il Graves considera questo stesso caso ed anche l'altro che la F o la f siano non decrescenti, sempre rispetto alla u .

Nella presente Nota mi propongo di dare delle condizioni sufficienti per la semicontinuità nei problemi di Mayer (dalle quali seguono poi condizioni per la semicontinuità nei problemi di Lagrange) che risultino indipendenti dall'ipotesi della monotonia della F o della f rispetto alla u , e che rivestano la stessa generalità di quelle da me stabilite per gli integrali semplici del Calcolo delle Variazioni. E mentre, per ragioni di spazio, sono costretto a rimandare ad altra pubblicazione le dimostrazioni delle proposizioni che qui enuncerò, voglio fin d'ora rilevare che tali dimostrazioni si ottengono integrando opportunamente quelle da me date, per gli integrali semplici in forma parametrica, nei miei *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* (vol. I, pp. 262-275) e, per gli integrali in forma ordinaria, nella mia Memoria: *Sugli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria*⁽⁴⁾ (pp. 407-411).

Aggiungerò pure che i teoremi che qui saranno dati contendono come casi particolari quelli sugli integrali semplici a cui ho già accennato.

(1) Presentata nella seduta del 6 dicembre 1936.

(2) *Esistenza dell'estremo assoluto in un classico problema di Mayer.* «Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa», vol. 2, 1933, pp. 343-354; *Sul problema di Mayer.* «Rend. R. Accad. Lincei», vol. XVIII, 1933, pp. 358-365; *Sui problemi di Lagrange e di Mayer.* «Rend. Circ. Matem. Palermo», vol. 58, 1934, pp. 285-310.

(3) *The existence of an extremum in problems of Mayer.* «Transactions of the Amer. Math. Society», vol. 39, 1936, pp. 456-471.

(4) «Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa», vol. 3, 1934, pp. 401-450.

I PROBLEMI IN FORMA PARAMETRICA.

I. Sia $F(x, y, x', y', u)$ una funzione finita e continua, insieme con le sue derivate parziali del 1° ordine rispetto a x' e y' , per ogni punto (x, y) di un dato campo A, per ogni coppia (x', y') di numeri non ambedue nulli, e per ogni u appartenente ad un dato intervallo Δ . Supporremo, inoltre, che la $F(x, y, x', y', u)$ sia nel dominio ora indicato — che diremo *dominio D* — positivamente omogenea, di grado 1, rispetto a x' e y' , e sempre soddisfacente alla disuguaglianza

$$(1) \quad \frac{F(x, y, x', y', u_1) - F(x, y, x', y', u_2)}{u_1 - u_2} \leq R,$$

con R costante fissa e $u_1 \neq u_2$.

Chiameremo *curva ordinaria*, relativa alla F ed all'elemento iniziale α , appartenente a Δ , ogni curva continua e rettificabile

$$\mathcal{C} : x = x(s), \quad y = y(s), \quad 0 \leq s \leq L,$$

— s essendo la lunghezza dell'arco variabile della \mathcal{C} e L la lunghezza di tutta la curva — appartenente al campo A e tale che l'equazione differenziale

$$u'(s) = F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), u(s))$$

ammetta, in quasi tutto l'intervallo $(0, L)$, una soluzione, assolutamente continua in tutto $(0, L)$ e soddisfacente alla condizione che sia $u(0) = \alpha$ e che i valori di $u(s)$ appartengano tutti a Δ . La soluzione qui indicata dell'equazione sopra scritta sarà rappresentata con $u_{\mathcal{C}, \alpha}(s)$.

Considerata una classe \mathcal{K} di curve ordinarie \mathcal{C} , relative alla F e, ciascuna, ad un proprio elemento iniziale α , diremo che il funzionale $u_{\mathcal{C}, \alpha}(s)$ è, nella classe \mathcal{K} , uniformemente semicontinuo inferiormente su una curva \mathcal{C}_0 , della classe, avente come proprio elemento iniziale α_0 , se, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, è possibile di determinare un $\rho > 0$ in modo che, per ogni curva \mathcal{C} di \mathcal{K} appartenente ordinatamente all'intorno (ρ) della \mathcal{C}_0 , ed avente un elemento iniziale α tale che $|\alpha - \alpha_0| < \rho$, fissata comunque una corrispondenza ordinata $\Omega^{(1)}$ fra i punti di \mathcal{C} e di \mathcal{C}_0 , tale che la distanza fra due punti corrispondenti qualsiasi risulti sempre $\leq \rho$, la differenza tra il valore di $u_{\mathcal{C}, \alpha}$ in un punto qualunque di \mathcal{C} è quello di $u_{\mathcal{C}_0, \alpha_0}$ nel punto corrispondente di \mathcal{C}_0 resti sempre $> -\varepsilon$.

(1) L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, vol. I, p. 72.

2. Dopo queste premesse possiamo enunciare il seguente

TEOREMA I. — Se nel dominio D è sempre $F > 0$ e

$$(2) \quad E(x, y, x', y', \bar{x}', \bar{y}', u) \equiv \\ \equiv F(x, y, \bar{x}', \bar{y}', u) - (\bar{x}' F_x(x, y, x', y', u) + y' F_y(x, y, x', y', u)) \geq 0,$$

per tutte le coppie (\bar{x}', \bar{y}') di numeri non ambedue nulli, il funzionale $u_{C_0, \alpha}$ è, nella classe \mathcal{K} , uniformemente semicontinuo inferiormente su ogni elemento della classe medesima⁽¹⁾.

TEOREMA II. — Se nel dominio D vale sempre la (2), e se, di più, per x, y, x', y', u fissi, in (2) il segno = non vale mai per tutte le coppie (\bar{x}', \bar{y}') di numeri non ambedue nulli, la conclusione del teorema I è ancora valida.

TEOREMA III. — Se nel dominio D vale sempre la (2); se $C_0[x = x_0(s), y = y_0(s), (0, L_0)]$ è una curva ordinaria della classe \mathcal{K} , con elemento iniziale α_0 ; se, per ogni s^* di $(0, L_0)$ tale che nella disuguaglianza

$$E(x_0(s^*), y_0(s^*), x', y', \bar{x}', \bar{y}', u_{C_0, \alpha_0}(s^*)) \geq 0$$

valga sempre il segno = per tutte le possibili coppie $(x', y'), (\bar{x}', \bar{y}')$ di numeri non ambedue nulli, si ha che $F(x, y, x', y', u) \geq 0$ in tutti i punti (x, y) di un intorno di $(x_0(s^*), y_0(s^*))$, per tutti i valori di u di un intorno di $u_{C_0, \alpha_0}(s^*)$ e per tutte le coppie (x', y') di numeri non ambedue nulli; il funzionale $u_{C_0, \alpha}$ è, nella classe \mathcal{K} , uniformemente semicontinuo inferiormente sulla curva C_0 di elemento iniziale α_0 .

Come corollario del teorema III, si ha:

Se nel dominio D è sempre $F \geq 0$, e sempre vale la (2), la conclusione del teorema I è ancora valida.

3. Le precedenti proposizioni si estendono al caso in cui la F dipende, oltre che dalle variabili x, y, x', y', u , anche da un'altra variabile (o da più altre variabili) v , in cui cioè si ha $F(x, y, x', y', v, u)$, con v variabile in un dato intervallo Δ_v , e in modo che, in tutto il dominio D' costituito dai punti (x, y, x', y', v, u) tali che (x, y, x', y', u) sia in D e v in Δ_v , la F risulti finita e continua, insieme con le sue derivate parziali del 1° ordine rispetto a x' e y' , e positivamente omogenea, di grado 1, rispetto a queste variabili x', y' , e di più verifichi sempre la (1) e sia funzione non decrescente nella v .

A tale scopo, si considereranno le curve continue e rettificabili $C[x = x(s); y = y(s), 0 \leq s \leq L]$ appartenenti al campo A e tali che

(1) Questo teorema si applica, ad esempio, al problema di Mayer nel quale si traduce il problema di navigazione di Zermelo (ved. B. MANIA, *Sopra un problema di navigazione di Zermelo*. «Rend. R. Accad. dei Lincei», vol. XXIII, 1936, pp. 292-295) e serve pertanto a stabilire rapidamente l'esistenza dell'estremo assoluto in tale problema.

per esse: 1° risulti definito un funzionale $v_{\mathcal{C}, \beta}(s)$ che sia, come funzione di s , assolutamente continuo in tutto $(0, L)$, che verifichi la condizione $v_{\mathcal{C}, \beta}(0) = \beta$ (vale a dire che abbia come valore iniziale il numero β dell'intervallo Δ_v) e che abbia valori sempre appartenenti a Δ_v ; 2° l'equazione differenziale $u'(s) = F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), v_{\mathcal{C}, \beta}(s), u(s))$ ammetta in quasi tutto $(0, L)$ una soluzione, che sia assolutamente continua in tutto $(0, L)$, che verifichi la condizione $u(0) = \alpha$ ed anche l'altra che tutti i valori di $u(s)$ appartengano a Δ . Le curve qui considerate si diranno *curve ordinarie* relative alla F ed agli elementi iniziali β e α ; e la soluzione dell'equazione sopra scritta sarà rappresentata con $u_{\mathcal{C}, \beta, \alpha}(s)$.

Considerata una classe \mathcal{K} di curve ordinarie \mathcal{C} relative alla F e ciascuna ai propri elementi iniziali β e α , si ha, analogamente al teorema I:

Se nel dominio D' è sempre $F > 0$ e

$$E(x, \dot{y}, x', y', \bar{x}', \bar{y}', v, u) \equiv \\ = F(x, y, \bar{x}', \bar{y}', v, u) - \{x' F_x(x, y, x', y', v, u) + \bar{y}' F_y(x, y, x', y', v, u)\} \geqslant 0$$

per tutte le coppie (\bar{x}', \bar{y}') di numeri non ambedue nulli, e se nella classe \mathcal{K} il funzionale $v_{\mathcal{C}, \beta}$ è uniformemente semicontinuo inferiormente su ogni curva \mathcal{C} della classe (la semicontinuità essendo intesa rispetto alla curva ed all'elemento iniziale β) anche il funzionale $u_{\mathcal{C}, \beta, \alpha}$ risulta in \mathcal{K} uniformemente semicontinuo inferiormente su ogni elemento della classe (la semicontinuità essendo intesa rispetto alla curva ed agli elementi iniziali β e α).

Valgono anche proposizioni analoghe alle altre del n. 2.

Se la $F(x, y, x', y', v, u)$ è indipendente dalla u , tutte le proposizioni qui indicate danno altrettanti teoremi relativi al problema di Lagrange.

I PROBLEMI IN FORMA ORDINARIA.

4. Sia ora $f(x, y, y', u)$ una funzione finita e continua, insieme con la sua derivata parziale f_y , per ogni punto (x, y) di un dato campo A, per ogni y' finito, e per ogni u appartenente ad un dato intervallo Δ . Supporremo, inoltre, che la f , nel dominio D_1 ora indicato, soddisfi sempre alla diseguaglianza

$$(3) \quad \frac{f(x, y, y', u_1) - f(x, y, y', u_2)}{u_1 - u_2} \leq R \{ 1 + |y'| + |f(x, y, y', u_2)| \},$$

con R costante fissa, e $u_1 \leq u_2$.

Chiameremo *curva ordinaria*, relativa alla f ed all'elemento iniziale α , appartenente a Δ , ogni curva assolutamente continua

$$C : y = y(x), \quad a \leq x \leq b,$$

— dove $y(x)$ è funzione assolutamente continua in tutto l'intervallo (a, b) — appartenente al campo A e tale che l'equazione differenziale

$$u'(x) = f(x, y(x), y'(x), u(x))$$

ammetta in quasi tutto (a, b) una soluzione, che sia assolutamente continua in tutto (a, b) e soddisfi alla condizione che sia $u(a) = \alpha$ e che i valori di $u(x)$ appartengano tutti a Δ . La soluzione qui indicata dell'equazione soprascritta sarà rappresentata con $u_{C, \alpha}(x)$.

Considerata una classe K di curve ordinarie C, relative alla f e ciascuna ad un proprio elemento iniziale α , diremo che il funzionale $u_{C, \alpha}(x)$ è, nella classe K, uniformemente semicontinuo inferiormente su una curva C_0 , della classe, avente come proprio elemento iniziale α_0 , se, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, è possibile di determinare un $\rho > 0$ in modo che, per ogni curva C di K, appartenente propriamente all'intorno (ρ) della C_0 ed avente un elemento iniziale α tale che $|\alpha - \alpha_0| < \rho$, si abbia $u_{C, \alpha}(x) > u_{C_0, \alpha_0}(x) - \varepsilon$ in tutti i punti x comuni ai due intervalli (a, b) e (a_0, b_0) sui quali sono definite le C e C_0 , $u_{C, \alpha}(x) > u_{C_0, \alpha_0}(a_0) - \varepsilon$ negli eventuali punti di (a, b) in cui sia $x < a_0$, e $u_{C, \alpha}(x) > u_{C_0, \alpha_0}(b_0) - \varepsilon$ negli eventuali punti di (a, b) in cui sia $x > b_0$.

Per ogni curva C della classe K (di elemento iniziale α) risulta integrabile in (a, b) la funzione $f(x, y(x), y'(x), u_{C, \alpha}(x))$, e si può osservare che, in virtù della (3) e della (4) che daremo più sotto, per ogni funzione $t(x)$, assolutamente continua in (a, b) e tale che sia sempre $u_{C, \alpha}(x) \leq t(x)$ e che $t(x)$ appartenga sempre a Δ , risulta integrabile in (a, b) anche $f(x, y(x), y'(x), t(x))$.

5. Ciò posto, valgono le proposizioni che seguono.

TEOREMA IV. — Se nel dominio D_1 è, per tutti gli \bar{y} ,

$$(4) \quad E(x, y, y', \bar{y}', u) \equiv f(x, y, \bar{y}', u) - \\ - \{f(x, y, y', u) + (\bar{y}' - y') f_y(x, y, y', u)\} \equiv 0$$

purchè, per x, y, y', u fissi, il segno = non valga mai per tutti gli \bar{y}' , il funzionale $u_{C, \alpha}$ è, nella classe K, uniformemente semicontinuo inferiormente su ogni elemento della classe medesima.

TEOREMA V. — Se nel dominio D_1 vale sempre la (4) senza restrizioni; se $C_0[y = y_0(x); a_0 \leq x \leq b_0]$ è una curva ordinaria della classe K, con elemento iniziale α_0 ; se, per ogni x^* di (a_0, b_0) tale che nella

$$E(x^*, y_0(x^*), y', \bar{y}', u_{C_0, \alpha_0}(x^*)) \equiv 0$$

valga il segno = per tutti i possibili valori di y' e \bar{y}' , si ha $f(x^, y_0(x^*), y', u_{C_0, \alpha_0}(x^*)) = 0$ e $f(x, y, y', u) \equiv 0$ per tutti punti (x, y) di un intorno*

di $(x^*, y_0(x^*))$, per tutti gli y' e per tutti i valori di u di un intorno di $u_{C_0, \alpha_0}(x^*)$; il funzionale $u_{C, \alpha}$ è, nella classe K , uniformemente semicontinuo inferiormente sulla curva C_0 , di elemento iniziale α_0 .

Come corollario, dal teorema V segue:

Se nel dominio D_1 è sempre $f \geq 0$ e sempre vale la (4), senza restrizioni, e se per ogni (x, y, u) vi è un \bar{y}' (dipendente da (x, y, u)) tale che $f(x, y, \bar{y}', u) = 0$, la conclusione del teorema IV è ancora valida.

6. Analogamente a quanto si è detto nel n. 3, abbiamo che le proposizioni del n. 5 si estendono al caso in cui la f dipende, oltre che dalle variabili x, y, y', u , anche da un'altra variabile (o da più altre variabili) v , in cui cioè si ha $f(x, y, y', v, u)$, con v variabile in un dato intervallo Δ_v e in modo che, in tutto il dominio D'_1 costituito dai punti (x, y, y', v, u) tali che (x, y, y', v) sia in D_1 e v in Δ_v , la f risulti finita e continua insieme con la derivata parziale f'_v , verifichi la (3) e sia funzione di v sempre non decrescente.

Adottando definizioni analoghe a quelle del n. 3, qui si osserverà che, considerata una classe K di curve ordinarie C , in virtù delle (3) e (4), per ogni curva C di K (di elementi iniziali β e α)⁽¹⁾, risulta integrabile in (a, b) la funzione $f(x, y(x), y'(x), \tau(x), t(x))$ per tutte le funzioni assolutamente continue $\tau(x)$ e $t(x)$ tali che i loro valori appartengano sempre rispettivamente a Δ_v e Δ , e che sempre sia

$$\tau(x) \leq v_{C, \beta}(x) \quad , \quad u_{C, \beta, \alpha}(x) \leq t(x) .$$

Meccanica. — *Sulla « certezza statistica » di colpire nel duello aeronavale.*
Nota del Socio G. A. CROCCO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Per la C è senz'altro integrabile, in (a, b) , la funzione $f(x, \gamma(x), \gamma'(x), v_{C, \beta}(x), u_{C, \beta, \alpha}(x))$.

Fisica. — *Un metodo di taratura del microfono elettrostatico fondato sul suo comportamento rispetto a una forza elettromotrice alternata.* Nota⁽¹⁾ del Socio O. M. CORBINO.

Tra i meccanismi capaci di trasformare fedelmente la pressione oscillante del suono in forza elettromotrice alternativa il microfono elettrostatico è ritenuto il più adatto, anche per le possibilità che esso presenta di essere tarato alle varie frequenze con metodi puramente elettrici, senza cioè ricorrere ai difficili e dubbi metodi di misura diretta della pressione sonora.

Il poter constatare che il microfono risponde più o meno egualmente alle varie frequenze è molto importante a causa della necessità in cui spesso ci si trova di dover cambiare la membrana vibrante o di doverne modificare le condizioni meccaniche di funzionamento. Ma i metodi elettrostatici di taratura ora in uso non sono esenti da difficoltà e da dubbi; particolarmente quello più semplice fondato sull'impiego del microfono condensatore, sottoposto a una f. e. m. di audio-frequenza, come capacità variabile in un oscillatore a radio-frequenza.

Nel presente lavoro viene esposto un nuovo metodo di taratura che elimina l'intervento delicato delle radiofrequenze e utilizza una nuova caratteristica di funzionamento del microfono condensatore percorso da correnti alternate. È cioè per effetto della attrazione alternativa fra la placca e la membrana questa vibra con frequenza doppia di quella della tensione applicata: ne conseguono dei mutamenti periodici di capacità che fanno sorgere nel circuito una componente armonica della corrente di frequenza tripla della tensione primaria. Questa terza armonica, che è facilmente isolabile in un ponte opportunamente disposto, è in relazione semplice con l'ampiezza assoluta delle vibrazioni della membrana. Si può pertanto determinare sperimentalmente la relazione fra la frequenza della forza meccanica eccitatrice e l'ampiezza vibratoria corrispondente della membrana; si può ottenere cioè la curva di taratura assoluta o relativa del microfono alle varie frequenze.

Si consideri il circuito della fig. 1, dove M denota il microfono condensatore di capacità normale c_0 ; S una sorgente di f. e. m. sinusoidale di pulsazione ω e ampiezza E ; e sono inoltre contenute una resistenza r , una self L e un'altra capacità γ .

Ai poli del microfono si avrà una tensione alternativa E_c che determinerà una vibrazione della membrana; poichè il terzo armonico generato

(1) Presentata nella seduta del 6 dicembre 1936.

è, come vedremo, d'ampiezza piccolissima (dell'ordine di 1 su diecimila rispetto al fondamentale) si può ritenere che le vibrazioni della membrana sono sostanzialmente determinate dalla componente fondamentale in ω di E_c ; e che perciò, essendo la forza meccanica applicata proporzionale a E_c^2 , essa produrrà una vibrazione di pulsazione 2ω risultandone una variazione periodica di capacità con ampiezza a . Potremo perciò scrivere

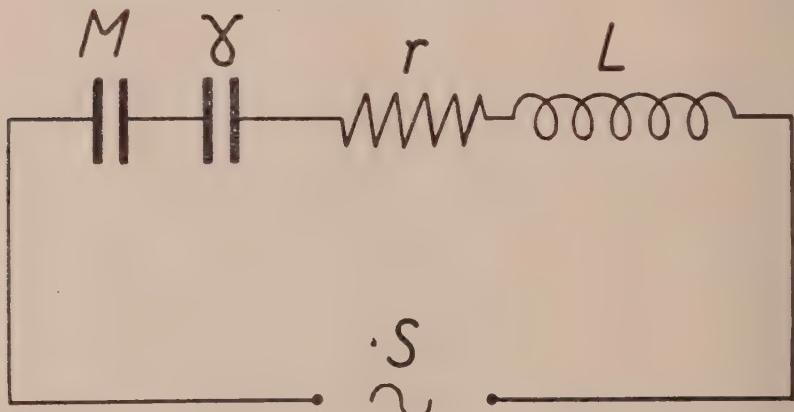


Fig. 1.

che la capacità del condensatore è espressa da

$$c = c_0 + a \sin(2\omega t + \varphi)$$

dove φ sta a indicare lo spostamento di fase rispetto a E .

Posto ciò, l'equazione che regge la corrente i nel circuito sarà

$$\frac{\int idt}{c_0 + a \sin(2\omega t + \varphi)} + \frac{\int idt}{\Upsilon} + ri + L \frac{di}{dt} = E \sin \omega t$$

o anche, data la piccolezza di $\frac{a}{c_0}$ rispetto a 1,

$$\left(\frac{1}{c_0} + \frac{1}{\Upsilon} \right) \int idt - \frac{a}{c_0} \frac{1}{c_0} \sin(2\omega t + \varphi) \int idt + ri + L \frac{di}{dt} = E \sin \omega t.$$

Nel secondo termine, per la piccolezza di $\frac{a}{c_0}$, si può ritenere che i è costituito solo dalla sua componente fondamentale in ω :

$$i_1 = I_1 \sin(\omega t - \alpha).$$

Si ottiene così

$$\left(\frac{I}{c_o} + \frac{I}{\gamma} \right) \int idt + \frac{a}{c_o} \frac{I_s}{c_o \omega} \sin(2\omega t + \varphi) \cos(\omega t - \alpha) + \\ + ri + L \frac{di}{dt} = E \sin \omega t.$$

e poiché

$$\frac{I_s}{c_o \omega} = E_c$$

dove E_c è la parte principale della tensione applicata al microfono, sarà

$$\left(\frac{I}{c_o} + \frac{I}{\gamma} \right) \int idt + ri + L \frac{di}{dt} = E \sin \omega t - \\ - \frac{a}{c_o} E_c \sin(2\omega t + \varphi) \cos(\omega t - \alpha).$$

Cioè la corrente nel circuito è quella che spetta alla tensione $E \sin \omega t$:
cui si aggiunge però una tensione apparente data dal 2° termine del
2° membro.

Quest'ultimo contiene il prodotto di $\sin(2\omega t + \varphi)$ per $\cos(\omega t - \alpha)$,
che si scinde in una componente di pulsazione ω , pari alla principale, e in
una di pulsazione 3ω . L'ampiezza di quest'ultima è data da

$$E_3 = \frac{I}{2} \frac{a}{c_o} E_c.$$

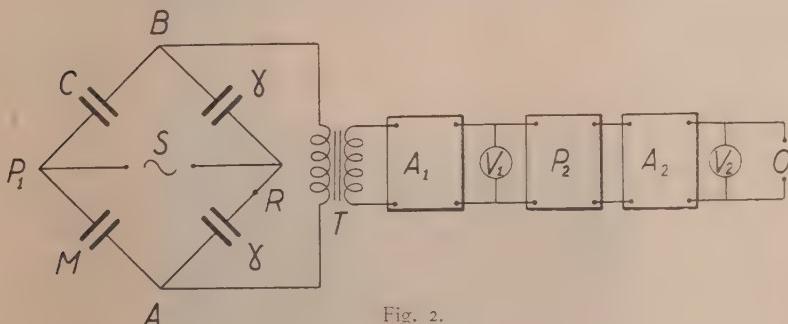


Fig. 2.

Cioè nel circuito sorge una terza armonica di corrente di ampiezza pari
a quella che si trrebbe generata da una f. e. m. $\frac{I}{2} \frac{a}{c_o} E_c$. La misura di questa
ampiezza darà, conoscendosi già E_c , il valore di $\frac{a}{c_o}$, e quindi l'ampiezza

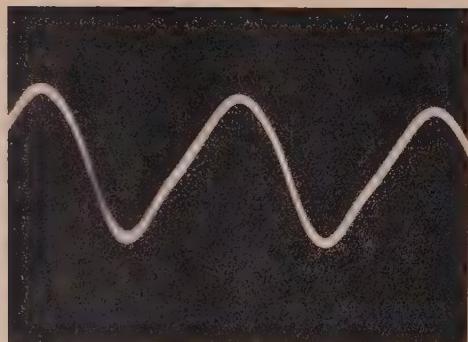


Fig. *a.*

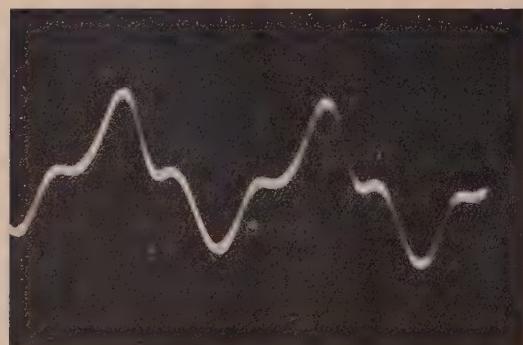


Fig. *b.*

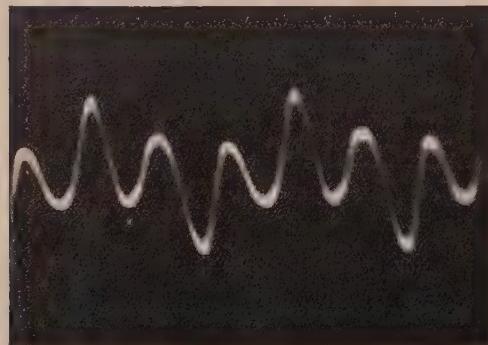


Fig. *c.*

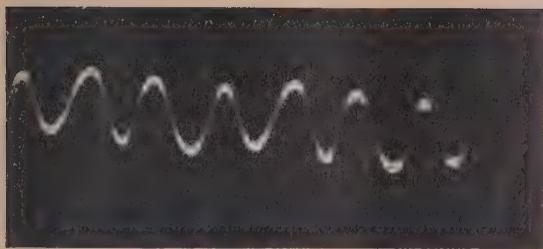


Fig. d.



Fig. e.

di vibrazione della membrana. Tutto si riduce pertanto a isolare questo 3° armonico da tutte le altre componenti in ω ; assicurandosi naturalmente che non entri in gioco un terzo armonico eventualmente preesistente nella f. e. m. eccitatrice E.

Per ottenere tale isolamento, e verificare le previsioni della teoria, fu adottata la disposizione della fig. 2. In essa P_1 è un ponte di capacità, alimentato dal generatore ad audiofrequenza S; M è il microfono, C una capacità variabile di compensazione per l'equilibrio nel ponte, γ e γ due capacità eguali, circa quadruple di M. Dai vertici A, B di equilibrio del ponte P_1 , si va, per mezzo di un trasformatore T, a un primo amplificatore A_1 ; poi a un ponte misuratore di audiofrequenze P_2 , che, come è noto, per ogni posizione del cerchio misuratore estingue una tensione di corrispondente frequenza; segue un secondo amplificatore A_2 e infine un voltmetro V_2 e un oscillografo a raggi catodici.

Il voltmetro V_1 inserito agli estremi del primo amplificatore serve a constatare il raggiunto equilibrio nel ponte P_1 col variare di C. Ottenuto per quanto è possibile l'annullamento della tensione in V_1 , la presenza del ponte P_2 , disposto per estinguere la tensione di pulsazione ω , serve a eliminare qualunque traccia residua di essa tensione derivante da imperfetto equilibrio del ponte. La tensione che rimane all'uscita di P_2 è praticamente costituita dal solo terzo armonico, che amplificato ulteriormente in A_2 , viene rivelato all'oscillografo.

Le fotografie *a*, *b*, *c*, *d* riproducono: *a*, la tensione osservata all'oscillografo quando si è molto lontani dall'equilibrio nel ponte, e predomina perciò la componente fondamentale, non soppressa dal ponte P_2 che è messo ancora fuori posto; seguono *b* e *c* che rivelano la crescente proporzionalità del 3° armonico a misura che si va annullando il fondamentale; e infine *d* che rappresenta il 3° armonico quasi completamente isolato. La fotografia *e* dà la composizione ortogonale di tale terzo armonico isolato (verticale) col fondamentale (orizzontale). Come si riconosce è possibile non solo mettere in evidenza e misurare l'ampiezza del 3° armonico ma anche rivelarne la fase rispetto alla tensione eccitatrice, quando si tenga conto opportunamente degli spostamenti di fase originati nelle amplificazioni successive.

Verificato che le cose si svolgono come la teoria prevede, sono stati elaborati, dopo una serie di prove, diverse disposizioni di misura adattabili ai mezzi e agli apparecchi di cui si può disporre per le misure medesime. Esse saranno esposte in dettaglio in una Memoria che sarà pubblicata in altra sede.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Polinomi definiti. — I. Problemi fondamentali.* Nota di C. BARBA, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. V. NOBILE.

PREMESSE. — Il problema dei polinomi definiti (meglio dei polinomi non indefiniti) negli ultimi tempi è stato trattato, fra gli autori italiani, principalmente dal Cherubino e dal Colucci, con indirizzi differenti: il primo si riattacca alla teoria delle forme quadratiche, collegando ogni polinomio ad una classe di tali forme; il secondo, con basi di partenza in trasformazioni funzionali.

È possibile unificare i due punti di vista e noi, in questo primo lavoro, tratteremo essenzialmente di una teoria unitaria di detti polinomi, riservando in altro la subordinazione, con tal nostro punto di vista, dei legami con la teoria delle forme quadratiche. Oltre, naturalmente, a condizioni nuove, si ritrovano, in modo coordinato e sistematico i risultati del Colucci, della Serra-Caracciolo ed altri.

Il problema dei polinomi definiti à duplice aspetto: da un lato, si possono prendere in esame le radici, ottenendo, nello spazio rappresentativo di queste, regioni limitate da condizioni lineari, quali regioni nelle quali si trovano punti rappresentativi di polinomi definiti o non indefiniti; viene a

(1) Nella seduta del 6 dicembre 1936.

mancare però, la linearità nel senso che alla somma dei due polinomi non corrisponde un punto che si possa dedurre in modo semplice e lineare da quelli rappresentativi dei due dati.

D'altro canto, si può considerare il polinomio a partire dai suoi coefficienti ed allora le cose si invertono. Riesce agevole, cioè, rappresentare il polinomio somma di altri due, ma la regione dei polinomi non indefiniti non risulta più limitata da enti lineari, bensì da enti curvi.

Si abbia il polinomio di grado n :

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \quad (a^n = 1)$$

Esso resta individuato in corrispondenza ad ogni n -pla di valori reali dei coefficienti, com'anche in corrispondenza ad una n -pla di valori complessi costituenti le radici. Ovviamente, la prima caratterizzazione implica la seconda ed inversamente.

Nel primo caso noi veniamo a considerare lo spazio ad n dimensioni C_n in cui il punto P_i sarà l'immagine del polinomio di coefficienti a_i , nel secondo caso lo spazio è quella a $2n$ dimensioni R_{2n} , ogni coppia essendo ordinata in modo da dar luogo ad una radice complessa.

Naturalmente esiste una corrispondenza puntuale tra C_n e R_{2n} , attraverso le formole di Newton-Girard.

Il problema fondamentale che qui si pone è nel caratterizzare in R_{2n} o in C_n le regioni cui corrispondono polinomi *non indefiniti* – dicendo tali quei polinomi che sono non indefiniti su TUTTO l'asse reale, potendo sempre, con opportune trasformazioni ricondurci a tal caso ove ci trovassimo di fronte a polinomi non indefiniti solo su un segmento dell'asse reale.

In quanto alla porzione di R_{2n} occupata da punti rappresentativi di polinomi non indefiniti, osserviamo subito che *tutto lo spazio* R_{2n} non può essere invaso da tali punti in quanto, dovendo considerare polinomi a coefficienti reali, le radici saranno o reali o complesse coniugate.

Inoltre, un polinomio è indipendente dall'ordine delle sue radici di definizione, eppero, agli effetti dello spazio R_{2n} , è da distinguere:

a) o si considerano *non* distinti i punti di cui le coordinate si ottengono per permutazioni delle coppie [di coordinate legate dalla condizione di rappresentare una radice complessa del polinomio].

b) o si considerano distinti tali punti, salvo a prendere in esame soltanto il *campo fondamentale* che con quelle permutazioni ricopre la regione in esame.

Siamo $\alpha_r + i\beta_r$ le radici del polinomio.

La condizione necessaria e sufficiente affinchè un punto rappresenti un polinomio DEFINITO è data ovviamente dall'essere tutte le radici complesse coniugate: quindi, nello spazio R_{2n} , i punti corrispondenti a polinomi definiti sono quelli le cui coordinate, a due a due, hanno eguali α , ed opposte β .

Cioè: $\alpha_i = \alpha_j$, $\alpha_h = \alpha_k$, ... e $\beta_i = -\beta_j$, $\beta_h = \beta_k$, ... Ora, ognuna di QUESTE condizioni stacca una varietà lineare a $2n-1$ dimensioni da R_{2n} [questo è ad n dimensioni, il legare con una relazione le coordinate riduce di una unità il numero delle dimensioni, quindi in sostanza, bisognerebbe dire che "ognuna di queste relazioni caratterizza una varietà V_{2n-1} immersa nella prima R_{2n}]: Ne segue che, complessivamente le condizioni già imposte subordinano, in R_{2n} , una varietà V_n ad n dimensioni, in GENERALE [chè tante di quelle n condizioni potrebbero non essere distinte] ottenuta come intersezione di tante varietà lineari ad $2n-1$ dimensioni. Ne risulta, così, una varietà a tipo poliedrico.

Se invece di polinomi definiti si tratta di quelli semidefiniti, allora, ovviamente, VI DEVONO ESSERE radici REALI, ma tali radici reali devonsi presentare a coppie onde formare con ogni coppia un quadrato da risultare FATTORE del polinomio dato.

Ciò corrisponde a dire che esistono coppie di coordinate tali che $\alpha_h = \alpha_r$ e $\beta_h = \beta_r = 0$. E ciò, come è chiaro, dà ancora condizioni del tipo esaminato, ond'anche lo spazio dei polinomi semidefiniti è di tipo poliedrico. Il complesso di tutti i polinomi definiti e semidefiniti sarà dato da tutte le regioni nelle quali tutte le α sono diverse da zero e le β sono opposte oppure nulle. In sostanza tali regioni sono costituite non solo da punti interni, ma da quelli costituenti le varietà lineari che limitano la regione poliedrica.

Se si fa ricorso, invece, allo spazio C_n , il problema fondamentale può presentarsi sotto un duplice aspetto.

I) Esaminare la regione D di C_n attraverso le formole di collegamento tra radici e coefficienti di una equazione, e ossia a dire attraverso le trasformazioni che portano da R_{2n} a C_n e viceversa.

II) Caratterizzare, direttamente, detta regione di C_n , attraverso proprietà geometriche (proprie) ed analitiche, dando, quindi, processi per costruire punti di essa regione ed altri ancora per passare da punti già determinati in D ad altri nuovi.

In tal ordine ultimo di idee, è subito da rilevare che se P' e P'' sono punti di D regione di C_n dei polinomi non indefiniti, e λ' e λ'' due costanti positive, $\frac{\lambda' P' + \lambda'' P''}{\lambda' + \lambda''}$ appartiene ancora a D . Ossia, geometricamente, se due punti appartengono a D , anche TUTTI i punti del segmento $P' P''$ vi appartengono, cioè la varietà è convessa.

Ed allora il problema si può porre, più semplicemente, nei seguenti termini:

Dare dei processi atti a costruire punti della regione D dei polinomi non indefiniti: successivamente considerare i poliedri, ottenuti con tali punti (vertici), interni alla regione ed approssimare la regione data con tali formazioni poliedriche, come sarà delineato in seguito.

Svilupperemo quanto sopra si è delineato in un gruppo di Note.

A. — COSTRUZIONE DI SISTEMI LINEARI.

1. Sia

$$(1) \quad f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, \quad (a_n = 1)$$

un polinomio *non indefinito* — intendendo possa essere definito o semidefinito — e, per fissare le idee, se definito, positivo su tutto l'asse reale.

Risulterà, ovviamente, non indefinita la formazione baricentrica:

$$(2) \quad \varphi(x) = \frac{1}{n} \sum_i^n f(x + \xi_i)$$

con le ξ reali, nel senso che il punto rappresentativo di $\varphi(x)$ è baricentro dei punti rappresentativi di $f(x + \xi_i)$.

2. Consideriamo il polinomio non indefinito (1) e formiamo la combinazione espressa da (2). Risulta, dopo aver posto:

$$\varphi(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0, \quad S_r = \xi_1^r + \xi_2^r + \cdots + \xi_n^r$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} nc_{n-1} = \binom{n}{1} S_1 + na_{n-1} \\ nc_{n-2} = \binom{n}{2} S_2 + \binom{n-1}{1} a_{n-1} S_1 + na_{n-2} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ nc_0 = \binom{n}{n} S_n + a_{n-1} \binom{n-1}{n-1} S_{n-1} + \cdots + na_0. \end{array} \right.$$

Tale sistema permette di esprimere le S mediante le c e le a .

Poichè le ξ sono reali, tali saranno anche le S . Conosciute queste mediante le formole di Newton-Girard possiamo trovare l'equazione:

$$(4) \quad \Phi(\xi) = \xi^n + \gamma_1 \xi^{n-1} + \cdots + \gamma_n + 0$$

che ammette le ξ quali radici, ed i cui coefficienti γ sono espressioni razionali di a e di c .

Risulta, quindi, da quanto precede, un primo criterio di sufficienza per decidere se un dato polinomio $\varphi(x)$ è non indefinito — sempre che già si conosca un polinomio $f(x)$ non indefinito e cioè: $\varphi(x)$ è sicuramente non indefinito se le radici di (4) sono tutte reali.

3. Il procedimento tenuto consente, inoltre, di costruire tutta una classe di polinomi non indefiniti.

La classe in questione è quella caratterizzata dai coefficienti c_i ($i = 0, \dots, n-1; c_n = 1$) forniti dalle (3), per ogni prefissata n -pla di valori reali ξ_r e col concorso dei coefficienti a_s di $f(x)$, polinomio noto non indefinito.

4. Consideriamo il polinomio non indefinito (1) e mutiamo in esso x in αx , con α costante reale. Ovviamente, il polinomio $f(\alpha x)$, che ne risulta, è ancora non indefinito, e così pure, tale risulta, essendo n pari, il polinomio $\frac{f(\alpha x)}{\alpha^n}$.

Sia, ora, P_0 il punto rappresentativo del polinomio $f(x)$, non indefinito.

Il punto P corrispondente al polinomio non indefinito $f(x + \alpha)$, oppure, $f(x\alpha)$, al variare di α descrive una curva nel C_n .

Tale curva è *razionale normale*. In altri termini la curva razionale normale passante per un punto di una data regione D , ha tutti i suoi punti in D .

Raggruppando le due trasformazioni, possiamo dire che ogni trasformazione della forma $f(\alpha x + a)$, con α e a reale, al variare di a e di α darà punti della regione D .

Ne segue che tutta la regione D risulta ricoperta da ∞^{n-2} superficie passanti per un punto generico P di D . Se, quindi, diciamo \mathfrak{D} la regione dei polinomi *non* definiti, secondo che uno dei punti di una di tale superficie appartiene a D od a \mathfrak{D} , lo stesso accade per tutti i punti della superficie stessa.

Siano P e P_1 i punti rappresentativi di due polinomi non indefiniti, appartenenti alla regione D , segue che Q punto di mezzo del segmento PP_1 , appartiene a D .

Pertanto, se P_2 appartiene a D ; Q_1 e Q_2 (che àno eguale significato di Q) appartengono anche a D . Ne segue che tutti i punti interni ad un triangolo e – più generalmente – ad una iperpiramide di vertici appartenenti a D , appartengono, ancora, a D .

Dati, allora, due punti, P e P_1 della regione D , attraverso $f(\alpha x)$, per esempio, si passa a due nuovi punti, rispettivamente: P' e P'_1 ; segue che tutti i punti del segmento PP_1 , che appartengono a D , attraverso la $f(\alpha x)$ risultano trasformati in punti di un certo arco c_0 di curva passante per P' e P'_1 , onde appartengono a D i punti del segmento $\overline{P'P'_1}$ e quelli dell'arco c_0 .

Si à, così, una specie di rigonfiamento successivo che consente di estendere la regione D .

Il problema che ora si pone è il seguente: Dato il punto P , costruiamo mediante $f(\alpha x)$ [o mediante $f(x + \alpha)$] i punti P' , P'' , ..., $P^{(n)}$, $[P_1, P_2, \dots, P_n]$ in corrispondenza ai valori $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, di α . È possibile determinare le α in modo che il generico punto Q sia baricentro dell'iperpiramide avente i vertici nei punti $P^{(i)}[P_i]$? Ovviamente, si è nella ipotesi che P appartenga a D e quindi anche i punti $P^{(i)}[P_i]$ vi appartengano. Assegnato che sia Q ,

quindi, esso Q apparterrà a D se esistono *valori reali* per le α , per i quali il sistema (3) è soddisfatto.

Ma il precedente problema può presentare un altro aspetto. Si voglia costruire un polinomio Q non indefinito: basterà, allora, assegnare ad arbitrio le α e determinare, così, le c_i , coefficienti del polinomio Q che sarà non indefinito in quanto, il modo stesso con cui si perviene a (3) ci assicura essere Q baricentro, rispetto a $f(x + \alpha)$.

Tale doppia eventualità corrisponde, riassumendo, ai due seguenti problemi:

a) *Trovare una iperpiramide avente assegnato baricentro (e ciò da la sicurezza che Q è non indefinito).*

b) *Data l'iperpiramide, trovare il baricentro (che porta alla costituzione di polinomi non indefiniti).*

Matematica. — *Polinomi definiti.* — II. *Classi di polinomi definiti ottenuti da alcuni prefissati.* Nota di G. BARBA, presentata dal Corrisp. V. NOBILE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Polinomi definiti.* — III. *Interpretazioni, proprietà e complementi.* Nota di G. BARBA, presentata dal Corrisp. V. NOBILE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulle corrispondenze funzionali inverse diramate: teoria generale e applicazioni ad alcune equazioni funzionali non lineari e al problema di Plateau.* Nota II di R. CACCIOPPOLI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. G. SCORZA.

5. Per alcune applicazioni torna utile la seguente osservazione, che permette di estendere il risultato fondamentale del n. 3 al caso che T dipenda con continuità (e parimenti il suo differenziale) da un *parametro* α , variabile in uno spazio S : *La parità definita relativamente al punto φ' ed all'insieme compatto isolato H dalla trasformazione $\varphi' = T[\varphi, \alpha]$ si conserva per piccole variazioni di α .*

Il teorema generale sull'inversione in grande si lascia completare da un'osservazione analoga: *Se, T^{-1} non presentando che punti critici ordinari, φ è tenuto a descrivere un insieme compatto in Σ ogniqualvolta α e $T[\varphi, \alpha]$ descrivano insiemi compatti in S ed in Σ' , T è sempre della stessa specie per tutte le determinazioni di α .*

Anche qui potranno più generalmente considerarsi, in luogo degli spazi Σ' ed S , due loro varietà.

Come esempio prendiamo l'equazione integrale non lineare

$$(6) \quad \varphi(x) + \lambda \int_a^b K[x, y, \varphi(y)] dy = \psi(x) \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

dove $K[x, y, u]$ è funzione continua con la sua derivata parziale K_u . La corrispondenza T_λ tra φ e ψ , variabili nell'ordinario spazio delle funzioni continue, soddisfa evidentemente a tutte le ipotesi del n. 1, ed è di prima specie per $\lambda = 0$.

Pertanto la (6) sarà risolubile rispetto a φ sempre che al variar di λ in $(0, 1)$ e di ψ in un insieme compatto anche φ non abbandoni un insieme compatto (cioè limitato e di equicontinuità).

In particolare sia

$$K[x, y, u] = K(x, y) f(y, u),$$

con $K(x, y)$ nucleo simmetrico definito positivo⁽²⁾. Condizioni semplicissime di risolubilità sono allora, p. es., le seguenti: *per $u \rightarrow \infty$, $f(x, u)$ si man-*

(1) Nella seduta del 6 dicembre 1936.

(2) Cfr. HAMMERSTEIN, «Acta Math.», to. 54 (1930).

tiene limitata o tende a ∞ (indipendentemente da x); e analogamente, per $u \rightarrow -\infty$, $f(x, u)$ si mantiene limitata o tende a $-\infty$.

Scartato infatti il caso evidente che f sia limitata, e modificando all'occorrenza f per una costante additiva, possiamo supporre il prodotto uf inferiormente limitato; poniamo poi $F(x) = f(x, \varphi(x))$, moltiplichiamo la (6) per $F(x) dx$; e integriamo fra a e b . Otterremo, tenuto presente che $K(x, y)$ è definito positivo,

$$\int_a^b \psi(x) F(x) dx - \int_a^b \varphi(x) F(x) dx \geq 0.$$

Ne segue facilmente ⁽¹⁾ che l'integrale $\int_a^b |F(x)| dx$ deve conservarsi limitato per $\max |\psi|$ limitato, ciò che implica non potere φ abbandonare un insieme limitato di equicontinuità.

6. Se fin qui abbiamo parlato sempre di spazi *lineari*, lo abbiamo fatto solo per semplicità, e in vista di un buon numero di applicazioni in cui occorrono spazi cosiffatti. Ma in tutta la nostra analisi l'ipotesi di linearità e le considerazioni metriche non intervengono che *localmente*, e i risultati hanno carattere invariantivo per trasformazioni topologiche. Ciò permette di passare senz'altro (e se ne presenterà l'occasione fra breve) da spazi lineari a spazi topologici, nel senso però della *topologia ristretta del primo ordine* ⁽²⁾, affinchè serbino senso le considerazioni differenziali di cui facciamo uso. Il più concisamente possibile, gli spazi cui estendiamo i nostri risultati, e che diremo per intenderci *regolari*, sono caratterizzati dalle proprietà seguenti:

1) ad ogni punto si associano degli «intorni» rappresentabili biunivocamente su campi appartenenti a spazi lineari metrici; 2) ogni corrispondenza indotta da due rappresentazioni siffatte tra spazi lineari è differenziabile con continuità.

Per gli spazi regolari la decomponibilità, la differenziabilità di una trasformazione, il carattere di un punto critico in una trasformazione inversa, ecc., si definiscono riportandosi alle immagini lineari. *Dojo ciò, i risultati dei nn. 3 e 5 si estendono agli spazi regolari.*

Ma vogliamo fare ancora un passo, indicando una generalizzazione notevole, fra le tante possibili, per l'applicazione che ne abbiamo in vista. Abbiamo rilevato che in alcuni casi (come nel problema relativo all'equazione (5), dove non occorreva invertire T che intorno alla varietà $\mu = 0$ dello spazio Σ') l'inversione della T interessa solo in quanto subordina una corrispondenza tra due varietà Σ'_t e Σ_t degli spazi Σ' e Σ ; l'ufficio che hanno allora Σ' e T non ne esige una completa ed univoca determinazione.

(1) Ved. la mia citata Memoria nei «Rend. Sem. Mat. Univ. Padova», n. 3.

(2) Cfr. BOULIGAND, *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*. (Paris, Vuibert, 1932), chap. X.

Precisamente, possiamo immaginare che, una trasformazione T_1 fra una varietà Σ_1 di Σ e Σ'_1 essendo direttamente data, per due punti corrispondenti qualunque φ_1 e φ'_1 esistano uno spazio lineare Σ' contenente un'immagine biunivoca lineare Σ'_2 di un intorno di φ'_1 , ed una trasformazione T fra Σ e Σ' che converta in punti di Σ'_2 esclusivamente punti dell'intorno di φ_1 su Σ_1 , subordinando la T_1 ; e che rispetto a Σ (o ad una sua immagine lineare Σ_0), Σ' e T si possano introdurre le nozioni precedenti, la varietà lineare V' risultando contenuta in Σ'_2 ⁽¹⁾. I risultati dei nn. 3 e 5 si estenderanno a siffatte corrispondenze T_1 fra spazi Σ_1 e Σ'_1 , lineari o non⁽²⁾.

7. Consideriamo l'equazione

$$(7) \quad F(x, y, z, x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v, D, D', D'') = 0$$

dove D, D', D'' sono i coefficienti della seconda forma quadratica differenziale di una superficie

$$S: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \quad (u^2 + v^2 \leq 1)$$

e F si suppone invariante rispetto alle trasformazioni dei parametri u, v .

La (7) è un'equazione a derivate parziali in forma parametrica, che si dice *ellittica* quando, come supporremo, $4F_D F_{D''} - F_{D'}^2 > 0$.

Il problema di determinare una superficie integrale S della (7), limitata da una curva C assegnata, si può formulare come problema dell'inversione della corrispondenza T_1 tra lo spazio Σ_1 delle superficie integrali, varietà dello spazio Σ delle superficie aperte semplicemente connesse (sufficientemente regolari) e lo spazio Σ'_1 delle curve limiti (sufficientemente regolari). Come condizioni di regolarità possono assumersi quelle di ordine $2 + \lambda$ (continuità hölderiana di esponente $\lambda < 1$ per le curvature); F si suppone a derivate terze continue.

Lo spazio Σ è regolare: data una superficie S_0 di contorno C_0 , se ne lascia definire un intorno in corrispondenza biunivoca con l'intorno dell'origine di uno spazio lineare Σ_0 , generato dalle coppie di funzioni $[\omega(\theta), \eta(u, v)]$ regolari di ordine $2 + \lambda$ e definite la seconda nel cerchio $u^2 + v^2 \leq 1$, la prima sulla circonferenza⁽³⁾; la (7), equazione di Σ_1 , si traduce in una

(1) Questa condizione, come quella della linearità di Σ'_2 , è superflua se i corrispondenti dei punti di Σ'_1 sono isolati. Nel caso generale essa occorre per conservare immutata la definizione della varietà W' su V' (n. 2).

(2) Anche di Σ'_1 potrà talora occorrere di considerare soltanto una porzione.

(3) Siano spiccate da ogni punto P_0 di S_0 due direzioni α, β , funzioni regolari di ordine $2 + \lambda$, con le sole condizioni che β non sia mai tangente a S_0 , e che su C_0 il piano $\alpha\beta$ non contenga mai la tangente a C_0 . Alla coppia $[\omega, \eta]$ facciamo corrispondere la superficie S riferita ad S_0 in modo che se P_0 e P sono punti corrispondenti, lo spostamento $P_0 P$ è contenuto nel piano $\alpha\beta$ passante per P_0 ed ha per componenti, secondo α e β , ω ed η , ω essendo prolungata per $u^2 + v^2 < 1$ secondo una legge determinata

ordinaria equazione a derivate parziali $L[\eta] = 0$, ellittica con la data. Quanto a Σ_i , anch'esso è uno spazio regolare, e l'intorno di una curva C ammette come immagine lineare Σ'_i l'intorno dell'origine della varietà lineare $\mu = 0$ di uno spazio $[\tau(\theta), \tau'(\theta), \mu(u, v)]$. Possiamo prendere quest'ultimo come spazio Σ' , e subordinare la corrispondenza T , fra Σ_i e Σ'_i all'altra fra Σ_0 e Σ'

$$T: \tau = \omega, \quad \tau' = \omega', \quad L[\eta] = \mu,$$

ω' essendo i valori al contorno di η ; si trovano così verificate tutte le condizioni di cui al numero precedente.

Possiamo dunque affermare che il problema al contorno per l'equazione ellittica (7) è risolubile per tutte le curve di una famiglia continua Γ sempre che esso ammetta per una particolare curva di Γ un numero dispari di soluzioni semplici, cioè di soluzioni cui corrisponde un'equazione a variazioni della (7)⁽¹⁾ illimitatamente risolubile, e che sia compatto un insieme di superficie soluzioni le cui curve limiti appartengono ad una porzione compatta di $\Gamma^{(2)}$; adottando naturalmente la nozione di convergenza inherente alla supposta regolarità delle superficie e curve considerate⁽³⁾.

Osserviamo poi che la compattezza di una successione di superficie dotate di aree uniformemente limitate e integrali della (7) è assicurata sempre che siano equicontinue le curvature di queste superficie⁽⁴⁾ ed anzi soltanto

(p. es. come funzione armonica); il contorno C di S corrisponde alla coppia $[\omega, \omega']$, ω' essendo la funzione cui si riduce η sulla circonferenza. Queste costruzioni si lasciano poi invertire. Cfr. gli sviluppi del § 3 nella citata Memoria di Miranda.

(1) Per tutta la parte di questa teoria che qui riguardiamo come acquisita, vedasi MIRANDA, loc. cit.

(2) La questione si può anche presentare, in forma assai suggestiva, come segue: Nello spazio Σ delle superficie, Σ_i sia la varietà delle superficie integrali della (7), Σ_c la varietà delle superficie limitate da C , S un punto comune a Σ_i e Σ_c (per semplicità isolato). Le immagini di Σ_i e Σ_c nello spazio lineare Σ' sono le due varietà lineari $\mu = 0$, $\tau = \tau' = 0$, intersecantisi nell'origine. Secondo che la corrispondenza fra Σ e Σ' presenta il caso dispari o il caso pari, S è di prima o di seconda specie, e nel primo caso può dirsi costituire una vera e propria intersezione di Σ_i e Σ_c ; quest'intersezione non si perde per piccole variazioni di Σ_c , corrispondenti a piccole variazioni di τ, τ' intorno allo zero. Ora se per una certa posizione di Σ_c le intersezioni con Σ_i sono semplici e in numero dispari, esse non potranno mai perdersi tutte al variare di Σ_c , almeno finché astrette a descrivere insiemi compatti.

Analogamente possono studiarsi i punti comuni non isolati. Ho adottato questo punto di vista nella mia ricordata conferenza sul problema di Plateau.

(3) Tale convergenza, che può dirsi di ordine $2 + \lambda$, implica che per opportune rappresentazioni parametriche delle superficie variabili S e della superficie limite S (o delle curve C e C) le differenze $x - x, y - y, z - z$ tendano a zero coi (minimi) coefficienti di Hölder delle derivate seconde.

(4) Ovviamente, l'intorno di un punto P di S si definisce qui come l'insieme dei punti che possono congiungersi a P mediante curve di S contenute in un intorno spaziale di P .

le normali se la (7) è quasi-lineare, se cioè D, D', D'' vi figurano linearmente. Difatti in tal caso ci si può ridurre, mercè decomposizione opportuna delle superficie date, a superficie di equazione $\zeta = f(x, y)$, le funzioni f essendo a derivate seconde (o prime) equilimitate ed equicontinue: la (7) diventa allora un'ordinaria equazione a derivate parziali, e la compattezza in quistione segue da noti risultati del genere di quelli già ricordati al n. 4⁽¹⁾. Giungiamo così al teorema seguente:

L'equazione ellittica (7) ammette almeno una superficie integrale limitata da una qualunque curva di una famiglia continua Γ nelle seguenti ipotesi: 1) per una particolare curva di Γ esiste un numero finito dispari di soluzioni semplici; 2) le superficie integrali aventi per contorni le curve di una porzione compatta di Γ sono ad aree equilimitate, ed hanno curvature equicontinue o, nel caso che la (7) sia quasi-lineare, normali equicontinue.

È immediata l'estensione al caso di contorni composti di più curve semplici.

8. Una classe specialmente notevole di equazioni della forma parametrica (7) è costituita dalle equazioni ellittiche quasi-lineari caratterizzanti le superficie estremali di un integrale doppio regolare in forma parametrica: il caso particolare più importante è quello dell'equazione delle superficie minime

$$\frac{GD - 2FD' + ED''}{EG - F^2} = 0;$$

il problema al contorno per quest'ultima è il *problema di Plateau*, relativo all'esistenza di una superficie minima regolare (semplicemente connessa) limitata da una curva assegnata. Questo problema non è stato fin qui risoluto, cioè il corrispondente principio di Plateau dimostrato, che per curve di forma particolare⁽²⁾.

L'esistenza di soluzioni particolari, uniche per il proprio contorno e semplici, è ovvia (contorni piani). Prendasi come famiglia Γ di contorni quella delle curve (regolari di ordine $2 + \lambda$) non annodate, deducibili cioè da una circonferenza mercè deformazione continua senza incroci. Basterà allora provare che è compatta una successione di superficie minime i cui contorni convergano verso una curva semplice, per dedurre dalla teoria precedente il principio di Plateau nella seguente forma generale: *esiste sempre una su-*

(1) Ved. le mie Note citate in questi «Rendiconti».

(2) P. es. curve dotate di una proiezione più convessa. In tutte le recenti ricerche generali sul problema di Plateau, da quelle di GARNIER («Ann. Éc. Norm.», to. 45 [3], 1928) ispirate al programma di Darboux, a quelle di DOUGLAS («Trans. Am. Math. Soc.», vol. 33, 1931), i cui risultati si estendono a curve di Jordan qualunque, la condizione di regolarità è deliberatamente scartata, le soluzioni trovate potendo (e talora dovendo) presentare punti di diramazione.

perficie minima regolare avente per contorno un'assegnata curva che non presenti incroci né nodi.

Del lemma formulato la parte principale (esistenza di una superficie limite e regolarità dei suoi punti interni) si stabilisce mediante le considerazioni seguenti: la superficie S_n della successione data si rappresenti conformemente, mercè le tre funzioni $x_n(u, v)$, $y_n(u, v)$, $z_n(u, v)$ sul cerchio $u^2 + v^2 \leq 1$, con la condizione che a tre punti fissi della circonferenza corrispondano tre punti del contorno C_n , tendenti per $n \rightarrow \infty$ a tre punti distinti della curva limite C ; allora x_n, y_n, z_n saranno funzioni armatiche *coniugate* e ammetteranno (almeno) una terna limite x, y, z di funzioni analoghe.

Si vede poi facilmente che x, y, z risultano continue anche sulla circonferenza, e che fra questa e C definiscono una corrispondenza biunivoca⁽¹⁾.

Dopo ciò rimarrebbe ancora soltanto da provare che sono soddisfatte anche al contorno le condizioni di regolarità di cui al numero precedente⁽²⁾. Non dovrebbe esservi dubbio su questo fatto, che appare come una ben naturale estensione di note proprietà della rappresentazione conforme (corrispondenza tra le frontiere); la dimostrazione presentandosi però alquanto laboriosa, non insisteremo qui sull'argomento, che ci proponiamo di riprendere altrove.

(1) Ved. DOUGLAS, loc. cit.

(2) Convergenza di ordine $2 + \lambda$ (assicurata già da quella di ordine 1) delle superficie come conseguenza dell'analogia convergenza per i contorni.

Matematica. — *Proprietà caratteristiche della trasformazione di Laplace.* Nota di ENZO LEVI, presentata⁽¹⁾ dal Socio G. FUBINI.

La trasformazione di Laplace

$$\mathcal{L}[F(t)] = \int_a^b e^{-st} F(t) dt$$

è un'operazione funzionale distributiva⁽²⁾ che gode, come si ricava con un'integrazione per parti, della seguente proprietà:

$$(1) \quad \mathcal{L}[F'(t)] = s\mathcal{L}[F(t)] + F(b)e^{-sb} - F(a)e^{-sa}.$$

Proprietà importante, di cui si servì già il Pincherle, unitamente all'altra

$$(2) \quad \frac{d}{ds} \mathcal{L}[F(t)] + \mathcal{L}[tF(t)] = 0$$

per ricavare, con puro calcolo simbolico, molti risultati relativi alla trasformazione di Laplace⁽³⁾.

Così pure, se in recenti studi concernenti le equazioni differenziali lineari alle derivate parziali la nostra trasformazione risulta d'importanza fondamentale⁽⁴⁾, ciò avviene essenzialmente in quanto per essa vale la (1).

Pertanto si presenta interessante la questione: esistono altre operazioni funzionali oltre la trasformazione di Laplace per cui valga la (1), o per cui valgano la (1) e la (2)? La presente Nota risponderà negativamente a questa domanda, dimostrando che la (1) è, sotto larghissime ipotesi, una *proprietà caratteristica* della trasformazione di Laplace. La (1) si può dunque assumere come definizione di detta trasformazione senza bisogno di ricorrere all'integrale.

Ne seguirà che tutte le altre proprietà della trasformazione di Laplace sono implicite nella (1); in particolare ciò succede per la (2)⁽⁵⁾.

(1) Nella seduta del 6 dicembre 1936.

(2) Ciò tale che, essendo $F_1(t)$, $F_2(t)$ due arbitrarie funzioni trasformabili e C_1 , C_2 due costanti qualunque, deve aversi

$$\mathcal{L}[C_1 F_1(t) + C_2 F_2(t)] = C_1 \mathcal{L}[F_1(t)] + C_2 \mathcal{L}[F_2(t)].$$

(3) Cfr. ad es.: PINCHERLE e AMALDI, *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'Analisi*. Bologna, 1901, p. 353 è sg.

(4) Le prime ricerche secondo l'indirizzo indicato sono dovute a BERNSTEIN e DOETSCH, *Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung*. « Math. Zeitschr. », 22, pp. 285–292, pp. 293–306; 25, pp. 608–626.

(5) Del resto non è difficile ricavare direttamente la (2) dalla (1) mediante il calcolo funzionale simbolico del Pincherle.

A conclusione della presente Nota estenderemo il risultato ottenuto dimostrando che, se esiste una trasformazione \mathcal{L}_1 per cui sia

$$\mathcal{L}_1[F'(t)] = s\mathcal{L}_1[F(t)] + F(b) \cdot \Phi(s, b) - F(a) \cdot \Phi(s, a),$$

essa pure si riduce sostanzialmente alla trasformazione di Laplace.

Dimostrerò il seguente

TEOREMA I. — *La più generale operazione funzionale distributiva $\mathcal{L}[F(t)]$ tale che*

a) *Operando su tutte le funzioni continue $F(t)$ definite in $a \leq t \leq b$, le trasformi in funzioni di un'altra variabile s ;*

b) *Esista, per tutti i valori di s , un numero M tale che si abbia, qualunque sia $F(t)$ continua,*

$$\mathcal{L}[F(t)] < M \max |F(t)|,$$

c) *Per ogni $F(t)$ derivabile valga l'identità*

$$(1) \quad \mathcal{L}[F'(t)] = s\mathcal{L}[F(t)] + F(b)e^{-sb} - F(a)e^{-sa},$$

è rappresentata da

$$\mathcal{L}[F(t)] \equiv \int_a^b e^{-st} F(t) dt.$$

Per un noto teorema di Riesz, ogni operazione funzionale-distributiva $\mathcal{L}[F(t)]$ soddisfacente alle ipotesi (a), (b), si può porre sotto la forma

$$(3) \quad \mathcal{L}[F(t)] \equiv \int_a^b F(t) d_t H(s, t)$$

ove l'integrale è inteso nel senso di Stieltjes e H è un'opportuna funzione che, come funzione di t , è a variazione limitata.

Sostituendo quest'espressione in (1), ho

$$(1') \quad \int_a^b F'(t) d_t H(s, t) = s \int_a^b F(t) d_t H(s, t) + [F(t) e^{-st}]_{t=a}^{t=b}.$$

Integrando per parti, si trova che l'integrale a secondo membro diventa

$$\int_a^b F(t) d_t H(s, t) = [F(t) H(s, t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b H(s, t) F'(t) dt.$$

Perciò la (1') può venir scritta

$$(4) \quad \int_a^b F'(t) [d_t H(s, t) + s H(s, t) dt] = [F(t) \{s H(s, t) + e^{-st}\}]_{t=a}^{t=b}.$$

Ponendo

$$H^*(s, t) = \int H(s, t) dt,$$

(cosa lecita, perché $H(s, t)$, essendo a variazione limitata, è certo integrabile secondo Riemann) ho

$$(4) \quad \int F'(t) dt \left[\frac{\partial H^*(s, t)}{\partial t} + s H^*(s, t) \right] = \left[F(t) \left\{ s \frac{\partial H^*(s, t)}{\partial t} + e^{-st} \right\} \right]_a^b.$$

Per $F(t) \equiv 1$, la (4') mi dà

$$(5) \quad \left[s \frac{\partial H^*(s, t)}{\partial t} + e^{-st} \right]_{t=a}^{t=b} = 0.$$

E quindi, per ogni funzione $\bar{F}(t)$ tale che sia $\bar{F}(a) = \bar{F}(b)$, deve essere

$$(6) \quad \int_a^b \bar{F}'(t) dt \left[\frac{\partial H^*(s, t)}{\partial t} + s H^*(s, t) \right] = 0.$$

Qui $\bar{F}'(t)$ può essere una qualunque funzione il cui integrale calcolato fra a e b sia nullo: un noto lemma variazionale⁽¹⁾ ci dice che perché valga la (6) deve essere quasi dappertutto per t in $a - b$

$$d_t \left[\frac{\partial H^*(s, t)}{\partial t} + s H^*(s, t) \right] = f(s) dt$$

indicando $f(s)$ una certa funzione della sola s . E quindi

$$\frac{\partial H^*(s, t)}{\partial t} + s H^*(s, t) = t f(s).$$

Integrale generale di quest'equazione è

$$(7) \quad H^*(s, t) = e^{-st-s} \left[C(s) - f(s) \int_s^t t e^{-at} dt \right] = \varphi(s) e^{-st} + \chi(s) + \psi(s),$$

avendo indicato con φ, χ, ψ opportune funzioni di s . Per determinarle, sostituiamo $H^*(s, t)$ data dalla (7) nella (5); abbiamo

$$[-s^2 \varphi(s) e^{-st} + s \chi(s) + e^{-st}] \Big|_{t=a}^b = 0$$

$$\varphi(s) = \frac{[e^{-st}]_{t=a}^{t=b}}{s^2 [e^{-st}]_{t=a}^{t=b}} = \frac{1}{s^2}.$$

(1) Cfr. ad es., GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique*, Parigi, 1927, to. III, p. 346.

E sostituendo in (7)

$$H^*(s, t) = \frac{e^{-st}}{s^2} + \chi(s) \cdot t + \psi(s).$$

Derivando rispetto a t , ricaviamo

$$H(s, t) = -\frac{e^{-st}}{s^3} + \chi(s).$$

Quindi si deduce che l'operazione funzionale (3) cercata è data da

$$\mathcal{L}[F(t)] \equiv \int_a^b e^{-st} F(t) dt \quad \text{c. d. d.}$$

Ci si potrebbe chiedere se non è troppo restrittiva la condizione da noi imposta col far comparire la funzione e^{-st} a secondo membro della (1). Per esaminare la questione, cerchiamo per quali operazioni funzionali distributive $\mathcal{L}_1[F(t)]$ dotate delle proprietà (a), (b), valga identicamente la

$$(8) \quad \mathcal{L}_1[F'(t)] = s \mathcal{L}_1[F(t)] + [F(t) \cdot \Phi(s, t)] \Big|_{t=a}^{t=b}$$

essendo Φ una qualunque funzione di s e t . Con un procedimento affatto analogo a quello seguito per dimostrare il teorema precedente, si ottiene che la trasformazione cercata è del tipo

$$\mathcal{L}_1[F(t)] \equiv \frac{\Phi(s, b) - \Phi(s, a)}{e^{-sb} - e^{-sa}} \mathcal{L}[F(t)].$$

Se d'altra parte moltiplichiamo tutti i termini della (1) per

$$\frac{\Phi(s, b) - \Phi(s, a)}{e^{-sb} - e^{-sa}},$$

otteniamo che per \mathcal{L}_1 vale l'identità

$$\mathcal{L}_1[F'(t)] = s \mathcal{L}_1[F(t)] + \frac{\Phi(s, b) - \Phi(s, a)}{e^{-sb} - e^{-sa}} [F(b) e^{-sb} - F(a) e^{-sa}],$$

che deve coincidere con la (8).

Dal confronto di queste due si deduce che esiste una trasformazione \mathcal{L}_1 che soddisfi la (8) solo quando si ha

$$\Phi(s, t) = \xi(s) e^{-st}$$

(ξ essendo un qualunque fattore indipendente da t), nel qual caso è

$$\mathcal{L}_1[F(t)] \equiv \xi(s) \mathcal{L}[F(t)].$$

Infine, data una qualunque funzione $\zeta(s)$, basta effettuare la sostituzione $\zeta(s) = x$ perchè le dimostrazioni precedenti valgano a provare il più ampio

TEOREMA II. — Perchè esista un'operazione funzionale distributiva $\mathcal{L}_2[F(t)]$ per cui valgano le proprietà (a), (b), e tale che, per ogni $F(t)$ derivabile, sia identicamente

$$\mathcal{L}_2[F'(t)] = \zeta(s) \cdot \mathcal{L}_2[F(t)] + [F(t) \cdot \Phi(s, t)]_{t=a}^{t=b},$$

è necessario e sufficiente che sia $\Phi(s, t) \equiv \xi(s) e^{-\xi(s) \cdot t}$. Tale trasformazione nella sua forma più generale è allora data da

$$\mathcal{L}_2[F(t)] \equiv \xi(s) \int_a^b e^{-\xi(s) \cdot t} F(t) dt.$$

Come caso particolare, si ricava dai teoremi dimostrati che l'identità

$$\mathcal{L}_0[F'(t)] = s \mathcal{L}_0[F(t)] - F(0)$$

unita alle proprietà (a), (b), è caratteristica dell'operazione funzionale

$$\mathcal{L}_0[F(t)] \equiv \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt,$$

che è la trasformazione di Laplace propriamente detta. Ciò purchè $F(t)$ sia tale che valgano le condizioni necessarie per la convergenza di tutti gli integrali impropri considerati nella dimostrazione.

Meccanica. — *Le oscillazioni isocarene attorno le configurazioni di equilibrio generale.* Nota II di G. ARRIGHI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

§ 1. — Per il moto da noi preso in esame, nella precedente Nota⁽²⁾, si è trovato il sistema lineare, di secondo ordine a coefficienti costanti

$$(1) \quad \begin{cases} L \frac{d^2 \delta\theta}{dt^2} - M \frac{d^2 \delta\psi}{dt^2} = \tilde{\omega} V (N \delta\psi - O \delta\theta) \\ P \frac{d^2 \delta\theta}{dt^2} + Q \frac{d^2 \delta\psi}{dt^2} = \tilde{\omega} V (R \delta\psi - S \delta\theta). \end{cases}$$

Detto ora λ un coefficiente costante si ricavi da esso la combinazione lineare

$$\frac{d^2}{dt^2} [(L + \lambda P) \delta\theta - (M - \lambda Q) \delta\psi] = \tilde{\omega} V [(N + \lambda R) \delta\psi - (O + \lambda S) \delta\theta];$$

quando si determini una nuova costante μ in guisa da aversi

$$(2) \quad \frac{L + \lambda P}{O + \lambda S} = \frac{M - \lambda Q}{N + \lambda R} = \mu,$$

ci saremo ridotti all'equazione

$$\frac{d^2}{dt^2} [(O + \lambda S) \delta\theta - (N + \lambda R) \delta\psi] = -\frac{\tilde{\omega} V}{\mu} [(O + \lambda S) \delta\theta - (N + \lambda R) \delta\psi].$$

Pertanto, dette μ' , μ'' le due radici dell'equazione di 2° grado in μ che si ottiene dalle (2) eliminando λ , e λ' , λ'' i corrispondenti valori di λ , l'integrale completo delle equazioni (1) è dato da

(1) Nella seduta del 6 dicembre 1936.

(2) G. ARRIGHI, *Le oscillazioni isotarene attorno le configurazioni di equilibrio generale.* Nota I. «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», vol. XXIV, 1936.

Per la geometria e la meccanica delle isocarene vedi le mie Note: *Introduzione alla geometria differenziale della superficie dei centri di carena.* «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», vol. LXVII, 1932; *L'evoluta della superficie dei centri di carena.* «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», vol. XVII, 1933; *Il problema cinematico delle rotazioni isocarene dei galleggianti.* «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», vol. LXVIII, 1933; *La statica dei galleggianti e la dinamica delle isocarene.* «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», vol. XVIII, 1933; *Le oscillazioni isocarene attorno le configurazioni cui competono moti di puro giro permanente.* «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», vol. XXIV, 1936.

$$(a) \quad \begin{cases} (O + \lambda' S) \delta\theta - (N + \lambda' R) \delta\psi = b' \sin \left(\sqrt{\frac{\tilde{\omega}V}{\mu'}} t + \alpha' \right) \\ (O + \lambda'' S) \delta\theta - (N + \lambda'' R) \delta\psi = b'' \sin \left(\sqrt{\frac{\tilde{\omega}V}{\mu''}} t + \alpha'' \right) \end{cases}$$

dove $b', b'', \alpha', \alpha''$ sono costanti arbitrarie; da queste equazioni, risolvendo, si ottiene

$$\delta\theta = \frac{b'' (N + \lambda'' R) \sin \left(\sqrt{\frac{\tilde{\omega}V}{\mu''}} t + \alpha'' \right) - b' (N + \lambda' R) \sin \left(\sqrt{\frac{\tilde{\omega}V}{\mu'}} t + \alpha' \right)}{(O + \lambda' S)(N + \lambda'' R) - (N + \lambda' R)(D + \lambda'' S)}$$

$$\delta\psi = \frac{-b'' (O + \lambda' S) \sin \left(\sqrt{\frac{\tilde{\omega}V}{\mu''}} t + \alpha'' \right) + b' (O + \lambda'' S) \sin \left(\sqrt{\frac{\tilde{\omega}V}{\mu'}} t + \alpha' \right)}{(O + \lambda' S)(N + \lambda'' R) - (N + \lambda' R)(O + \lambda'' S)}.$$

§ 2. — Passiamo adesso a dimostrare il

TEOREMA. — Condizione necessaria e sufficiente affinché $\delta\theta$ e $\delta\psi$ si mantengano piccoli è che la posizione di equilibrio considerata sia tale che il baricentro sia situato inferiormente ai metacentri relativi al centro di carena P_0 .

Per la dimostrazione di questo fondamentale teorema sulla stabilità generale dei galleggianti, si prenda in considerazione l'equazione

$$(NS - OR) \mu^2 - (OQ + NP + MS - LR) \mu + LQ + MP = 0$$

che si ottiene dalla (2) eliminando λ .

Quando in essa alle lettere L, M, N, O, P, Q, R, S si vadano a sostituire i valori ad esse attribuite nella Nota I, con laboriosi calcoli che noi omettiamo per brevità, si ottiene l'equazione

$$(3) \quad (\rho - g)(\rho' - g) \left[\frac{A}{C} (\mathbf{n} \times \mathbf{i})^2 + \frac{B}{C} (\mathbf{n} \times \mathbf{j})^2 + (\mathbf{n} \times \mathbf{k})^2 \right] \mu^2 -$$

$$- \left\{ B [(\rho - g)(\mathbf{v} \times \mathbf{i})^2 + (\rho' - g)(\mathbf{u} \times \mathbf{i})^2] + \right.$$

$$+ A [(\rho - g)(\mathbf{v} \times \mathbf{j})^2 + (\rho' - g)(\mathbf{u} \times \mathbf{j})^2] +$$

$$\left. + \frac{AB}{C} [(\rho - g)(\mathbf{v} \times \mathbf{k})^2 + (\rho' - g)(\mathbf{u} \times \mathbf{k})^2] \right\} \mu + AB = 0.$$

Da essa risulta che se le quantità $\delta\theta, \delta\psi$ restano piccole, cioè μ', μ'' sono reali positivi, il primo coefficiente dovrà essere positivo cioè $\rho - g$ e $\rho' - g$ di egual segno; ma è da escludersi che queste differenze possano essere

entrambi negative poichè allora si avrebbe una permanenza e una variazione, pertanto si avrà

$$(4) \quad \rho - g > 0, \quad \rho' - g > 0,$$

e queste diseguaglianze dimostrano la prima parte del teorema.

Per dimostrare la sufficienza della condizione ivi enunciata dovremo provare che, vere le (4), per le quali la (3) dà due variazioni, il discriminante Δ della (3) stessa risulta positivo.

Ora dalla (3), con successivi passaggi che riportiamo, discende

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{1}{4} B [(\rho - g)(\mathbf{v} \times \mathbf{i})^2 + (\rho' - g)(\mathbf{u} \times \mathbf{i})^2] + A [(\rho - g)(\mathbf{v} \times \mathbf{j})^2 + (\rho' - g)(\mathbf{u} \times \mathbf{j})^2] + \\ & + \frac{AB}{C} [(\rho - g)(\mathbf{v} \times \mathbf{k})^2 + (\rho' - g)(\mathbf{u} \times \mathbf{k})^2] - \\ & - 4 AB (\rho - g) (\rho' - g) \left[\frac{A}{C} (\mathbf{n} \times \mathbf{i})^2 + \frac{B}{C} (\mathbf{n} \times \mathbf{j})^2 + (\mathbf{n} \times \mathbf{k})^2 \right] = \\ = & \frac{1}{4} (\rho - g) \left[(\mathbf{v} \times \mathbf{i})^2 B + (\mathbf{v} \times \mathbf{j})^2 A + (\mathbf{v} \times \mathbf{k})^2 \frac{AB}{C} \right] + \\ & + (\rho' - g) \left[(\mathbf{u} \times \mathbf{i})^2 B + (\mathbf{u} \times \mathbf{j})^2 A + (\mathbf{u} \times \mathbf{k})^2 \frac{AB}{C} \right] - \\ & - 4 AB (\rho - g) (\rho' - g) \left[\frac{A}{C} (\mathbf{n} \times \mathbf{i})^2 + \frac{B}{C} (\mathbf{n} \times \mathbf{j})^2 + (\mathbf{n} \times \mathbf{k})^2 \right] = \\ = & \frac{1}{4} (\rho - g) \left[(\mathbf{v} \times \mathbf{i})^2 B + (\mathbf{v} \times \mathbf{j})^2 A + (\mathbf{v} \times \mathbf{k})^2 \frac{AB}{C} \right] - \\ & - (\rho' - g) \left[(\mathbf{u} \times \mathbf{i})^2 B + (\mathbf{u} \times \mathbf{j})^2 A + (\mathbf{u} \times \mathbf{k})^2 \frac{AB}{C} \right] + \\ & + 4 (\rho - g) (\rho' - g) \left[(\mathbf{v} \times \mathbf{i})^2 B + (\mathbf{v} \times \mathbf{j})^2 A + (\mathbf{v} \times \mathbf{k})^2 \frac{AB}{C} \right] \left[(\mathbf{u} \times \mathbf{i})^2 B + \right. \\ & \left. + (\mathbf{u} \times \mathbf{j})^2 A + (\mathbf{u} \times \mathbf{k})^2 \frac{AB}{C} \right] - AB \left[\frac{A}{C} (\mathbf{n} \times \mathbf{i})^2 + \frac{B}{C} (\mathbf{n} \times \mathbf{j})^2 + (\mathbf{n} \times \mathbf{k})^2 \right]. \end{aligned}$$

Ma quest'ultima espressione che figura entro parentesi-graffa, mediante calcoli che qui non stiamo a riprodurre, risulta eguale a

$$\left(\frac{AB}{C} \mathbf{u} \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{k} + A \mathbf{u} \times \mathbf{j} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{j} + B \mathbf{u} \times \mathbf{i} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{i} \right);$$

c, pertanto, dall'ultima espressione di Δ discende che, quando siano verificate le (4), le radici μ' , μ'' sono entrambi reali positive, ciò che prova la sufficienza della condizione enunciata nel teorema.

È opportuno confrontare i risultati adesso ottenuti con quelli che, nella quinta delle mie Note citate in ⁽²⁾, si perveniva dalla condizione di minimo dell'energia potenziale.

Si osservi ancora che il teorema ora dimostrato può rendersi più completo quando si tenga conto dei risultati cui siamo giunti nell'ultima delle citate mie Note.

§ 3. — Nella Nota I, assieme all'equazione (1), avevamo trovata ancora l'altra

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{I}{\cos \theta_i} \frac{d^2 \delta\psi}{dt^2} + \frac{\tilde{\omega}V}{C \cos \theta_i} (H \delta\psi - K \delta\theta).$$

Sostituendo in questa, le espressioni di $\delta\psi$ e $\delta\theta$ trovate al § 1 ed integrando due volte si ottiene

$$(4) \quad \varphi = b'_i \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{\tilde{\omega}V}{\mu'}} t - \alpha' \right) + b''_i \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{\tilde{\omega}V}{\mu''}} t + \alpha'' \right) + \beta t + \gamma,$$

dove b'_i, b''_i , sono costanti facili a determinarsi e β, γ sono nuove costanti.

L'espressione (4) ora trovata si compone di due parti: l'una funzione periodica e l'altra funzione lineare del tempo. Quest'ultima parte, se pure in modo lento, andrà crescendo continuamente col tempo; pertanto il galleggiante, a parte il moto del baricentro, non resterà nell'intorno della posizione iniziale ma compirà ancora una rotazione attorno ad un asse verticale per il baricentro.

§ 4. — Sia Q un punto generico del galleggiante di coordinate x, y, z rispetto al sistema (G, i, j, k), la sua altezza sul piano orizzontale per il baricentro, al tempo t , nei simboli della Nota I, sarà espressa da

$$(Q - G) \times c = (Q - G) \times n + (Q - G) \times \delta c,$$

dove $(Q - G) \times n$ rappresenta la suddetta altezza corrispondentemente alla posizione di equilibrio, ovvero

$$(5) \quad (Q - G) \times c = (Q - G) \times n + (x \cos \psi_i \operatorname{sen} \theta_i - y \operatorname{sen} \psi_i \operatorname{sen} \theta_i) \delta\psi + \\ + (x \operatorname{sen} \psi_i \cos \theta_i + y \cos \psi_i \cos \theta_i - z \operatorname{sen} \theta_i) \delta\theta.$$

Supposto adesso che il punto Q appartenga al piano, per GP_o, di equazione

$$(6) \quad (N + \lambda' R) (x \cos \psi_i \operatorname{sen} \theta_i - y \operatorname{sen} \psi_i \operatorname{sen} \theta_i) + \\ + (O + \lambda' S) (x \operatorname{sen} \psi_i \cos \theta_i + y \cos \psi_i \cos \theta_i - z \operatorname{sen} \theta_i) = 0,$$

la (5), tenendo presenti le relazioni del § 1, potrà ancora scriversi

$$(Q-G) \times e = (Q-G) \times n + \frac{x \cos \psi_i \sin \theta_i - y \sin \psi_i \sin \theta_i}{(O + \lambda' S)} [(O + \lambda' S) \delta \varphi - (N + \lambda' R) \delta \theta]$$

$$= (Q-G) \times n + \dot{\psi}_i \frac{x \cos \psi_i \sin \theta_i - y \sin \psi_i \sin \theta_i}{(O + \lambda' S)} \sin \left(\left| \frac{\tilde{\omega} N}{\dot{\psi}_i} t + \chi \right| \right).$$

Da questa risulta che: le altezze dei punti del piano (6) sul piano orizzontale per il baricentro subiscono delle variazioni, in fase, di periodo $2\pi/\dot{\psi}_i \tilde{\omega} N$ e con variazioni massime proporzionali alla distanza dell'asse GP.

Risultato analogo avremmo per l'altro piano la cui equazione, costruita come la (6), porta λ'' in luogo di λ' .

Meccanica. — *Sul problema variazionale che ammette prefissate traiettorie.* Nota di E. GUGINO, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. G. GIORGI.

§ 1. — OGGETTO DELLA RICERCA.

Sia $L(x|\dot{x})$ una funzione qualsivoglia di $2n$ argomenti x ed \dot{x} ($i = 1, 2, \dots, n$), che non sia però somma di due funzioni omogenee, l'una di grado zero e l'altra di grado uno rispetto alle \dot{x} . Si considerino le x^i come funzioni di un parametro t , che può interpretarsi come tempo, e le \dot{x}^i come loro derivate; in una precedente Nota⁽²⁾ abbiamo dimostrato che le traiettorie γ del problema variazionale

$$(1) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} L(x|\dot{x}) dt = 0,$$

ove t_0 e t_1 sono limiti fissi e si riguardino le δx^i arbitrarie, purchè nulle agli estremi, e $\delta t = 0$, sono definite dall'equazione, pur essa variazionale, del tipo:

$$(2) \quad \delta \int_{\gamma} L'(x|dx/E) = 0$$

la cui funzione $L'(x|dx/E)$ è sempre omogenea di primo grado nei dx^i ed E è una costante arbitraria. La funzione $L'(x|dx/E)$ è univocamente deter-

(1) Nella seduta del 1º novembre 1936.

(2) E. GUGINO, *Sulle traiettorie di problemi variazionali.* «Rend. Lincei», vol. XXIV, ser. 6^a, 2^a sem., p. 124.

minata pel tramite della sola $L(x|\dot{x})$; essa si ottiene eliminando il tempo dalla forma differenziale lineare $\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} dx^i$, per mezzo dell'integrale generalizzato dell'energia

$$(3) \quad H(x|\dot{x}) = E$$

relativo al sistema lagrangiano

$$(1') \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

equivalente alla (1); la funzione $H(x|\dot{x})$ è notoriamente definita dalla

$$(4) \quad H = \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \dot{x}^i - L.$$

Si supponga ora che siano note, sotto forma variazionale (2), le traiettorie del generico fascio; più particolarmente, si supponga conosciuta la sola funzione $L'(x|dx|E)$ degli argomenti $x^i, dx^i (i = 1, 2, \dots, n)$ e del parametro E , omogenea di primo grado nei dx^i .

Se si introduce ulteriormente una variabile t , da riguardare come tempo, resta manifestamente definita sulle traiettorie del generico fascio, relativo ad un prefissato valore di E , una legge temporale di percorrenza, quando si associa all'equazione variazionale (2) un'equazione addizionale della forma:

$$(5) \quad G(x|\dot{x}|E) = 0$$

purchè G , funzione delle $x^i, \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$ e del parametro E , contenga effettivamente il dt ; posto, per semplicità, $\tau = dt$ e $\zeta^i = dx^i$, il primo membro della (5) contiene esplicitamente τ , purchè soltanto sia:

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = - \frac{1}{\tau} \sum_i^n \frac{\partial G}{\partial \dot{x}^i} \dot{x}^i = 0$$

il che implica, che $G(x|\dot{x}|E)$ non sia funzione omogenea di grado zero nelle \dot{x}^i .

Supposta tale condizione soddisfatta, la (5) definisce univocamente il

$$(5') \quad dt = \chi(x|dx|E)$$

e tale relazione è atta a caratterizzare esplicitamente la legge temporale di percorrenza, definita dalla (5), quando, integrato il sistema differenziale fra le sole x^i , equivalente alla (2), si conoscano le equazioni delle traiettorie in termini finiti.

In generale, però, le equazioni orarie $x^i = x^i(t)$, cui si perviene in definitiva coll'indicato procedimento, non provengono dalla integrazione di un sistema lagrangiano (1'); in altri termini le (2) e (5) non possono, in generale, riguardarsi equivalenti ad un problema variazionale del tipo (1), relativo ad una opportuna funzione lagrangiana $L = L(x|\dot{x})$.

Proposito nostro è quello di mostrare che, data la funzione $L'(x|\dot{x}|E)$, omogenea di primo grado nei $d\dot{x}^i$, nell'ipotesi ulteriore che la $\frac{\partial^2 L'(dx|E)}{\partial E^2}$ non sia identicamente nulla, esiste sempre una particolare legge temporale di percorrenza delle traiettorie del generico fascio, definita da una ben determinata relazione del tipo (5'), tale che, associando la (5') alla (2), riesca sempre possibile determinare univocamente la funzione lagrangiana $L(x|\dot{x})$ del problema variazionale originario, le cui traiettorie si identificano con quelle già prefissate. Più particolarmente, mostreremo che l'anzidetta legge temporale di percorrenza è definita dalla:

$$(I) \quad dt = \frac{\partial L'(x|\dot{x}|E)}{\partial E}$$

e la ulteriore determinazione della funzione lagrangiana $L(x|\dot{x})$ del corrispondente problema variazionale (1), può sempre eseguirsi mediante derivazione ed operazioni in termini finiti.

§ 2. -- RELAZIONE FUNZIONALE PARTICOLARMENTE NOTEVOLE.

Stabiliamo dapprima una relazione in cui interviene la $\frac{\partial L'(x|\dot{x}|E)}{\partial E}$, es-

sendo $L'(x|\dot{x}|E)$ la funzione omogenea di primo grado nelle \dot{x}^i ottenuta, dividendo per dt , la $L'(x|\dot{x}|E)$, che definisce le traiettorie del problema variazionale diretto, precedentemente trattato, relativo ad una data funzione $L(x|\dot{x})$, che non sia somma di due funzioni omogenee, l'una di grado zero e l'altra di grado uno nelle \dot{x}^i . Vogliamo dimostrare che, qualunque sia $L(x|\dot{x})$, tra le x^i, \dot{x}^i ed E interviene la relazione funzionale:

$$(I') \quad \frac{\partial L'(x|\dot{x}|E)}{\partial E} = 1$$

identicamente soddisfatta, qualunque siano le x^i ed \dot{x}^i , quando in luogo della E , al primo membro, a derivazione eseguita, si sostituisca l'integrale (3) generalizzato dell'energia.

A tale scopo si introduca dapprima un parametro ausiliario t' e si ponga:

$$(6) \quad x'^\sigma = \frac{dx^\sigma}{dt'} \quad (\sigma = 1, 2, \dots, n) \quad ; \quad \frac{dt}{dt'} = \lambda(x|\dot{x}|E)$$

talchè

$$(7) \quad \dot{x}^\sigma = \frac{x'^\sigma}{\lambda} \quad (\sigma = 1, 2, \dots, n).$$

Al posto delle x^σ , nelle

$$(8) \quad p_\rho(x|\dot{x}) = \frac{\partial L(x|\dot{x})}{\partial \dot{x}^\rho} \quad (\rho = 1, 2, \dots, n)$$

e nell'integrale generalizzato dell'energia (3), si sostituiscano le (7); mediante la corrispondente:

$$(3') \quad H\left(x \mid \frac{x'}{\lambda}\right) = E$$

che, nelle nostre ipotesi, è atta a definire

$$(3'') \quad \lambda = \lambda(x|x'|E),$$

si elimini λ dalle $p_\rho = p_\rho\left(x \mid \frac{x'}{\lambda}\right)$; ad eliminazione eseguita, le

$$(8') \quad p_\rho = p_\rho^*(x|x'|E) \quad (\rho = 1, 2, \dots, n)$$

che in tal modo si deducono, risultano sempre, come abbiamo dimostrato nella precedente Nota, funzioni omogenee di grado zero nelle x^i . Moltiplichiamo ambo i membri della (8') per x'^ρ e sommiamo rispetto all'indice ρ , variabile da 1 ad n ; la funzione $L'(x|x'|E)$, che così si ottiene

$$(9) \quad L'(x|x'|E) = \sum_i^n p_\rho^*(x|x'|E) x'^\rho$$

si identifica manifestamente con l'integrando della (2), diviso per dt' .

Vogliamo ora calcolare la $\frac{\partial L'(x|x'|E)}{\partial E}$; a norma della (9) si ha:

$$(10) \quad \frac{\partial L'(x|x'|E)}{\partial E} = \sum_i^n \frac{\partial p_\rho^*}{\partial E} x'^\rho.$$

Con riguardo alle (8), essendo le x^i , in base alle (7), funzioni della E pel tramite della (3''), ovviamente risulta

$$(11) \quad \frac{\partial p_\rho^*}{\partial E} = \sum_i^n \frac{\partial p_\rho}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial E}. \quad (\rho = 1, 2, \dots, n)$$

Per derivazione rapporto ad E, le (7) e (3') forniscono

$$\frac{\partial \dot{x}^\sigma}{\partial E} = -\frac{\dot{x}^\sigma}{\lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial E} \quad (\sigma = 1, 2, \dots, n) \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial E} = 1.$$

Le (11) in conformità possono mettersi sotto la forma

$$(11') \quad \frac{\partial p_\rho^*}{\partial E} = -\frac{\sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial p_\rho}{\partial \dot{x}^\sigma} \dot{x}^\sigma}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}} \quad (\rho = 1, 2, \dots, n).$$

D'altra parte si ha:

$$(12) \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial H}{\partial \dot{x}^\sigma} \dot{x}^\sigma.$$

La (4), in base alle (8), può scriversi:

$$H = \sum_{\rho=1}^n p_\rho x_\rho - L.$$

Segue, per derivazione rapporto ad \dot{x}^σ ,

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{x}^\sigma} = \sum_{\rho=1}^n \frac{\partial p_\rho}{\partial \dot{x}^\sigma} \dot{x}^\rho \quad (\sigma = 1, 2, \dots, n)$$

dopo di che, la (12) può assumere l'aspetto:

$$(12') \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{\rho=1}^n \frac{\partial p_\rho}{\partial \dot{x}^\sigma} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma.$$

Moltiplichiamo entrambi i membri delle (11') per x'^ρ e sommiamo rispetto all'indice ρ , variabile da 1 ad n ; per le (7), in base alla (12'), si ottiene identicamente

$$\sum_{\rho=1}^n \frac{\partial p_\rho^*}{\partial E} x'^\rho = \lambda(x|x'|E)$$

sicché la (10) equivale alla

$$(1'') \quad \frac{\partial L'(x|x'|E)}{\partial E} = \lambda(x|x'|E).$$

Con ciò si conclude che la funzione $\lambda(x|x'|E)$, definita implicitamente dalla (3'), si identifica altresì con la $\frac{\partial L'(x|x'|E)}{\partial E}$; deve allora riuscire possibile risolvere la (T') rispetto ad E ed, a risoluzione eseguita, si dovrà ne-

cessariamente essere ricondotti alla (3'). Dalla (I') si può inoltre eliminare agevolmente il parametro ausiliario t' ; infatti, essendo $L'(x/x'/E)$ omogenea di primo grado nelle x^i , il primo membro della (I') è pure funzione omogenea di primo grado nelle medesime variabili; d'altra parte, per la seconda delle (6), $\lambda = \frac{dt}{dt'}$, sicchè l'anzidetta eliminazione si esegue automaticamente moltiplicando entrambi i membri della (I') per dt' . Si osservi che la moltiplicazione per dt' e la derivazione rapporto ad E sono operazioni tra loro permutabili; dalla (I') si ottiene allora immediatamente la

$$(I) \quad \frac{\partial L'(x|dx|E)}{\partial E} = dt$$

ed il dt al secondo membro denota il differenziale del tempo, relativo al problema variazionale considerato; dividendo entrambi i membri dell'ultima equazione per dt , si perviene in definitiva alla relazione funzionale (I'). Tale relazione, risolta rispetto ad E, dovrà identificarsi, per quel che si è detto, con la (3') in cui ulteriormente si ponga $\lambda \equiv 1$ ed $x^i = \dot{x}^i$, ossia dovrà identificarsi con la (3). Ne segue che la (I') dovrà risultare identicamente soddisfatta, per qualsiasi scelta degli argomenti x^i ed \dot{x}^i , quando, in luogo della E, si sostituisca il secondo membro dell'integrale (3) generalizzato dell'energia.

§ 3. — RISOLUZIONE DEL PROBLEMA PROPOSTO.

Passiamo ora alla effettiva determinazione della funzione $L(x|\dot{x})$, quando sia nota la funzione $L'(x|dx|E)$, omogenea di primo grado nei dx^i , nell'ipotesi ulteriore che la $\frac{\partial^2 L(x, dx|E)}{\partial E^2}$ non sia identicamente nulla.

L'integrale generalizzato dell'energia del problema variazionale che ci proponiamo di determinare, per quel che si è detto nel precedente paragrafo, non dovrà sostanzialmente differire dalla (I').

Poniamo in conformità:

$$(I') \quad \frac{\partial L'(x|\dot{x}|E)}{\partial E} = 1$$

il che equivale a fissare, sulle traiettorie del generico fascio, la legge temporale di precorrenza definita dalla (I).

Essendo, nelle nostre ipotesi, la $\frac{\partial^2 L(x|dx|E)}{\partial E^2}$ non identicamente nulla, la (I') è atta a definire la:

$$(3^*) \quad E = H^*(x|\dot{x}).$$

Nella $L'(x|\dot{x}|E)$ si sostituisca, in luogo della E , la $H^*(x|\dot{x})$; si denoti con $L'^*(x|\dot{x})$ la corrispondente funzione di x^i ed \dot{x}^i cui si perviene.

Ovviamente si ha:

$$(13) \quad \frac{\partial L'^*(x|\dot{x})}{\partial \dot{x}^\rho} = \frac{\partial L'(x|\dot{x}|E)}{\partial \dot{x}^\rho} + \frac{\partial L'(x|\dot{x}|E)}{\partial E} \cdot \frac{\partial H^*(x|\dot{x})}{\partial x^\rho}.$$

Ciò premesso, possiamo agevolmente dimostrare che la $L(x|\dot{x})$, che si vuole determinare, risulta definita dalla semplice relazione funzionale

$$(II) \quad L(x|\dot{x}) = L'^*(x|\dot{x}) - H^*(x|\dot{x}).$$

Più particolarmente vogliamo dimostrare, che l'integrale generalizzato della energia del sistema lagrangiano relativo alla funzione $L(x|\dot{x})$, espressa dalla (II), si identifica con la (3*) e le corrispondenti traiettorie si identificano altresì con quelle prefissate. Deriviamo, infatti, la (II) rapporto ad una generica \dot{x}^ρ ; con riferimento alla (13), in base alla (I'), si ottiene:

$$(14) \quad \frac{\partial L(x|\dot{x})}{\partial \dot{x}^\rho} = \frac{\partial L'(x|\dot{x}|E)}{\partial \dot{x}^\rho} \quad (\rho = 1, 2, \dots, n)$$

che, naturalmente, deve ridursi ad una identità quando al secondo membro, a derivazione eseguita, in luogo della E , si sostituisca la $E = H^*(x|\dot{x})$, definita implicitamente dalla (I').

La funzione $H(x|\dot{x})$ dell'Hamilton relativa alla $L(x|\dot{x})$, in virtù della (4), con riguardo alle (14), assume l'aspetto:

$$H = \sum_i^n \frac{\partial L'(x|\dot{x}|E)}{\partial \dot{x}^\rho} \dot{x}^\rho - L'^*(x|\dot{x}) + H^*(x|\dot{x})$$

ed essendo $L'(x|\dot{x}|E)$ omogenea di primo grado nelle \dot{x}^i , la precedente relazione equivale più semplicemente alla:

$$H = H^*(x|\dot{x});$$

da qui segue immediatamente che l'integrale generalizzato dell'energia del sistema lagrangiano relativo alla funzione lagrangiana (II) si identifica con la (3*). Poichè d'altra parte, sempre in base alle (14), risulta:

$$\sum_i^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\rho} \dot{x}^\rho = L'(x|\dot{x}|E)$$

moltiplicando entrambi i membri per dt si riconosce immediatamente che la forma differenziale lineare $\sum_i^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\rho} dx^\rho$ si identifica con la $L'(x|dx|E)$

da cui è eliminata ogni traccia del tempo. Si conclude quindi, che le traiettorie del problema variazionale (1), la cui funzione lagrangiana sia espressa dalla (II), coincidono con le traiettorie definite dalla equazione variazionale (2), la cui funzione sotto il segno integrale si identifica con la $L'(x|\dot{x}|E)$ prefissata.

§ 4. — CASO DINAMICO IRREVERSIBILE.

Con riferimento ad un problema dinamico irreversibile, tale che la forza viva T del sistema materiale, sollecitato da forze derivanti dal potenziale $U(x)$, sia della forma $T = T_2 + T_1 + T_0$ con

$$T_2 = \frac{I}{2} \sum_i^n g_{\varrho\sigma} \dot{x}^\varrho \dot{x}^\sigma ; \quad T_1 = \sum_i^n g_{\varrho\varrho} \dot{x}^\varrho$$

e $\dot{x}^\varrho, g_{\varrho\varrho}$ funzioni delle sole x^ϱ , abbiamo già dimostrato nella precedente Nota, che le traiettorie γ del sistema sono definite dall'equazione variazionale:

$$(2') \quad \delta \int \sqrt{2(U + T_0 + E) \sum_{\varrho\sigma} g_{\varrho\sigma} dx^\varrho dx^\sigma + \sum_i^n g_{\varrho\varrho} dx^\varrho} = 0.$$

La corrispondente funzione $L'(x|\dot{x}|E)$, assume l'aspetto:

$$(2'') \quad L'(x|\dot{x}|E) = \sqrt{2(U + T_0 + E) \sum_{\varrho\sigma} g_{\varrho\sigma} \dot{x}^\varrho \dot{x}^\sigma + \sum_i^n g_{\varrho\varrho} \dot{x}^\varrho}.$$

Supponiamo, invece, noto l'integrando dell'equazione variazionale (2'); vogliamo determinare la funzione lagrangiana del relativo problema dinamico.

A norma della (I'), la (2'') fornisce:

$$\frac{\sum_i^n g_{\varrho\sigma} \dot{x}^\varrho \dot{x}^\sigma}{\sqrt{2(U + T_0 + E) \sum_{\varrho\sigma} g_{\varrho\sigma} \dot{x}^\varrho \dot{x}^\sigma}} = 1$$

da cui, risolvendo rispetto ad E , si ottiene

$$(3'') \quad E = \frac{I}{2} \sum_i^n g_{\varrho\sigma} \dot{x}^\varrho \dot{x}^\sigma - (T_0 + U)$$

che notoriamente costituisce l'integrale generalizzato dell'energia.

La funzione $L''(x|\dot{x})$, superiormente introdotta, nel caso in esame, si ottiene dalla (2'') per sostituzione della E con la (3''); si ha in conformità

$$L''(x|\dot{x}) = \sum_i^n g_{\varrho\sigma} \dot{x}^\varrho \dot{x}^\sigma + \sum_i^n g_{\varrho\varrho} \dot{x}^\varrho.$$

A norma della (II), in base alla precedente ed alla (3''), la funzione lagrangiana che si vuol determinare è espressa dalla:

$$L(x|\dot{x}) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^n g_{\sigma\sigma} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\sigma + \sum_{\sigma=1}^n g_{0\sigma} \dot{x}^\sigma + T_0 + U$$

che è precisamente la funzione lagrangiana $L = T + U$ del sistema differenziale (1'), che definisce il moto del sistema materiale che si considera.

Meccanica (Idromeccanica). — *Sulla biforcazione di una vena liquida dovuta a un ostacolo circolare.* Nota di C. JACOB, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

1. Consideriamo nel piano $\zeta = x + iy$ una corrente liquida di larghezza finita, animata di una velocità asintotica all'infinito parallela all'asse reale e di valore V_∞ , che sia limitata da due linee di flusso lungo le quali la corrente scorre tra il fluido in riposo. Noi supporremo che questa corrente urti contro un ostacolo rigido S di forma circolare attorno al quale si determina una biforcazione del getto; a poppa dell'ostacolo si forma una regione infinita di liquido in riposo che separa le due correnti biforate. Ammetteremo che il movimento considerato sia permanente e irrotazionale.

Si sa che le formule che danno la soluzione indeterminata (nel senso di Levi-Civita) di questo problema, sono state stabilite da Cisotti⁽²⁾ nel caso di un ostacolo S di forma qualunque. Nella presente Nota, ci proponiamo di determinare la soluzione del problema nel caso in cui, l'ostacolo S essendo di forma circolare, si suppone di più che la configurazione considerata sia simmetrica rispetto all'asse Ox .

Rammentiamo ancora le ricerche relative a questo soggetto di Quarleri, Weinstein, Leray e le nostre concernenti la messa in equazione, l'esistenza, l'unicità e le proprietà della soluzione nel caso di una corrente di larghezza infinita⁽³⁾. Seguendo delle vie differenti, Leray⁽⁴⁾ è riuscito d'altronde a risolvere, sempre nel caso di una corrente infinita, il problema

(1) Nella seduta del 6 dicembre 1936.

(2) U. CISOTTI, «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», XX, 1911, pp. 314 e 494.

(3) Per la bibliografia vedi la mia Tesi, «Mathematica», to. XI, 1935, p. 150. I metodi che impieghiamo nel presente lavoro costituiscono una generalizzazione di quelli concernenti il caso del fluido illimitato in tutti i sensi e che abbiamo esposto in una comunicazione fatta alla Società delle Scienze di Cluj il 24 maggio 1935.

(4) J. LERAY, «Commentarii Mathematici Helvetici», 8, 1935-36, pp. 149-180 e 250-263.

per degli ostacoli più generali. I suoi risultati possono del resto estendersi alle correnti limitate dalle linee del getto o ancora da pareti piane⁽¹⁾.

2. Le notazioni adottate sono quelle di Cisotti⁽²⁾. Sia $f = \varphi + i\psi$ il potenziale complesso del movimento. Indichiamo con b e $-b$ ($b > 0$), i valori che prende la funzione di corrente ψ sulle linee del getto esterne λ_1 e λ'_1 ; si prende $\psi = 0$ sull'ostacolo e sulle linee del getto λ_2 e λ'_2 che se ne distaccano.

Rappresentando il campo del piano f sul semicerchio del piano ζ di Levi-Civita, si ha

$$(1) \quad f = \frac{b}{\pi} \log \frac{\left(\xi'' + \frac{1}{\xi''} \right)^2}{\left(\xi'' + \frac{1}{\xi''} \right)^2 - \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)^2}, \quad \text{con } 0 < \xi'' < 1, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Sia ancora $w = u - iv$ la velocità complessa del movimento. Poniamo $w = V_o e^{-i\omega}$, $\omega = \theta + i\tau$ e $\omega = \omega_o - \Omega$, $\omega_o = \theta_o + i\tau_o$, $\Omega = \Theta + iT$ definendo $\omega_o(\zeta)$ come una funzione analitica di ζ nel primo quadrante del cerchio $|\zeta| \leq 1$, (campo D), che verifica le condizioni ai limiti: $\theta_o = -\frac{\pi}{2}$ per $\zeta = e^{i\sigma}$ ($0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}$), $\theta_o = 0$ sulla parte $\xi = 0$, $0 \leq \eta \leq 1$ dell'asse immaginario e $\tau_o = 0$ sulla parte $0 \leq \xi \leq 1$, $\eta = 0$ dell'asse reale. Il passaggio dal piano ζ al piano ζ del movimento si farà mediante la formula:

$$(2) \quad dz = \frac{e^{i\omega_o}}{V_o} \cdot e^{-i\Omega} \cdot df, \quad (\zeta = 0 \quad \text{per } f = 0, \quad \text{dunque per } \zeta = i).$$

Se ne deduce agevolmente l'espressione del raggio di curvatura dell'ostacolo; nel caso attuale, essendo R_o il raggio dell'arco circolare considerato, si avrà la condizione

$$(3) \quad \frac{dT}{dn_i} = \frac{2b}{\pi R_o V_o} \frac{\sin \sigma + \sin^2 \sigma}{\lambda^2 - \cos^2 \sigma} e^{T(\sigma)}, \quad \text{sul contorno} \quad \zeta = e^{i\sigma}, \quad 0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2},$$

ponendo $\lambda = \frac{1}{2} \left(\xi'' + \frac{1}{\xi''} \right)$. Si ha di più

$$(4) \quad T = 0 \quad \text{sopra} \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad (\text{asse reale}),$$

(1) È allo studio di quest'ultimo caso che si è applicato J. KRAVTCHEKO nelle sue Note recenti dei «Comptes Rendus, di Parigi», to. 202, 1936, p. 276 e to. 203, 1936, p. 426.

(2) U. CISOTTI, *Idromecanica Piana*, parte seconda, p. 284 (Milano, 1922).

e altresì

$$(5) \quad \Theta = o \quad \text{sopra} \quad 0 \leq \frac{\zeta}{i} \leq 1, \quad (\text{asse immaginario}).$$

in virtù della simmetria del movimento.

Tutto dunque è condotto alla risoluzione del seguente problema ai limiti: determinare una funzione $\Omega(\zeta) = \Theta + iT$, continua sul contorno di D, olomorfa in questo campo e che verifichi le condizioni (3), (4), (5). Una volta determinata $\Omega(\zeta)$ si avrà per mezzo della relazione (2) tutti gli elementi geometrici e cinematici del movimento. La soluzione dipenderà dai parametri b e λ^2 , che bisognerà determinare imponendo alla corrente una larghezza data L all'infinito a monte e all'arco circolare-ostacolo una ampiezza egualmente data. Valutando la portata in due modi diversi si trova per la prima condizione

$$(6) \quad L = \frac{2b}{V_o};$$

d'altra parte la lunghezza dell'arco-ostacolo contato a partire dal punto O di biforcazione della corrente fino al punto di distacco di λ_1 o di λ_2 è dato da

$$(7) \quad \Delta = \frac{2b}{\pi V_o} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{p(\sigma)}{\lambda^2 - \cos^2 \sigma} e^{T(\sigma)} d\sigma = - R_o [\Theta]_{\zeta=1},$$

ponendo per semplificare $p(\sigma) \equiv \sin \sigma + \sin^2 \sigma$.

Affinchè le linee del getto sieno accettabili è necessario e sufficiente, secondo un teorema di Villat⁽¹⁾, che la condizione

$$(8) \quad J = \frac{2b}{\pi R_o V_o} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{q(\sigma)}{\lambda^2 - \cos^2 \sigma} e^{T(\sigma)} d\sigma \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{con } q(\sigma) = \frac{p(\sigma)}{\sin \sigma} = 1 + \sin \sigma,$$

sia verificata; si sa che se l'eguaglianza ha luogo la linea del getto ammette una curvatura eguale a quella dell'ostacolo al punto di distacco. In questo caso si dice che il distacco avviene in *prora*; bisognerà dunque esaminare pure se si può scegliere i parametri in modo d'avere una prora.

3. ESISTENZA E UNICITÀ DELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA AI LIMITI.

Secondo le condizioni ai limiti (3), (4), (5), si constata immediatamente che $\Theta \leq o$ sopra $\zeta = e^{i\alpha}$, $0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}$, dunque pure in tutto il campo

(1) H. VILLAT, *Sur la validité des solutions de certains problèmes d'Hydrodynamique*. « Journal de Mathématiques », 1914, 6^a sér., to. 10, pp. 231-290.

D., poiché Θ non potrebbe raggiungere i suoi valori estremi sulla porzione di contorno situata sull'asse reale, dove $T = 0$. Si ha parimente $T \leq 0$ in D., non potendosi raggiungere un massimo positivo di T sull'arco $\zeta = e^{i\sigma}$ a causa della relazione (3). Consideriamo ora la funzione $\Omega_i(\zeta) = \Theta_i + i T_i$ analitica in D e verificante le condizioni al contorno⁽¹⁾:

$$\begin{cases} \frac{d T_i}{d n_i} = \frac{2}{\pi R_0 V_0} \frac{p(\sigma)}{\lambda^2 - \cos^2 \sigma} & \zeta = e^{i\sigma}, \quad 0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2} \\ T_i = 0 & \text{sopra } 0 \leq \zeta \leq 1 \\ \Theta_i = 0 & \text{sopra } 0 \leq \frac{\zeta}{i} \leq 1. \end{cases}$$

Calcolando la derivata normale di $b T_i - T$ sull'arco $\zeta = e^{i\sigma}$, si è facilmente condotti alle ineguaglianze

$$(9) \quad b \Theta_i \leq \Theta \leq 0, \quad b T_i \leq T \leq 0,$$

valevoli in D.

Il problema ai limiti considerato si conduce, per mezzo di principii conosciuti, alla risoluzione di una equazione integrale non lineare

$$(10) \quad T(\sigma) = - \frac{2b}{\pi R_0 V_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{p(\varepsilon)}{\lambda^2 - \cos^2 \varepsilon} e^{T(\varepsilon)} K(\sigma, \varepsilon) d\varepsilon$$

del tipo di Schmidt. Dalla limitazione trovata per $T(\sigma)$, risulta che il metodo «d'Arzela-Schmidt», che Leray ha saggiato nella sua tesi⁽²⁾, è applicabile alla equazione in discorso. Essa ammette dunque almeno una soluzione per $b \geq 0, 1 < \lambda < +\infty$. Di più, questa equazione ammette una soluzione unica. Ciò risulta in conseguenza di un procedimento che abbiamo in altra parte impiegato⁽³⁾. Osserviamo ancora che la soluzione $T(\sigma; b, \lambda^2)$ dell'equazione (10) è una funzione analitica di b e di λ^2 .

4. PROPRIETÀ DELLA SOLUZIONE.

TEOREMA. — *Si hanno le seguenti ineguaglianze*

$$(11) \quad - \frac{1}{b} < \frac{\partial T}{\partial \sigma} \leq 0, \quad 0 \leq \frac{\partial T}{\partial \lambda^2} \leq \frac{1}{\lambda^2 - 1},$$

valide in ogni punto di D.

(1) La determinazione di $\Omega_i(\zeta)$ si conduce alla risoluzione di un problema di NEUMANN per il quale la condizione di compatibilità è verificata.

(2) J. LERAY, «Journal de Mathématiques», 1933, 9^e sér., to. 12, pp. 1-20.

(3) Loc. cit. secondo, p. 163.

Infatti, la funzione di $\zeta : \frac{\partial \Omega}{\partial b} = \frac{\partial \Theta}{\partial b} + i \frac{\partial T}{\partial b}$ è regolare in D e soddisfa alle condizioni ai limiti

$$\begin{cases} \frac{d}{dn} \left(\frac{\partial T}{\partial b} \right) = \frac{2}{\pi R_o V_o} \cdot \frac{p(\sigma)}{\lambda^2 - \cos^2 \sigma} e^T \cdot \left(b \frac{\partial T}{\partial b} + 1 \right) & \zeta = e^{i\sigma}, \quad 0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\partial T}{\partial b} = 0 & \text{sopra} \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial b} = 0 & \text{sopra} \quad 0 \leq \frac{\zeta}{i} \leq 1. \end{cases}$$

Da ciò risulta che un massimo positivo di $\frac{\partial T}{\partial b}$ non saprebbe trovarsi sull'asse immaginario né sull'arco $\zeta = e^{i\sigma}$. Si ha dunque $\frac{\partial T}{\partial b} \leq 0$. Si ha pure nel punto $\zeta_1 = e^{i\sigma_1}$ dove $\frac{\partial T}{\partial b}$ raggiunge il suo minimo

$$b \left(\frac{\partial T}{\partial b} \right)_{\zeta_1} + 1 > 0 \quad \text{e a fortiori} \quad b \frac{\partial T}{\partial b} + 1 > 0 \text{ in D.}$$

Le inegualianze concernenti $\frac{\partial T}{\partial \lambda^2}$ si ottengono in modo analogo a partire dalle condizioni ai limiti che verifica $\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda^2}$.

CONSEGUENZE. — a) $\Delta(b, \lambda^2)$ è una funzione crescente di b e decrescente rispetto a λ^2 .

Infatti, si ha sopra l'asse reale

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial b} \right) = \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\partial T}{\partial b} \right) \leq 0 \quad \text{e} \quad \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \lambda^2} \right) = \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\partial T}{\partial \lambda^2} \right) \geq 0$$

da cui

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial b} \right)_{\zeta=1} = -\frac{\partial \Delta}{\partial b} < 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \lambda^2} \right)_{\zeta=1} = -\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda^2} > 0.$$

b) $J(b, \lambda^2)$ è una funzione crescente di b e decrescente rispetto a λ^2 . È ciò che risulta dalle relazioni

$$\frac{\partial J}{\partial b} = -\frac{\pi}{2} \left[\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial b} \right) \right]_{\zeta=1}, \quad \text{e} \quad \frac{\partial J}{\partial \lambda^2} = -\frac{\pi}{2} \left[\frac{d}{d\eta} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \lambda^2} \right) \right]_{\zeta=1}.$$

5. Le inegualianze (9) e (11) permettono di studiare il comportamento della funzione T per i grandi valori di b o di λ^2 . Andiamo ora a

stabilire un'altra inegualanza di cui avremo bisogno per la discussione completa del problema. Consideriamo a tale scopo la funzione $\theta_1 + it_1$, regolare in D, continua sul contorno e che verifica le condizioni

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{d t_1}{d n_i} = -1 & \zeta = e^{i\sigma}, \quad 0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}, \\ t_1 = 0 & \text{sopra} \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \\ \theta_1 = 0 & \text{sopra} \quad 0 \leq \frac{\zeta}{i} \leq 1. \end{cases}$$

L'esistenza di questa funzione è manifesta. Applicando alle due funzioni armoniche t_1 e T una formula di Green si trova

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(t_1 \frac{d T}{d n_i} - T \frac{d t_1}{d n_i} \right) d\sigma = 0$$

da cui, tenuto conto delle condizioni (12), si deduce

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t_1 \frac{d T}{d n_i} d\sigma = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} T(\sigma) d\sigma.$$

Basta ora riferirsi all'espressione di Δ per ottenere l'ineguaglianza

$$t_1 \left(\frac{\pi}{2} \right) \cdot \frac{\Delta}{R_o} \geq - \int_0^{\frac{\pi}{2}} T(\sigma) d\sigma$$

essendo $t_1 \left(\frac{\pi}{2} \right) = (t_1)_{\text{mass.}}$ indipendente da b e da λ^2 . Una volta stabilita questa inegualanza, si può dedurne un'altra, molto importante, che dà una limitazione inferiore di $\Delta(b, \lambda^2)$ seguendo un procedimento dovuto a Leray e che noi abbiamo già avuto occasione di impiegare in un altro lavoro⁽¹⁾. Si trova nel caso attuale

$$(13) \quad \Delta \cdot e^{\frac{4}{\pi} t_1 \left(\frac{\pi}{2} \right)} \cdot \frac{\Delta}{R_o} \geq \frac{2b}{V_o} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{p(\sigma)}{\lambda^2 - \cos^2 \sigma} d\sigma.$$

Questa inegualanza prova che se b tende verso l'infinito lo stesso ha luogo per Δ purché λ^2 resti limitato; parimenti se λ^2 tende verso $+1$,

(1) Loc. cit. secondo, p. 168.

b restando limitato, Δ tenderà verso $+\infty$. Siccome si ha

$$R_o J(b, \lambda^2) > \Delta(b, \lambda^2),$$

la funzione $J(b, \lambda^2)$ godrà delle medesime proprietà.

Così stando le cose, si possono stabilire i seguenti teoremi⁽¹⁾.

TEOREMA I. - *Essendo dato una corrente di larghezza finita e un arco circolare di lunghezza prefissata, esiste una soluzione unica corrispondente al problema simmetrico della scia.*

Infatti, si avrà da determinare λ^2 in funzione di b colla condizione $\Delta(b, \lambda^2) = \Delta_0$. Ora, noi abbiamo visto che Δ era una funzione decrescente di λ^2 , variante entro $+\infty$ per $\lambda^2 = +1$ e zero per $\lambda^2 = +\infty$, [in conseguenza di (9)]. L'equazione precedente definisce dunque in modo univoco λ^2 come funzione di b ; questa funzione sarà del resto crescente rispetto a b . Quanto alla determinazione di b in funzione della larghezza della corrente all'infinito a monte, essa è immediata dalla formula (6).

TEOREMA II. *Essendo data una corrente liquida di larghezza finita che urta un ostacolo circolare, esiste una soluzione unica del problema simmetrico della prua.*

Infatti, la relazione $J(b, \lambda^2) = \frac{\pi}{2}$ definisce una sola funzione $\lambda^2(b)$,

che tende verso $+1$ quando b tende verso zero e verso $+\infty$ quando lo stesso accade di b ; $\lambda^2(b)$ varia crescendo costantemente entro questi due limiti. La larghezza della corrente all'infinito a monte essendo assegnata, b sarà ancora determinata dalla (6).

Facciamo ancora osservare che la curva rappresentativa di $\lambda^2(b)$ separa la regione $b \geq 0, 1 \leq \lambda^2$ del piano (b, λ^2) in due regioni infinite; i punti della regione al di sopra di questa curva corrispondono a dei distacchi verso valle. Generalizzando un teorema che Leray⁽²⁾ ha dato per il caso di una corrente di larghezza infinita, si potrebbe mostrare che la velocità delle particelle fluide sono fisicamente accettabili per i punti (b, λ^2) situati al di sopra della curva $J(b, \lambda^2) = \frac{\pi}{2}$.

Non insisteremo ulteriormente sulle altre proprietà degli elementi geometrici del movimento, come la direzione asintotica delle linee del getto all'infinito a valle, essendo nostra intenzione di sviluppare altrove i risultati di questa Nota. Ci limiteremo ora a dare delle brevi indicazioni sul caso della corrente di larghezza infinita.

(1) Questi teoremi generalizzano quelli che abbiamo dato nel caso della corrente di larghezza infinita.

(2) J. LERAY, *Sur la validité des solutions du problème de la proue. Livre jubilaire de M. Marcel Brillouin*. Paris, 1935.

6. PASSAGGIO AL LIMITE.

Andiamo a cercare ciò che divengono le nostre formule quando, l'arco di cerchio avendo un valore fisso Δ_0 , la larghezza della corrente cresce costantemente tendendo verso $+\infty$. Ciò corrisponde a fare tendere il punto (b, λ^2) verso l'infinito lungo la curva $\Delta(b, \lambda^2) = \Delta_0$; essendo λ^2 una funzione di b definita dalla relazione precedente, consideriamo la funzione $\frac{d\Omega}{db} = \frac{d\Theta}{db} + i \frac{dT}{db}$ analitica e regolare rispetto a ζ , in D . Tenendo conto delle condizioni ai limiti che essa verifica, si è condotti agevolmente alle ineguaglianze

$$(14) \quad \frac{1}{b} \left(\frac{b}{\lambda^2} \frac{d\lambda^2}{db} - 1 \right) < \frac{dT}{db} < \frac{1}{b} \left(\frac{b}{\lambda^2 - 1} \cdot \frac{d\lambda^2}{db} - 1 \right),$$

le quali combinate con (11) provano che per b sufficientemente grande si ha

$$\frac{B}{b} < \frac{b}{\lambda^2} \cdot \frac{d\lambda^2}{db} - 1 < \frac{b}{\lambda^2 - 1} \cdot \frac{d\lambda^2}{db} - 1 < \frac{A}{b},$$

essendo A e B due numeri fissi. Ne segue, integrando la relazione (14) tra b_0 e b ($H \leq b_0 < b$), che la funzione $T(\xi, \eta; b, \lambda^2(b))$ converge uniformemente verso un limite $\tau(\xi, \eta)$, che è una funzione armonica in D . Di più $\Theta(\xi, \eta; b, \lambda^2(b))$ tende pure verso una funzione $\theta(\xi, \eta)$, che è armonica in D e di cui $\tau(\xi, \eta)$ è la coniugata. Risulta pure che la curva $\Delta(b, \lambda^2) = \Delta_0$ ammette una direzione asintotica il cui coefficiente angolare μ è dato dall'equazione

$$(15) \quad \frac{2\mu}{\pi V_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\sigma) e^{i\tau(\sigma)} d\sigma = \Delta_0.$$

L'equazione (15) ammette una soluzione unica. Infatti, si prouverà come al n° 4, stabilendo dapprima le condizioni ai limiti che verifica $\theta + i\tau$, che si hanno le ineguaglianze $\frac{\partial\tau}{\partial\mu} \leq 0$, $\mu \frac{\partial\tau}{\partial\mu} + i > 0$; queste ineguaglianze provano che il primo membro di (15) è una funzione crescente di μ , che varia tra zero e $+\infty$; (questa ultima circostanza risulta dalla ineguaglianza di Leray).

Meccanica. — *Corrente traslocircolatoria in presenza di un ostacolo costituito da due lamine incrociate.* Nota di L. SONA, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

Forma oggetto di questa Nota la determinazione del moto liquido piano irrotazionale generato dalla presenza, in una corrente traslocircolatoria, di un ostacolo costituito da due lamine uguali incrociantisi nei loro punti di mezzo e comunque inclinate l'una rispetto all'altra.

Il problema viene risolto mediante la rappresentazione conforme del piano del moto tagliato dalle due lamine su un piano forato dal cerchio di raggio uno.

La trasformazione conforme che definisce la rappresentazione viene assegnata in termini finiti ed in forma assai semplice, e questo costituisce il risultato principale della Nota.

La determinazione della velocità del liquido nei vari punti del piano del moto segue immediatamente con procedimento noto.

Viene inoltre fatto un cenno su alcuni casi particolari e sulla possibilità di regolarizzazione dei salienti.

In una Nota che seguirà a breve distanza la presente, verranno determinate le azioni dinamiche esercitate dalla corrente investitrice sull'ostacolo dianzi considerato.

I. TRASFORMAZIONE CONFORME. — Nel piano del moto, due lamine rettilinee di ugual lunghezza $2l$, si intersecano scambievolmente per metà formando due angoli le cui semiaperture indicheremo con α e $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Assumiamo come assi coordinati x e y le bisettrici di tali angoli. L'ostacolo si presenta così simmetrico rispetto ad entrambi gli assi e si ha sempre

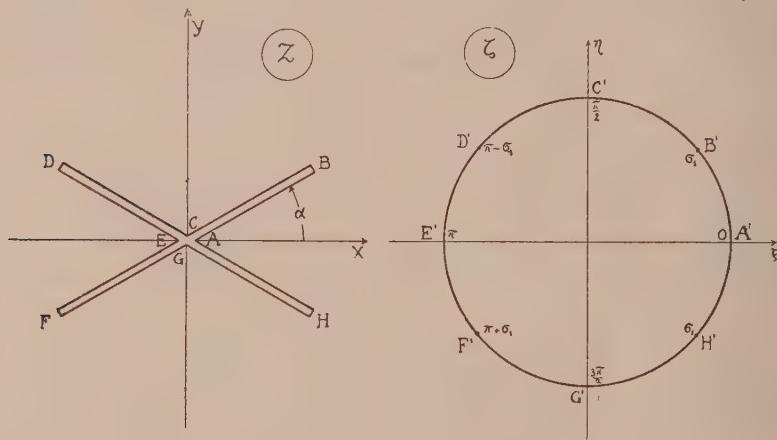
$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2};$$

nei casi estremi $\alpha = 0$, $\frac{\pi}{2}$, l'ostacolo stesso si riduce ad una lamina semplice di lunghezza $2l$ avente il punto di mezzo nell'origine e situata sull'asse x o y rispettivamente.

Vogliamo rappresentare il piano complesso $\zeta = x + iy$ tagliato dalle due lamine sul piano complesso $\zeta = \xi + i\eta$ forato da un cerchio di raggio

(1) Nella seduta del 6 dicembre 1936.

unitario. Il contorno dell'ostacolo dato è un poligono, ABCDEFGH (v. figura), più precisamente un ottagono, coi lati di ugual lunghezza l ; esso si ottiene percorrendo prima in un senso poi in senso opposto ciascuno dei semilati delle lame. A tale contorno deve corrispondere nel piano ζ la circonferenza di raggio unitario con centro nell'origine. Data la simmetria del sistema possiamo senz'altro stabilire nel modo seguente la corrispondenza fra i punti angolosi del contorno dato e i punti della circonferenza che li devono rappresentare.



a) Ai punti A, C, E, G tutti coincidenti coll'origine degli assi nel piano ζ , facciamo corrispondere rispettivamente i punti $\zeta = 1, \zeta = i, \zeta = -1, \zeta = -i$.

b) Al punto B , estremo saliente situato nel primo quadrante, corrisponda il punto $\zeta = e^{i\sigma_1}$, essendo σ_1 un angolo acuto funzione di α che determineremo.

c) Ai punti D, F, H , estremi salienti situati rispettivamente nel secondo, terzo e quarto quadrante corrisponderanno, per ragioni di simmetria, i punti $\zeta = e^{i(\pi - \sigma_1)}, \zeta = e^{i(\pi + \sigma_1)}, \zeta = e^{-i\sigma_1}$. Saranno pure corrispondenti i punti all'infinito dei due piani.

L'ostacolo considerato appartiene alla categoria degli ostacoli poligonalì già studiati dal Cisotti⁽¹⁾ il quale ha dato una regola per assegnare la forma differenziale della trasformazione. Seguendo tale regola e tenendo

(1) U. CISOTTI, *Idromeccanica piana*, parte I, p. 38. Vedi anche A. R. FORSYTH, *Theory of function of a complex variable*, 2^a ed., p. 632 e sg., e la mia Nota: *Corrente traslocircolatoria che investe una lamina bilatera*. «Rend. Acc. Lincei», ser. 6^a, vol. XIX, 1934, p. 238 e sg.

presente la forma precedentemente imposta alla rappresentazione possiamo porre:

$$(1) \quad d\zeta = \frac{l}{b} \frac{(\zeta^2 - e^{2i\sigma_1})(\zeta^2 - e^{-2i\sigma_1})}{\zeta^2(\zeta^2 - 1)} \left(\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} d\zeta,$$

con b costante da determinarsi.

La formula scritta rispecchia il comportamento ben noto del $d\zeta$ nei punti angolosi. Precisamente il $d\zeta$ si annulla del primo ordine nei punti cuspidali salienti B, D, F, H e diventa infinito di ordine $1 - \frac{2\alpha}{\pi}$ nei due vertici rientranti A ed E, di ordine $\frac{2\alpha}{\pi}$ nei due vertici rientranti C e G.

Per determinare il valore dell'angolo σ_1 osserviamo che mentre il punto del piano ζ percorre l'arco A' B' C' della circonferenza $|\zeta| = 1$, nel piano ζ , il punto corrispondente parte da A ($\zeta = 0$) e dopo aver descritto i due lati sovrapposti AB e BC ritorna in C (pure con $\zeta = 0$). Avremo perciò

$$\int_{A'B'C'} \frac{d\zeta}{d\zeta} d\zeta = 0,$$

o anche in base alla (1), tenendo presente ché sulla circonferenza $|\zeta| = 1$ si ha $\zeta = e^{i\sigma}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \sigma_1 - \sin^2 \sigma}{\sin \sigma} \cdot (\tan \sigma)^{\frac{2\alpha}{\pi}} d\sigma = 0.$$

Integrando per parti il secondo dei due integrali che si ottengono separando i termini della differenza si arriva subito all'equazione

$$\left(\sin^2 \sigma_1 - \frac{2\alpha}{\pi} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan \sigma)^{\frac{2\alpha}{\pi}} \cdot \frac{d\sigma}{\sin \sigma} = 0,$$

dalla quale, osservando, come è facile riscontrare, che l'integrale è finito e positivo, si deduce subito

$$(2) \quad \sin^2 \sigma_1 = \frac{2\alpha}{\pi}.$$

L'angolo acuto σ_1 risulta così univocamente determinato.

La forma differenziale della trasformazione (1) diventa allora

$$(1') \quad d\zeta = \frac{l}{b} \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} + \frac{8\alpha}{\pi} \frac{1}{\zeta^2 - 1} \right) \left(\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} d\zeta;$$

questa è integrabile colle ordinarie funzioni e, tenuto conto che per $\zeta = 1$ si ha $\zeta = 0$, fornisce finalmente la formula

$$(3) \quad \zeta = \frac{l}{b} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \left(\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}},$$

che dà in termini finiti la rappresentazione conforme ricercata.

È facile controllare che essa risponde a tutte le condizioni imposte.

Il valore della costante b si calcola immediatamente tenendo presente che per $\zeta = e^{i\sigma_1}$ si deve avere $\zeta = l e^{\alpha i}$; si ottiene

$$b = 2 \cos \sigma_1 \cdot (\operatorname{tg} \sigma_1)^{\frac{2\alpha}{\pi}},$$

cioè in base alla (2)

$$(4) \quad b = 2 \cdot \left(\frac{2\alpha}{\pi} \right)^{\frac{\alpha}{\pi}} \cdot \left(\frac{\pi - 2\alpha}{\pi} \right)^{\frac{\pi - 2\alpha}{2\pi}}.$$

La costante b , funzione solo di α , acquista sempre valore positivo per $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e per α tendente a zero o a $\frac{\pi}{2}$ tende pure ad un limite finito e positivo.

Scambiando α con $\frac{\pi}{2} - \alpha$ non cambia il valore di b .

2. CASI PARTICOLARI. — a) Sia $\alpha = 0$; l'ostacolo diventa una lamina semplice di lunghezza $2l$ posta lungo l'asse x col punto di mezzo nell'origine. Si ha allora $\sigma_1 = 0$, $\lim_{\alpha=0} b = 2$ e la trasformazione diventa

$$(3') \quad \zeta = \frac{l}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right),$$

come è ben noto.

b) Per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ l'ostacolo diventa un lamina semplice di lunghezza $2l$ posta lungo l'asse y col punto di mezzo nell'origine. Si ha $\sigma_1 = \frac{\pi}{2}$, $\lim b = 2$ e la trasformazione acquista la forma pure ben nota:

$$(3'') \quad \zeta = \frac{l}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right);$$

c) Per $\alpha = \frac{\pi}{4}$ le due lame sono perpendicolari; si ha $\sigma_1 = \frac{\pi}{4}$,

$h = \sqrt{2}$ e la trasformazione diventa⁽¹⁾

$$(3'') \quad \zeta = \frac{l}{\sqrt{2}} \frac{(\zeta^i - 1)^{\frac{1}{2}}}{\zeta}.$$

3. POTENZIALE DEL MOTO E VELOCITÀ. — Una corrente traslatoria di velocità asintotica $Ve^{-i\beta}$ investa l'ostacolo considerato nei numeri precedenti; β rappresenta allora l'angolo formato dalla direzione della corrente coll'asse x e V è il modulo della velocità stessa. Si aggiunga una corrente circolatoria intorno all'ostacolo con circolazione C .

Siccome la (1) all'infinito diventa

$$d\zeta = \frac{l}{h} d\zeta,$$

la corrente traslocircolatoria immagine di quella ora definita avrà il modulo ridotto a $\frac{Vl}{h}$ mentre rimarranno invariate β e C .

Nel piano ζ il potenziale del moto sarà allora, come è ben noto,

$$(5) \quad f(\zeta) = \frac{Vl}{h} \left(\frac{\zeta}{e^{i\beta}} + \frac{e^{i\beta}}{\zeta} \right) + \frac{C}{2\pi i} \log \zeta.$$

La velocità del moto nel piano ζ viene come al solito data da

$$w = \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{d\zeta},$$

in cui la $\frac{d\zeta}{d\zeta}$ viene fornita dalla (1). Si ottiene così la seguente espressione per la velocità del liquido nei punti del piano ζ espressa mediante i punti del piano rappresentativo

$$(6) \quad w = \left[V \left(\frac{\zeta}{e^{i\beta}} - \frac{e^{i\beta}}{\zeta} \right) + \frac{Ch}{2\pi i l} \right] \frac{\zeta(\zeta^2 - 1)}{(\zeta^2 - e^{2i\sigma_1})(\zeta^2 - e^{-2i\sigma_1})} \left(\frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2 - 1} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}},$$

avendo σ_1 e h i valori dati dalle (2) e (4).

La w acquista all'infinito il valore $Ve^{-i\beta}$ in conformità dell'ipotesi fatta, diventa infinita per $\zeta = \pm e^{i\sigma_1}$ e $\zeta = \pm e^{-i\sigma_1}$ cioè nei quattro punti estremi B, D, F, H delle due lame che sono punti cuspidali salienti, si annulla per $\zeta = \pm 1$ e $\zeta = \pm i$ cioè nei quattro punti angolosi A, C, E, G

(1) Facendo ruotare di $\frac{\pi}{4}$ tanto il piano ζ quanto il piano ζ la (3'') va a coincidere colla formula ottenuta dal MASOTTI, che è la (11) della Nota del CISOTTI, *Sulla regolarizzazione di salienti idrodinamici* («Rend. Sem. Mat. e Fis. di Milano», vol. VIII, 1934), quando si faccia in essa $n = 4$.

che rappresentano i vertici di quattro rientranti. Il comportamento di w è dunque quello richiesto in tutti i casi consimili.

La velocità si annulla anche per valori di ζ soddisfacenti l'equazione

$$V \left(\frac{\zeta}{e^{i\beta}} - \frac{e^{i\beta}}{\zeta} \right) + \frac{C b}{2\pi i l} = 0.$$

Le radici di questa equazione hanno i moduli reciproci.

Una sola di esse è quindi interna al campo del moto quando detti moduli siano diseguali; tale circostanza si verifica se la circolazione C è abbastanza grande, precisamente quando

$$|C| > \frac{4\pi V l}{b}.$$

Se i due moduli sono invece uguali, e in conseguenza entrambi uguali a uno, ζ è della forma $e^{i\sigma}$, e l'equazione scritta diventa

$$\sin(\sigma - \beta) = \frac{C b}{4\pi l V}.$$

A questa corrispondono valori reali per σ quando $|C| \leq 4\pi l V$; essi determinano due punti d'arresto sul contorno, punti che coincidono in uno solo se $|C| b = 4\pi l V$.

Se la corrente è puramente traslatoria i punti d'arresto sono sempre sul contorno e vanno a coincidere con A, E (v. fig. 1) se $\beta = 0, \pi$; con C, G se $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$.

4. REGOLARIZZAZIONE DEL MOTO IN UNO O IN DUE DEI SALIENTI IDRODINAMICI. — Disponendo opportunamente della circolazione è possibile ottenere la regolarizzazione del moto in uno degli estremi delle due lame.

Volendo per esempio regolarizzare l'estremo B ($\zeta = e^{i\sigma_1}$) bisognerà porre

$$(7) \quad C = \frac{4\pi l V}{b} \sin(\sigma_1 - \beta).$$

Per un tale valore della circolazione la velocità acquista in B un valore finito dato da

$$w_B = \frac{l}{2} V e^{-\alpha i} \cdot \frac{\cos(\sigma_1 - \beta)}{\cos \sigma_1} (\operatorname{ctg} \sigma_1)^{\frac{2\alpha}{\pi}} = \frac{V e^{-\alpha i}}{b} \cos(\sigma_1 - \beta).$$

Lasciando alla circolazione il valore (7) si può assegnare alla direzione della corrente traslatoria un valore tale che risulti regolarizzato il moto

anche in uno degli altri estremi oltreché in B. Precisamente assumendo $\beta = \sigma$, (o $\beta = \pi + \sigma_1$) si regolarizza l'estremo F simmetrico di B rispetto all'origine. Per $\beta = \frac{\pi}{2}$ (o $\beta = -\frac{\pi}{2}$) si regolarizza l'estremo H simmetrico di B rispetto all'asse x , e per $\beta = 0$ (o $\beta = \pi$), l'estremo D simmetrico di B rispetto all'asse y .

Geodesia. — *Sulla localizzazione di un corpo sferico mediante misure eötvössiane.* Nota di G. BOAGA, presentata⁽¹⁾ dal Socio G. CASSINIS.

Uno dei problemi teorico-pratici di primo ordine nel campo gravimetrico della geofisica è quello della *interpretazione dei dati* forniti dalla Bilancia di torsione.

Dieci anni or sono il Nikiforoff prima ed il Jung dopo hanno abborrdato per primi il suggestivo problema⁽²⁾ studiando le possibilità teoriche di determinare gli importi delle derivate seconde del potenziale per alcuni corpi di forma geometrica regolare e finiti e per alcune forme che si estendono indefinitivamente lungo una direzione⁽³⁾.

Nel primo caso tali ricerche vennero estese solamente a punti appartenenti a piani verticali passanti per il centro di massa dei corpi considerati e disposti nella direzione ovest-est; vennero pure costruiti per le derivate seconde U_{yz} e U_Δ ⁽⁴⁾ del potenziale opportuni diagrammi e successivamente in base alle considerazioni dei massimi (positivi e negativi) delle due curve rappresentanti dette derivate, stabiliti indizi sicuri circa la profondità della massa perturbante o altre caratteristiche del giacimento.

È ovvio che con questo procedimento – dal punto di vista pratico – si ammette preventivamente di conoscere almeno all'incirca la posizione della massa sotterranea perturbante, altrimenti non è possibile mettere la bilancia su punti del piano verticale contenente il centro di detta massa e quindi soddisfare alla impostazione ricordata.

Si presentava pertanto naturale la generalizzazione del problema cercando la possibilità teorica della determinazione della intensità della massa,

(1) Nella seduta del 6 dicembre 1936.

(2) A questo riguardo, consultare la Memoria fondamentale di P. NIKIFOROFF, *Physical Principles of the gravitational method of Prospecting* e le tre Note di K. JUNG pubblicate nello « Zeitschrift für Geophysik ».

(3) I risultati di queste ricerche sono riassunti nei classici trattati del ROTHÉ (1930) e dell'ALEXIANIAN (1932) concernenti i metodi di prospezione del sottosuolo e nel XXV volume, III parte, dell'*Handbuch der experimental Physik*, p. 188 e seguenti.

(4) Le altre due derivate U_{xy} e U_{xz} che si possono trarre dalle osservazioni eötvösiane sono nulle per la particolare ipotesi relativa alla collocazione della bilancia.

della sua profondità e della sua posizione planimetrica, considerando serie di misure eötvössiane disposte lungo allineamenti ovest-est e sud-nord contenuti su piani verticali *non* passanti per il centro della massa perturbante. Il problema così impostato è — a nostro parere — di fondamentale importanza nelle ricerche di carattere minerario allorquando il geofisico vuole cercare ammassi isolati di materiali pesanti, come avviene per certi minerali.

A tale scopo abbiamo, in un primo tempo, stabilite le espressioni teoriche delle derivate seconde del potenziale generato da una massa sferica sotterranea⁽¹⁾ riferite ad una terna trirettangolare collocata in modo che sul piano X, Y orizzontale, gli assi X e Y siano diretti verso i punti cardinali nord ed est e l'asse Z verticale, con la direzione positiva diretta verso l'alto.

Indicando con ξ, γ, ζ le coordinate del centro C di gravità della massa sotterranea M e con x, y, z quelle di un punto P appartenente ad un piano verticale parallelo al piano coordinato Z, Y le derivate seconde del potenziale U sul punto P sono espresse dalle:

$$(1) \quad \left| \begin{array}{l} U_{xx} = 3\epsilon \frac{M}{r^5} (\xi - x)(\zeta - z) \\ U_{yy} = 3\epsilon \frac{M}{r^5} (\gamma - y)(\zeta - z) \\ U_{xy} = 3\epsilon \frac{M}{r^5} (\xi - x)(\gamma - y) \\ U_\Delta = U_{yy} - U_{xx} = 3\epsilon \frac{M}{r^5} \{(\gamma - y)^2 - (\xi - x)^2\} \end{array} \right.$$

con ϵ costante di attrazione ($\epsilon = 66.7 \cdot 10^{-9}$ c.g.s.) e

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\gamma - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

Epperò, data la scelta del punto P e considerando — per semplicità di conteggi — costante la sua quota (p. es. $z = 0$), ed inoltre — senza ledere la generalità — ritenendo il punto C sull'asse delle Z con che

$$\xi = 0, \quad \gamma = 0, \quad \zeta = p \text{ (profondità)}$$

le (1) risultano genericamente del tipo $U = f(x)$.

I massimi $(U_{ii})_m$ delle tre prime delle (1), così trasformate in $(U_\Delta)_m$, $(U_\Delta)_m$ massimo e minimo della U_Δ , costituiscono *cinque valori caratteristici*

(1) Gli sviluppi completi di queste ricerche saranno riportati in «Geodesia e Geofisica», organo del Comitato Nazionale per la Geodesia e la Geofisica del C.N.R.

delle misure eötvössiane. Essi risultano legati dalle relazioni

$$(U_{xz})_m : (U'_\Delta)_m = (U_{yz})_m : (U_{xy})_m$$

$$\frac{1}{(U_{yz})_m^2} + \frac{1}{(U_{xy})_m^2} = \frac{1}{8} \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(U_{xz})_m^2}$$

$$\{(U_{xz})_m^2 + (U_{yz})_m^2\}^{\frac{1}{2}} : \{2(U_{xy})_m^2 + (U_{yz})_m^2\}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} (U'_\Delta)_m$$

che entro i limiti degli errori medi delle determinazioni sperimentali delle U_{ij} possono essere adoperate – nella prassi del rilievo – per mettere in evidenza l'eventuale errore dell'ipotesi circa la forma geometrica della massa perturbante.

Dai valori caratteristici $(U_{ij})_m$ – che praticamente si ricavano direttamente dai grafici delle $U = f(x)$ ottenuti con i valori eötvössiani direttamente misurati e corretti per la influenza della topografia del terreno superficiale ecc. – è possibile determinare analiticamente i parametri m ed n con $m = p : x$ ed $n = M : x^3$.

Ad es. per mezzo del $(U_{xz})_m$, $(U_{yz})_m$, $(U'_\Delta)_m$ si traggono facilmente le:

$$(2) \quad \begin{cases} m = (U_{xz})_m : (U'_\Delta)_m \\ n = \frac{\sqrt{5}}{48\varepsilon} \cdot \frac{(1+m^2)^2}{m} \cdot (U_{yz})_m \end{cases}$$

Tuttavia, per la determinazione dell'ascissa x e conseguentemente della massa M e della profondità p , volendo far uso solo delle U_{ij} , è necessario eseguire delle misure eötvössiane lungo un allineamento normale a quello dianzi considerato e costruire il diagramma delle U_{yz} . L'ascissa – rispetto all'allineamento ovest-est – che corrisponde al massimo di questa curva, è l'ascissa cercata.

Dunque, con il procedimento da noi indicato, dai due allineamenti generici di misure eötvössiane orientati da ovest ad est e da sud a nord è possibile determinare graficamente la posizione planimetrica del centro C , della massa perturbante, mentre dal calcolo si deducono in base alle

$$p = m \cdot x \quad , \quad M = n \cdot x^3$$

e tenendo conto delle (2), la profondità p e la massa M .

Considerando oltre le funzioni U_{ij} quella che dà in ogni punto il gradiente gravimetrico G definitivo come è noto dalla

$$G = \{U_{xz}^2 + U_{xy}^2\}^{1/2}$$

in base al suo valore massimo ed ai valori caratteristici delle U_{ij} riesce possibile una nuova determinazione delle quanità n, m , e quindi una possibilità di controllo⁽¹⁾.

Da ultimo facciamo notare che, nell'ambito delle operazioni pratiche, se $G = 0$, il piano contenente i punti P contiene pure il centro C della massa M e debbono risultare nulle le U_{xz} e U_{xy} o differire da 0 di quantità dello stesso ordine degli errori medi di osservazione. Si ricade così nei casi particolari studiati dagli autori citati⁽²⁾.

Chimica. — *Studio coi raggi elettronici della grafitizzazione di alcuni nerofumi industriali⁽³⁾.* Nota di A. BARONI, presentata⁽⁴⁾ dal Socio G. BRUNI.

In un precedente lavoro⁽⁵⁾ ho studiato alcuni nerofumi industriali, che mi furono gentilmente forniti dal prof. T. G. Levi della Società Italiana Pirelli, col metodo di ossidazione cromofosforica di Balfour e Riley⁽⁶⁾ per vedere se fosse possibile stabilire fra di essi una differenza in relazione al loro impiego nelle mescole di gomma. Ho tentato allora di esaminare questi nerofumi anche coi raggi elettronici che mi avevano permesso di ottenere dei risultati interessanti nello studio della struttura cristallina del carbonio ottenuto per disidratazione di idrati di carbonio a catena ciclica e a catena aperta, da me eseguito in collaborazione col prof. G. R. Levi⁽⁷⁾. Per alcuni di questi nerofumi ho potuto ottenere allora solo degli aloni bene accentuati ma non delle vere interferenze e cioè per i nerofumi così detti di fiamma; per altri, per es. per il nero termoatonico ottenuto per decomposizione di gas naturali a 1200°, non ho potuto rivelare interferenze per la difficoltà di ottenimento di preparati sufficientemente sottili. Superate le difficoltà della formazione dei preparati con materiali polveriformi, mi è sembrato ora interessante riprendere questo studio esaminando coi raggi elettronici il comportamento dei nerofumi al riscaldamento a temperature gradatamente crescenti fino a 1700°.

Recentemente U. Hofmann e D. Wilm⁽⁸⁾ hanno pubblicato uno studio interessante sulla struttura cristallina del carbonio determinata col metodo

(1) Questi risultati trovano poi riscontro con quelli che si traggono considerando la curvatura.

(2) Cfr. p. es. ROTHE, *Les méthodes de prospection du sous-sol*, p. 346.

(3) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale e Chimica fisica della R. Università di Milano.

(4) Nella seduta del 6 dicembre 1936.

(5) Questi «Rendiconti», 23, ser. 6^a, 940-942, 1936.

(6) «Journ. Chem. Soc.», 1723, 1935.

(7) «Zeit. f. Krist.», 93, 156, 1936 e questi «Rendiconti», 23, 441, 1936.

(8) «Zeit. f. Elektrochemie», 42, 504, 1936.

röntgenografico esaminando anche parecchi nerofumi. I carboni da loro esaminati sono stati: grafite Ceylon, grafite di storta, carbonio ottenuto da ossido di carbonio, carbonio da acetilene ottenuto per esplosione, nero da acetilene, supranorite, carboraffina, carbone da maschere, carbone di zucchero. Essi hanno osservato che nei carboni finamente suddivisi mancano nei fotogrammi le interferenze, per es. (201) e (022), che sono intense nella grafite e ritengono che ciò possa essere spiegato con la supposizione di Arnfelt di una perturbazione reticolare e che fra grafite ordinaria e carboni finamente suddivisi vi è una serie continua di termini intermedi. I loro risultati sono in accordo con quelli realizzati col metodo elettronico da Ch. Mongan⁽¹⁾ e da F. Tredelenburg⁽²⁾.

Io ho eseguito dei riscaldamenti dei vari nerofumi partendo da una temperatura iniziale di 700°. Ho preso come base questa temperatura in seguito ai risultati ottenuti da Balfour e Riley⁽³⁾ i quali hanno osservato per il coke, col loro metodo di ossidazione cromofosforica, che le loro curve di ossidazione presentano una brusca variazione a 700° che può essere messa in relazione con la contrazione di volume, il forte incremento della condutività elettrica, la diminuzione della reattività verso l'acido solforico ecc., che si osservano pure per riscaldamenti a questa temperatura e che si può interpretare come un inizio di grafitizzazione.

I riscaldamenti sono stati da me fatti, per i vari nerofumi, in ambiente di gas inerte (azoto depurato su rame rovente) a temperature di 700° e 1050° per 12 ore alla temperatura di 1600° per tre ore operando in forno ad induzione ad alta frequenza. I campioni scaldati a 700° e 1050° non hanno mostrato nessuna differenza sia al metodo di ossidazione cromofosforica, sia all'analisi coi raggi elettronici: i fotogrammi ottenibili e la quantità di anidride carbonica risultante dalla ossidazione, sono perfettamente identici a quelli dati dai prodotti non sottoposti al riscaldamento. In modo diverso si comportano invece i campioni scaldati a 1600°: essi hanno dato all'esame coi raggi elettronici dei fotogrammi perfettamente netti, con linee di interferenza che sostanzialmente sono analoghe a quelle della grafite. Questo risultato è quindi in accordo con quello röntgenografico di Hofmann e Wilm che hanno notato che l'aumento delle dimensioni dei cristalli in grafite di storta comincia a 1400°.

Per l'esame coi raggi elettronici ho dovuto superare notevoli difficoltà per la formazione dei preparati data la relativa grossezza delle polveri dei nerofumi scaldati ad alta temperatura ed ho dovuto lavorare a chilovoltaggi di circa 50 kW, mentre per i carboni non riscaldati mi è sempre stato possibile ottenere dei bei fotogrammi a chilovoltaggi di 25-30 kW. L'esame è stato fatto con un tubo costruito in Italia in collaborazione con l'ing. Ri-

(1) «Helv. phys. Acta», 5, 341, 1932.

(2) «Naturwiss.», 21, 173, 1933 e «Zeit. tech. Physik», 14, 489, 1933.

(3) Loc. cit.

gamonti della R. Università di Roma, col quale è stata realizzata una notevole costanza di tensione mediante un energico raffreddamento del braccio di collegamento alla pompa a vapori di mercurio e della zona di diafram-mazione del fascio dei raggi elettronici ed una aspirazione indipendente della parte di produzione dei raggi da quella costituita dal porta preparato e dalla camera fotografica. Il dispositivo permette di fare dei fotogrammi anche di parecchi minuti primi in assoluta costanza di tensione.

I nero-fumi scaldati a 1600° hanno mostrato una attaccabilità con la miscela cromofosforica maggiore di quella dei nero-fumi non scaldati, però nella ossidazione dei vari prodotti ho osservato un andamento delle curve relative analogo a quello ottenuto per i prodotti non scaldati e da me riportato nel lavoro sopra citato. I nero-fumi esaminati si seguono cioè, anche dopo riscaldamento a 1600°, con andamento decrescente della ossidabilità, nell'ordine seguente:

Nero Super Spectra di fiamma da gas naturali americani (tipo per vernici).

Nero Superba di fiamma da gas naturali americani (tipo per vernici).

Nero di fiamma da gas naturali americani tipo rinforzante per gomma.

Nero Paris di fiamma da gas naturali americani (tipo per vernici).

Nero Heuschild per decomposizione di acetilene.

Nero da ossido di carbonio.

Nero P₃₃ per decomposizione di gas naturali americani in presenza di azoto.

Nero-fumo italiano da olii di catrame (lamp black).

Nero per decomposizione di gas naturali americani.

Nero termoatomico per decomposizione pirogenica di gas naturali americani a 1200°.

Anche il riscaldamento ad alta temperatura non permette perciò di spiegare, dal punto di vista pratico, l'anomalia presentata dai neri per vernici da me esaminati, che, pure essendo come preparazione assai affini ai neri rinforzati per gomma e presentando come questi una elevata ossidabilità, hanno invece mediocre effetto rinforzante nelle mescole di gomma.

Chimica. — *Sulla struttura cristallina dei composti delle terre rare con i metalloidi del V gruppo. — Fosfuri di Lantanio, Cerio e Praseodimio⁽¹⁾.* Nota I di A. IANDELLI e E. BOTTI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. L. ROLLA.

Poco si conosce sia sui metodi di preparazione che sulla struttura cristallina dei composti fra i metalli del III^o gruppo e i metalloidi del V^o. Nei casi finora esaminati si ottengono con sicurezza solo composti della formula generale MeX, che non sembrano capaci di dare soluzioni solide con i componenti.

L'Alluminio forma con l'azoto un azoturo AlN a struttura tipo wurtzite⁽³⁾ e composti analoghi con P, As e Sb che cristallizzano nel tipo della blenda; mentre non si lega col Bismuto. Del Gallio, immiscibile allo stato liquido col Bismuto, si conosce il fosfuro, l'arseniuro e l'antimonio e dell'Indio l'antimonio. La struttura reticolare è in tutti questi casi quella della blenda⁽⁴⁾. Il Tallio non si combina nè col Fosforo nè con l'Arsenico, e dà forse con Antimonio e Bismuto due composti MeX tipo cloruro di Cesio⁽⁵⁾.

Per le terre rare il comportamento con i metalloidi del V^o gruppo non è noto. Hirsch, sperimentando sul Cerio da lui preparato⁽⁶⁾, rammenta un possibile arseniuro, esotermico, non duro e non piroforico e difficilmente decomponibile spontaneamente. Per il Bismuto si conosce il diagramma di fusione completo col Cerio⁽⁷⁾. In questo caso si formano quattro composti a punto di fusione elevatissimo (verso 1600°). Dalle esperienze di Vogel risulta anche che le leghe Ce-Bi sono forse le più esotermiche fra tutte le leghe del Cerio.

La determinazione della struttura cristallina di questi composti delle terre rare presenta un certo interesse, perchè essi devono costituire il termine di passaggio fra i composti intermetallici e quelli ionici; e mentre

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Genova.

(2) Nella seduta del 6 dicembre 1936.

(3) H. OTT, «Zs. Phys.», 22, 201 (1924).

(4) V. M. GOLDSCHMIDT, «G. V.», VIII (1927); G. NATTA e L. PASSERINI, «Gazz.», 58, 458, 655 (1928).

(5) V. M. GOLDSCHMIDT, «G. V.», VIII (1927); T. BARTH, «Zs. phys. Ch.», 127, 113 (1927).

(6) A. HIRSCH, «Trans. Amer. Electrochem. Soc.», 24, 57 (1911).

(7) R. VOGEL, «Zs. an. allg. Ch.», 84, 327 (1914).

dei primi si conosce oramai un certo numero di strutture, degli ultimi sono note soltanto quelle degli ossidi.

I composti esaminati da Goldschmidt erano preparati: alcuni per fusione degli elementi (AlSb , GaSb); altri per riscaldamento dell'ossido (GaP) o del metallo (AlP e GaP) in una corrente di Idrogeno carica di vapori di Fosforo.

Nel nostro caso la preparazione dall'ossido non ci sembra che possa condurre ad alcun risultato. D'altra parte; facendo passare Idrogeno e Fosforo sul metallo, si rischia di ottenere l'idruro, che fornisce bei fotogrammi e che impedirebbe quindi di vedere le righe del fosfuro eventualmente formatosi. Non resta allora che: o la riduzione di un sale ossigenato, o la preparazione diretta.

Abbiamo eseguito alcune esperienze orientative sulla possibilità di riduzione degli arseniati con carbone a temperatura alta (1500°) in corrente di gas illuminante, senza osservare una riduzione apprezzabile. Bisogna ricorrere quindi alla preparazione diretta dagli elementi.

La reazione fra un metallo delle terre rare e il Fosforo, Arsenico, Antimonio e Bismuto è estremamente violenta ed è necessario quindi lavorare su quantità molto piccole. Noi abbiamo usato un peso di metallo raro fra 0.1 e 0.2 gr. La limatura di questo veniva introdotta insieme al metalloide nella quantità calcolata (o in leggero eccesso nel caso del P e dell'As) in un tubetto di vetro difficilmente fusibile, in cui veniva poi fatto il vuoto e che si saldava alla fiamma. Il tubetto era quindi riscaldato gradualmente. Ad una temperatura fra 400° e 500° , tutto il metallo reagisce improvvisamente col vapore di Fosforo, o con la polvere di Arsenico, Antimonio e Bismuto, con una viva luminescenza, dando una massa nerastra fusa. Anche in queste condizioni, la reazione è spesso così vivace da far saltare il tubetto in cui avviene.

Nella presente Nota ci occuperemo della struttura dei fosfuri. La reazione col Fosforo è più energica che con gli altri elementi dello stesso gruppo, e la preparazione è resa più difficile dal fatto che non si può effettuare un miscuglio intimo prima dell'accensione.

I fosfuri si presentano come masse nere, assai dure e fragili, tanto che si possono polverizzare abbastanza facilmente in un mortaio d'agata. Tutti i fosfuri preparati mandano all'aria un debole odore di Idrogeno fosforato. La stabilità è massima per quello di Cerio, che si può arroventare all'aria senza altro che una leggera ossidazione superficiale. Il composto col Praseodimio si altera molto lentamente, mentre quello di Lantantio è assai instabile. All'aria esso si ricopre dopo poco tempo di una polvere biancastra, probabilmente di ossido; e la polvere si altera così rapidamente, che il riempimento della bacchettina per l'esame röntgenografico presenta una seria difficoltà. Questo comportamento del Lantantio fa sì che è raro ottenere bei fotogrammi, come invece avviene per i composti CeP e PrP .

I fotogrammi delle polveri dei tre fosfuri appaiono, anche ad un esame superficiale, perfettamente identici come numero e intensità delle righe. Tutte si possono attribuire con certezza al composto MeP, senza alcuna riga né del metallo, né dell'ossido; il che è una garanzia sufficiente della purezza del prodotto ottenuto. Per ciascuno dei tre fosfuri, i fotogrammi eseguiti su campioni diversi risultano sempre sovrapponibili. I dati relativi ai fotogrammi delle polveri sono riassunti nella tabella I.

Sul grafico di Hull per il reticolo cubico a facce centrate si ottiene una coincidenza completa per tutte le righe. Non si hanno quindi riflessioni corrispondenti ad indici misti. Ammettendo che nella cella elementare siano contenute quattro molecole di MeP, si presentano per la struttura due possibilità: che si abbia cioè un reticolo tipo blenda, o tipo NaCl. Il fatto che gli altri fosfuri finora esaminati abbiano il reticolo della blenda, porterebbe a supporre che questo avvenisse anche nel nostro caso.

Per tutte e due le strutture possibili è soddisfatta la condizione geometrica di Goldschmidt; tanto supponendo che siano presenti atomi che joni. La struttura tipo blenda richiederebbe però una contrazione dell'atomo della terra rara molto elevata. Inoltre, calcolando in quest'ultima ipotesi l'intensità delle righe, si trova un disaccordo completo con i dati sperimentali. È necessario dunque ammettere che i fosfuri esaminati cristallizzino nel tipo del NaCl, e si ottiene allora una buona concordanza fra le intensità calcolate e osservate.

Il calcolo è stato eseguito per PrP, dato che le intensità relative sono identiche per tutti e tre i composti, con la formula:

$$I \sim J(bkl) \cdot \Phi(\theta) \cdot A(2\theta) \cdot |F(bkl)|^2$$

dove $J(bkl)$ è il numero dei piani che contribuiscono alla riflessione, $\Phi(\theta)$ è il prodotto del fattore di polarizzazione per il fattore di Lorentz, $A(2\theta)$ è il fattore di assorbimento⁽¹⁾ e $F(bkl)$ è il fattore di struttura. Introducendo i valori delle coordinate del Praseodimio e del Fosforo nelle due ipotesi, cioè: 1) di una struttura tipo NaCl; 2) di una struttura tipo blenda; la formula precedente diventa:

$$I \sim J(bkl) \cdot \Phi(\theta) \cdot A(2\theta) \cdot [F_{Pr} \pm F_P]^2$$

dove F_{Pr} ed F_P sono i fattori atomici del Praseodimio e del Fosforo⁽²⁾. Per le due strutture $I = 0$ per indici misti. Nell'ipotesi 1) il segno + vale per gli indici pari, quello — per gli indici dispari; nella 2) il segno + vale per tutti gli indici dispari e per indici pari, quando $1/2(b+k+l)$ è pari; il segno — negli altri casi. La tabella II contiene i dati relativi alle intensità.

(1) A. A. RUSTERHOLZ, « Zs. Phys. », 63, 1 (1930).

(2) BRAGG e WEST, « Zs. für Krist. », 69, 136 (1929).

TABELLA I.

*Fotogrammi delle polveri di LaP, CeP e PrP
Anticatodo di Rame, radiazione K: $\lambda\alpha = 1.539 \text{ \AA}$; $\lambda\beta = 1.389 \text{ \AA}$*

| LaP | | | CeP | | | PrP | | | Indici |
|---------------------------|----------------|-------|---------------------------|----------------|--------|---------------------------|----------------|-------|---------------|
| Int. | Θ corr. | d/n | Int. | Θ corr. | d/n | Int. | Θ corr. | d/n | |
| — | — | — | md | 13° 8' | 3.386 | md | 13° 6' | 3.399 | 1 1 1 |
| — | — | — | — | — | — | d | 13° 45' | 2.922 | 2 0 0 β |
| m | 14° 46' | 3.019 | f | 15° 12' | 2.935 | f | 15° 12' | 2.935 | 2 0 0 |
| — | — | — | d | 19° 37' | 2.069 | d | 19° 43' | 2.059 | 2 2 0 β |
| mf-f | 21° 15' | 2.123 | ff | 21° 44' | 2.078 | f-ff | 21° 50' | 2.069 | 2 2 0 |
| — | — | — | d | 23° 2' | 1.775 | d | 23° 2' | 1.775 | 3 1 1 β |
| — | — | — | d | 24° 11' | 1.696 | dd | 24° 25' | 1.680 | 2 2 2 β |
| mf | 25° 7' | 1.813 | mf | 25° 40' | 1.776 | mf-f | 25° 47' | 1.769 | 3 1 1 |
| m | 26° 15' | 1.740 | m-mf | 26° 50' | 1.704 | m-mf | 27° 3' | 1.692 | 2 2 2 |
| — | — | — | d | 28° 12' | 1.470 | dd | 28° 23' | 1.461 | 4 0 0 β |
| d | 31° 5' | 1.491 | m | 31° 32' | 1.471 | md | 31° 46' | 1.462 | 4 0 0 |
| — | — | — | m | 34° 36' | 1.355 | m | 34° 56' | 1.344 | 3 3 1 |
| f | 34° 47' | 1.349 | ff | 35° 42' | 1.319 | ff | 36° 3' | 1.307 | 4 2 0 |
| f | 38° 48' | 1.228 | f-ff | 39° 41' | 1.205 | ff | 39° 59' | 1.197 | 4 2 2 |
| — | — | — | — | — | — | d | 42° 17' | 1.032 | 4 4 0 β |
| md | 41° 29' | 1.162 | mf | 42° 36' | 1.137 | mf | 43° 6' | 1.126 | 5 1 1 |
| — | — | — | d | 44° 43' | 0.987 | d | 45° 22' | 0.976 | 3 3 3 |
| md | 46° 18' | 1.064 | mf | 47° 27' | 1.044 | mf | 47° 54' | 1.037 | 6 0 0 β |
| m | 49° 14' | 1.016 | mf-f | 50° 21' | 0.999 | mf-f | 50° 57' | 0.991 | 4 4 0 |
| mf | 50° 8' | 1.003 | f-ff | 51° 29' | 0.9835 | f-ff | 51° 57' | 0.977 | 5 3 1 |
| mf | 54° 15' | 0.948 | f | 55° 23' | 0.935 | f | 56° 8' | 0.927 | 6 0 0 |
| — | — | — | — | — | — | m-md | 59° 24' | 0.894 | 4 4 2 |
| mf | 58° 25' | 0.903 | f | 59° 43' | 0.891 | f | 60° 45' | 0.882 | 5 3 3 |
| — | — | — | — | — | — | f-ff | 69° 59' | 0.819 | 6 2 2 |
| — | — | — | — | — | — | f | 71° 26' | 0.812 | 5 5 1 |
| | | | | | | | | | 7 1 1 |
| | | | | | | | | | 6 4 0 |
| $a_0 = 6.013 \text{ \AA}$ | | | $a_0 = 5.897 \text{ \AA}$ | | | $a_0 = 5.860 \text{ \AA}$ | | | |

È interessante notare che la costante reticolare diminuisce dal composto col Lantanio a quello col Praseodimio; mentre, se nel reticolo fossero presenti atomi neutri, essa dovrebbe essere minore per CeP che per PrP. Tale comportamento si spiegherebbe ammettendo la presenza di joni invece che di atomi neutri (poichè $r_{La^3+} > r_{Ce^3+} > r_{Pr^3+}$). I fattori atomici usati nel calcolo dell'intensità sono quelli corrispondenti ad atomi neutri, ma è facile vedere che, anche prendendo quelli per atomi ionizzati, non si avrebbe che piccole variazioni per le prime righe.

Altri argomenti in favore di una possibile struttura ionica dei fosfuri esaminati sono: il reticolo caratteristico di composti ionici; e il fatto che, calcolando il lato della cella elementare con i raggi atomici del metallo e del Fosforo (prendendo per quest'ultimo il valore 1.10 Å)⁽¹⁾, si trovano

TABELLA II.
Intensità nel fotogramma di PrP.

| Indici | Intensità osservata | Intensità calcolata | |
|--------|---------------------|---------------------|-------------|
| | | Tipo NaCl | Tipo blenda |
| 1 1 1 | md | 1.56 | 3.86 |
| 2 0 0 | f | 2.63 | 1.07 |
| 2 2 0 | f-ff | 3.84 | 3.84 |
| 3 1 1 | mf-f | 2.68 | 6.34 |
| 2 2 2 | m-mf | 2.00 | 0.84 |
| 4 0 0 | md | 1.25 | 1.25 |
| 3 3 1 | m | 1.86 | 4.46 |
| 4 2 0 | ff | 4.31 | 1.78 |
| 4 2 2 | ff | 3.98 | 3.98 |
| 5 1 1 | mf | 2.15 | 5.18 |
| 3 3 3 | | | |
| 4 4 0 | mf | 1.98 | 1.98 |
| 5 3 1 | mf-f | 3.54 | 8.44 |
| 6 0 0 | f-ff | 5.44 | 2.30 |
| 4 4 2 | | | |
| 6 2 0 | f | 4.98 | 4.98 |
| 5 3 3 | m-md | 2.42 | 5.72 |
| 6 2 2 | f | 6.28 | 2.67 |

(1) N. S. GINGRICH e R. HULTGREN, «Physic. Rev.», [2], 47, 808 (1935).

valori in tutti i casi inferiori a quelli sperimentalmente. Invece nei composti intermetallici delle terre rare si ha sempre una contrazione considerevole, specialmente per quelli più esotermici.

Il valore del raggio ionico del Fosforo trivaleente negativo non è stato determinato sperimentalmente. Pauling⁽¹⁾ ha calcolato teoricamente un valore di 2.12 Å. Prendendo per i raggi ionici del Lantano, Cerio e Praseodimio, i valori 1.22, 1.18 e 1.16 rispettivamente⁽²⁾; si trova dalle costanti reticolari dei fosfuri esaminati, un valore del raggio ionico di P³⁻ di 1.77 Å.

Chimica. — *Sul dimorfismo del fosforo bianco*⁽³⁾. Nota⁽⁴⁾ di G. NATTA e L. PASSERINI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sino a pochi anni or sono si conoscevano con certezza soltanto due modificazioni allotropiche del fosforo: quella bianca cubica e quella violetta, essendo stato dimostrato che il fosforo rosso non è omogeneo, ma costituito da una miscela di fosforo bianco e violetto.

È stata poi descritta da P. W. Bridgmann⁽⁵⁾ una modificaione nera grafitica del fosforo, che si può ottenere soltanto a pressioni molto alte (superiori alle 10000 atmosfere) ed a temperature di circa 200°.

Lo stesso autore ha anche osservato, nell'esame della curva di raffreddamento del fosforo sino a -90°, un arresto a -77°, che ha attribuito alla trasformazione dell'ordinario fosforo bianco cubico α in un'altra modificaione β a simmetria probabilmente esagonale. Sul fosforo β non si hanno nella letteratura altre notizie al di fuori di un recente lavoro di D. Vorländer e suoi collaboratori⁽⁶⁾ che attribuiscono al fosforo β una più bassa simmetria, forse monoclinica o rombica ed una temperatura di trasformazione -68°.

Allo scopo di confermare il dimorfismo del fosforo bianco ed eventualmente determinarne la struttura cristallina coi raggi X, ne abbiamo intrapreso l'esame con il metodo delle polveri a bassa temperatura.

Pur essendo stato affermato che ricerche röntgenografiche del fosforo bianco sono impossibili, perchè questo sotto l'azione dei raggi X si trasforma nella modificaione rossa⁽⁷⁾, noi non abbiamo nelle nostre ricerche osservata praticamente nessuna notevole trasformazione del fosforo bianco nel

(1) PAULING, « J. A. C. S. », 49, 765 (1927).

(2) V. M. GOLDSCHMIDT, « Ber. », 60, 1263 (1927).

(3) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale del R. Politecnico di Milano.

(4) Presentata nella seduta del 15 novembre 1936.

(5) P. W. BRIDGMANN, « Journ. Am. Chem. Soc. », 36, 1344, (1914).

(6) D. VORLÄNDER, W. SELKE, S. KREISS, « Berichte », 58, B, 1802, (1925).

(7) H. JOUNG, « Centralblatt f. Min. u. Geol. », 107, (1926).

rosso, anche dopo esposizioni di parecchie ore alle radiazioni K di anticatodi di ferro o di cromo.

Ritenendo che l'assenza di bande di interferenza nei fotogrammi Debye non fosse dovuta a trasformazione del fosforo bianco in rosso, ma piuttosto alla elevata agitazione termica degli atomi analogamente a quanto avviene per i metalli alcalini, che, come il fosforo presentano una bassa temperatura di fusione, abbiamo esaminato il fosforo a temperature inferiori a quella ambiente.

Si usò in un primo tempo un dispositivo sperimentale, adatto per l'esame coi raggi X a temperature basse, che uno di noi aveva già sperimentato nello studio della struttura reticolare di alcune sostanze, che alla temperatura ordinaria risultano gassose⁽¹⁾.

I risultati preliminari ottenuti furono comunicati in una lettera alla rivista « Nature »⁽²⁾. Essi confermavano il dimorfismo del fosforo bianco e prevedevano per la modificazione α una cella cubica contenente 16 atomi. Data però la poca chiarezza dei fotogrammi della fase α che apparivano sempre estremamente deboli con linee poco nitide anche dopo esposizioni lunghissime, ci eravamo riservati delle ricerche ulteriori, per una conferma più rigorosa dei risultati.

Nella nostra comunicazione preliminare sulla rivista « Nature » si era comunicato che le linee del fotogramma a -35° si ordinano per una struttura cubica avente una cella elementare di $7,17 \text{ \AA}$ di lato. Il valore eccessivamente alto della densità 2,23 per una cella elementare contenente 16 atomi di fosforo e la impossibilità di accordare una qualsiasi struttura con le intensità osservate ci induissero ad esaminare più accuratamente la questione ed a tentare di ottenere dei fotogrammi migliori.

Si è anche voluto esaminare se le linee presenti nei fotogrammi non fossero dovute ad impurità estranee.

Usando delle radiazioni a relativamente grande lunghezza d'onda e quindi poco penetranti emesse da anticatodi costituiti da metalli a relativamente basso peso atomico, poteva verificarsi che impurezze superficiali, anche se presenti in piccola quantità, influissero in modo notevole sui fotogrammi di interferenza.

Inoltre si era constatato che alcune delle linee dei fotogrammi di fosforo corrispondevano alle distanze reticolari dei piani più importanti del reticolo del ghiaccio.

Malgrado le cure osservate nell'essiccamiento della camera e della film fotografica, si poteva dubitare che tracce di umidità (forse fornite dalla gelatina stessa della film) si condensassero sulla superficie stessa del preparato n esame raffreddato a -35° .

(1) G. NATTA, « Rend. R. Accademia Lincei », vol. II, ser. 6^a, p. 679, (1930).

Maggiori attenzioni furono prese per ottenere un essicamento il più possibile perfetto, tenuto conto che basterebbe una condensazione di pochi millesimi di milligrammo di brina sul preparato per fornire delle interferenze visibili dopo lunghe esposizioni.

Riferiamo qui dettagliatamente le ricerche eseguite, rispettivamente per il fosforo bianco α e β .

ESAME DEL FOSFORO BIANCO α .

Nelle ricerche eseguite in un primo tempo, mediante l'apparecchiatura già descritta (5), si operò raffreddando il fosforo a temperatura di circa — 35°, facendo evaporare dell'ammoniaca liquida nell'interno del capillare di vetro, posto nell'asse dello spettrografo, sul quale veniva deposto un esile straterello di fosforo. Furono eseguiti diversi fotogrammi preparando tale straterello con due processi diversi:

I) Condensazione di vapori di fosforo sul capillare raffreddato, posto in atmosfera di azoto sopra la superficie del fosforo fuso.

II) Solidificazione di uno strato sottile per rapida immersione del capillare freddo nel fosforo fuso.

Per evitare che dell'umidità si condensasse sulla superficie del fosforo raffreddato, l'operazione veniva effettuata in atmosfera di azoto secco senza che il capillare venisse mai a contatto con l'aria ed anche lo spettrografo veniva essiccato prima con massima cura. Le film fotografiche e la carta nera che le avvolge vennero tenute uno o più giorni in essicatore su anidride fosforica. In alcuni casi, anche durante il fotogramma, era mantenuta nella camera dell'anidride fosforica, in altri casi, un tubetto raffreddato alla temperatura dell'aria liquida per condensare, per il principio della parete fredda, tutta l'umidità dell'ambiente.

Malgrado queste precauzioni prese, si continuavano ad osservare nei fotogrammi, pur sempre debolissimi, alcune linee pure debolissime in posizioni corrispondenti a quelle più forti dei fotogrammi del ghiaccio ottenuto con lo stesso dispositivo, e restava ancora il dubbio che ciò non fosse dovuto ad una pura coincidenza.

Si volle adottare allora un diverso dispositivo sperimentale.

Il fosforo venne ottenuto in fili di un millimetro di diametro, trafilando con una pressa, con una pressione di 2000 kg. per cmq., il fosforo bianco secco attraverso il foro calibrato di uno stampo appositamente costruito. Durante la preparazione di trafilatura l'apparecchio era raffreddato con neve carbonica solida, e pure in atmosfera di CO₂ si manteneva la bacchetta di fosforo sino alla sua introduzione in un adatto spettrografo. Questo era costruito in modo tale che il blocco da cui assialmente si trafilava il fosforo poteva, mediante un raccordo conico, essere posto nell'asse dello spettrografo stesso. Era assicurata così automaticamente la centratura del preparato.

Tutto lo spettografo era raffreddato con neve carbonica solida sino ad una temperatura di circa -55° e mantenuto in una cella termostatica appositamente costruita. La film fotografica era già stata preessicata.

Con tale dispositivo si poteva operare a temperatura più bassa che nelle prove precedenti, ma ancora superiore a quella di trasformazione del fosforo α in β .

La condensazione di umidità sul preparato veniva evitata, oltre che dal fatto che si operava in atmosfera di CO_2 , secca anche perchè le pareti della camera erano a temperatura più bassa dello stesso preparato.

Data la bassa temperatura a cui con questo dispositivo era mantenuta la film fotografica, occorrevano per ogni fotogramma esposizioni lunghissime, ad es., di otto ore od anche superiori.

I risultati del calcolo dei fotogrammi sono contenuti nella unita tabella, in cui sono indicate le distanze reticolari corrispondenti alle linee tutte debolissime, malgrado le lunghissime esposizioni, presenti nei fotogrammi eseguiti con anticotodo sperimentalmente di cromo, di ferro, di rame.

TABELLA I.

Distanze reticolari in Å calcolate dalle linee, tutte debolissime, presenti nei fotogrammi del fosforo bianco α a -55°

| "Anticotodo di cromo | Anticotodo di Ferro | Anticotodo di Rame |
|-------------------------|------------------------|-----------------------|
| 4.30 | 4.30 | 4.33 |
| 3.85 | 3.81 | — |
| 3.57 | 3.52 | — |
| — | 2.43 | 2.84 |
| 2.22 | — | 2.25 |
| 2.14 | — | — |
| — | 1.98 | 1.90 |
| 1.76 | 1.84 | — |
| 1.67 | 1.70 | 1.67 |
| 1.52 | 1.53 | 1.51 |
| — | 1.46 | — |
| 1.36 | 1.35 | 1.34 |
| 1.32 | — | — |
| 1.26 | — | — |
| 1.24 | 1.20 | 1.20 |

Il fatto che alcune linee corrispondono a distanze reticolari eguali o vicine a quelle delle più forti interferenze del ghiaccio, può essere casuale, tenuto conto delle precauzioni prese per evitare la presenza di tracce di umidità. Indubbiamente però i fotogrammi ottenuti nel 1930 (vedi la lettera al « Nature » già citata) erano stati eseguiti senza precauzioni così rigorose. Questo giustifica le deduzioni allora fatte in base a tali primi fotogrammi sulla struttura del fosforo bianco α , che ora non possiamo confermare.

Sebbene molte linee dei fotogrammi si ordinino per una cella cubica di circa 7.50 Å di lato, le prime linee si spostano più di quanto l'errore dovuto al diametro del preparato possa consentirlo. Per una cella contenente 16 atomi si calcolerebbe una densità di 1.94, valore attendibile.

L'unica conclusione certa è che il fosforo, se le debolissime linee dei fotogrammi sono da attribuirsi ad esso, presenta una cella elementare molto grande ed una struttura reticolare molto complessa.

Da questo punto di vista il fosforo si comporta da vero metalloide, come lo zolfo, e, possedendo una molecola poliatomica, forse tetratomica, non è capace di cristallizzare secondo strutture reticolari semplici, come fanno invece i metalli propriamente detti o come i metalloidi a molecole biatomiche.

Il fatto che röntgenograficamente il fosforo α appare quasi amorfso, può essere dovuto anche alla notevole agitazione termica degli atomi od alla inomogeneità delle molecole, forse non tutte dello stesso peso molecolare, e non certo al fatto che si trasforma in fosforo rosso per opera dei raggi X, come sostenne Joung. Basta un ulteriore raffreddamento da — 55° (temperatura alla quale il fosforo appare ai raggi X ancora quasi amorfso) a — 80° perché subito cristallizzi in modo perfetto e dia nitidissime e numerose interferenze röntgenografiche. Ciò non avverrebbe se il fosforo α si fosse trasformato in fosforo rosso per opera dei raggi X.

I tentativi da noi fatti per ottenere fotogrammi di cristalli rotanti su cristalli unici ottenuti per evaporazione di soluzioni di fosforo, non diedero risultati soddisfacenti per la difficoltà di ottenere dei cristalli unici sufficientemente sviluppati, per la loro deformabilità e per la difficoltà della loro manipolazione.

ESAME DEL FOSFORO BIANCO β .

I preparati di fosforo bianco, che, come abbiamo visto, non forniscono che interferenze debolissime e poco nette a temperature superiori a — 60°, dànno invece bellissimi spettri di interruzione qualora vengano raffreddati alla temperatura dell'aria liquida. Questo fatto è dovuto alla trasformazione segnalata da Briedgmann, del fosforo α in fosforo β .

I fotogrammi ottenuti con anticatodi di rame o ferro sono talmente ricchi di linee che abbiamo dovuto ricorrere alla maggiore lunghezza d'onda

TABELLA II.

Fosforo bianco β (diametro del preparato 2 mm.). Fotogramma ottenuto con anticatodo di Cromo a -170° calcolato come esagonale per un rapporto assiale $c/a = 1.60$.

| hkl | d distanza reticolare non corretta | a | Int. oss. |
|-----|---|-------|-----------|
| 110 | 4,030 | 8,06 | md |
| 111 | 3,868 | 8,10 | f |
| 103 | 3,676 | 8,11 | m |
| 112 | 3,462 | 8,16 | mf |
| 004 | 3,274 | 8,18 | d |
| 202 | 3,123 | 8,195 | dd |
| 120 | 2,704 | 8,26 | d |
| 114 | 2,593 | 8,30 | d |
| 105 | 2,503 | 8,34 | d |
| 302 | 2,283 | 8,40 | d |
| 006 | 2,233 | 8,37 | mf |
| 220 | 2,095 | 8,38 | md |
| 130 | 2,027 | 8,425 | md |
| 116 | 1,976 | 8,40 | d |
| 223 | 1,913 | 8,45 | mf |
| 313 | 1,845 | 8,43 | md |
| 117 | 1,746 | 8,40 | mf |
| 314 | 1,728 | 8,40 | f |
| 230 | 1,677 | 8,445 | dd |
| 306 | 1,647 | 8,41 | d |
| 232 | 1,630 | 8,46 | d |
| 217 | 1,579 | 8,435 | dd |
| 405 | 1,517 | 8,47 | d |
| 307 | | | |
| 234 | 1,498 | 8,43 | d |
| 128 | 1,442 | 8,46 | md |
| 406 | 1,427 | 8,49 | mf |
| 240 | 1,392 | 8,51 | dd |
| 504 | 1,352 | 8,515 | dd |
| 333 | | 8,51 | |
| 243 | 1,332 | 8,52 | d |
| 138 | 1,307 | 8,51 | dd |
| 237 | 1,283 | 8,56 | dd |
| 335 | 1,259 | 8,53 | d |
| 245 | | 8,54 | |
| 514 | 1,242 | 8,57 | d |
| 229 | | 8,57 | |
| 601 | 1,228 | 8,555 | m |
| 340 | 1,217 | 8,55 | d |
| 603 | 1,192 | 8,56 | dd |

del cromo per smistare le linee di interferenza sovrapponentesi. Malgrado ciò si poterono leggere dal fotogramma ottenuto con anticatodo di cromo ben 36 linee, di cui alcune corrispondenti a distanze reticolari relativamente alte.

Mancando dati cristallografici sicuri, risulta troppo incerto ogni tentativo di determinare la struttura in base ai soli fotogrammi delle polveri. Abbiamo peraltro osservato che le distanze reticolari osservate si accordano discretamente (a parte la forte divergenza delle prime linee, dovuta al forte diametro del preparato) per una struttura esagonale o romboedrica, con un rapporto assiale 1,60 ed un lato di base della cella elementare ortorombica di 8,55 Å. Supponendo che la cella elementare contenga 36 molecole, si calcolerebbe un valore della densità di 2,12, che potrebbe risultare attendibile.

Date però alcune piccole divergenze tra i valori calcolati delle distanze reticolari e quelli teorici per tale struttura, non è possibile confermarla in modo sicuro. Potrebbe anche trattarsi di una struttura a più bassa simmetria, ad es. pseudoesagonale, per lo studio della quale il metodo Debye non consente una sufficiente sicurezza. Non si conoscono d'altronde metodi che permettano di ottenere cristalli unici sufficientemente sviluppati del fosforo bianco β , che consentano l'esame col metodo di Laue o del cristallo rotante.

Risulta comunque che la cella elementare del fosforo β è di dimensioni notevoli e contiene un notevole numero (probabilmente ≥ 32) di atomi di fosforo.

Anche questo può essere considerato come un indizio della complessità della molecola del fosforo allo stato solido.

CONCLUSIONI.

Nuove accurate ricerche röntgenografiche con il metodo delle polveri a temperatura -33°, -55° e -170° confermano il dimorfismo del fosforo bianco, ma non permettono di confermare le dimensioni reticolari, precedentemente proposte, per il fosforo bianco α .

Si attribuisce la scarsa chiarezza dei fotogrammi del fosforo bianco α contenenti solo delle linee estremamente deboli, che non permettono alcuna conclusione sicura sulle dimensioni del reticolo, alla forte agitazione termica delle molecole e non, come ha supposto Joung, alla trasformazione del fosforo bianco in rosso per azione fotochimica dei raggi X.

La trafilatura a bassa temperatura sotto pressioni di 2000 atm. non ha permesso di ottenere diagrammi fibrosi del fosforo bianco α .

Il fosforo bianco β a differenza di quello α , possiede una struttura cristallina ben marcata, dimostrata dai bellissimi fotogrammi delle polveri, ricchissimi di linee.

La bassa simmetria, forse pseudoesagonale, del fosforo β e le grandi dimensioni della cella elementare (le numerose linee dei fotogrammi ordi-

nandosi imperfettamente per una simmetria esagonale o trigonale e per una cella ortorombica di 8,55 Å di lato e rapporto assiale 1,60) non consentono una determinazione esatta della struttura reticolare con il metodo delle polveri; ma sono un indizio verosimile della complessità e forse della bassa simmetria della molecola del fosforo β .

Litologia. — *Sulle forme granulari delle rocce melilitiche⁽¹⁾.*
Nota di F. RODOLICO, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. P. ALOISI.

Il Lacroix ha messo in rilievo il particolare interesse offerto dagli inclusi e dai proietti vulcanici, quando essi rappresentino forme granulari derivate da magmi, dei quali solo i prodotti effusivi siano bene conosciuti. Con tale criterio egli ha descritto alcuni proietti contenuti nei туи del Monte Somma, portando un notevole contributo allo studio delle forme granulari delle rocce leucitiche⁽³⁾.

Interesse non certo minore, sotto questo aspetto, presentano le rocce melilitiche, e perciò, nelle mie gite ai vulcanetti melilitici dell'Italia centrale, ho ricercato con particolare cura inclusi o proietti con struttura cristallina; solo però al Pian di Celle, presso San Venanzo, ho potuto raccogliere un piccolo incluso di tale tipo entro la lava melilitica. Lo studio della roccia che lo costituisce dà modo di descrivere una varietà petrografica non ancora conosciuta, ed il suo confronto con le pochissime rocce già note, che ne ripetono alcuni caratteri fondamentali, permette di fare qualche osservazione sulle forme granulari delle rocce melilitiche.

L'incluso del Pian di Celle, di forma irregolare e a spigoli appena smussati, misura dodici centimetri circa nella sua maggiore dimensione, ed appare costituito da una roccia cristallina di colore grigio e di grana medio-grossa. Qua e là si notano aggregamenti di laminette di una mica colorata, solo minerale riconoscibile con sicurezza ad occhio nudo.

Al microscopio la roccia appare freschissima, e la sua struttura può essere considerata olocristallina panidiomorfia; nonostante le dimensioni qualche volta abbastanza notevoli di alcuni individui, si può escludere qualsiasi accenno di porfiricità, e si può ritenere che tutti i cristalli presentino uguale tendenza all'idiomorfismo.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 6 dicembre 1936.

(3) A. LACROIX, *Les roches grenues d'un magna leucitique étudiées à l'aide des blocs holocrystallins de la Somme*. «C. R. Acad. Sc.», CLXV, 205 (1917).

I componenti essenziali della roccia, in ordine della loro frequenza, sono: melilite, leucite, flogopite, olivina; accessori, sia pure in notevole copia: magnetite ed apatite.

La melilite è in cristalli ora di forma irregolare, ora alquanto allungati nella direzione delle tracce di sfaldatura secondo {001}, oppure di forma abbastanza chiaramente rettangolare. Non sempre le sfaldature sono visibili; inoltre non ho mai osservato quella speciale fibrosità parallela a [001] che è considerata assai diffusa nella specie. Di regola il minerale è freschissimo; qualche volta mostrasi un po' alterato con formazione di materiali malamente identificabili, ma di aspetto cloritico-serpentinoso, i quali si trovano generalmente sugli orli e nelle spaccature. La rifrazione è media; a nicol incrociati i cristalli estinguono parallelamente alle tracce di sfaldatura {001}, se presenti, ed appaiono avere diversa birifrazione nei diversi punti. Essi mostrano infatti ora colori d'interferenza anomali, grigio-azzurri cupi, ora colori d'interferenza normali piuttosto bassi. Tra questi due tipi di colori, il passaggio è continuo, ma abbastanza rapido; talora le plaghe con colori anomali sono interne rispetto a quelle con colori normali, ma di regola si hanno chiazze irregolari e ripetute. L'allungamento è sempre dello stesso segno in tutto il cristallo, e positivo; dato l'abito del minerale, abbiamo quindi una melilite con birifrazione di segno negativo. Un fenomeno, che non credo sia stato descritto, si nota in qualche cristallo di melilite: intorno ad alcune inclusioni non decifrabili, ma che appaiono prodotti di alterazione della flogopite, ed intorno ad una piccola inclusione di una sostanza verde isotropa, che descriverò tra poco, si verifica un energico aumento della birifrazione; così che, a nicol incrociati, l'inclusione appare circondata da una vera aureola dai colori d'interferenza notevolmente alti, aureola molto estesa rispetto alla grandezza dell'inclusione. In un cristallo di melilite, che si trova accanto ad uno di flogopite circondato da un sottile orlo di prodotti di alterazione, si osserva lo stesso fenomeno lungo tutto il contatto.

Abbondante, quasi quanto la melilite, è la leucite; dalla prima si distingue facilmente per la rifrazione assai minore, e per la presenza delle caratteristiche geminazioni polisintetiche. I cristalli sono sempre di forma irregolarissima, e per grandezza corrispondenti a quelli di melilite.

La flogopite è in cristalli di solito freschissimi, ora di forma irregolare, ma più sovente in liste nelle quali appare nettissima la sfaldatura secondo {001}; non rare le geminazioni con piano di associazione (001). Otticamente si ha birifrazione elevata e angolo degli assi ottici molto piccolo. Quanto al pleocroismo, α è nocciola estremamente chiaro; la differenza tra colori di β e di γ è debole (dal marrone rossiccio allo stesso colore leggermente più chiaro), ma netta, e si può cogliere, assai meglio che nelle sezioni sottili, in laminette di sfaldatura staccate dalla roccia. Per quanto la determinazione sia difficile, per il bassissimo potere biriffrattivo delle sezioni

basali, sembra che l'assorbimento sia $\beta > \gamma > \alpha$ invece di $\gamma > \beta > \alpha$ come di solito è stato osservato.

Il minerale meno frequente, tra quelli essenziali, è indubbiamente l'olivina; in ogni sezione se ne osservano pochi cristalli freschissimi, di forma irregolare. L'angolo degli assi ottici è praticamente retto, dato che in sezioni normali ad un asse l'isogira si mantiene rettilinea al rotare della lamina.

Negli interstizi tra i cristalli si annida una sostanza nettamente isotropa, di colore verde intenso; in molti casi essa ha tutto l'aspetto di un vetro, ma un più attento esame m'induce a ritenere che si tratti di un prodotto derivato dall'alterazione della flogopite; esso si trova infatti quasi sempre vicino a questa mica, e in qualche caso si scorge effettivamente un passaggio graduale tra la sostanza verde e la flogopite. Che vi sia una relazione tra tale prodotto e la mica, appare anche dal fatto che l'aumento nella birifrazione della melilite, intorno ad inclusioni verosimilmente derivate dalla flogopite, si verifica altresì, come ho già detto, intorno ad una masserella della sostanza verde. In questa si osservano talvolta dei microliti di aspetto feldispatico, con disposizione a lisca di pesce.

Come minerali accessori sono abbondanti - inclusi in tutti i componenti della roccia - magnetite e apatite. La prima, in granuli e in cristalli anche idiomorfi, con sezioni spesso quadrate, è opaca per trasparenza e grigia scura per riflessione. La seconda è in granuli, anche abbastanza grandi, ed in cristalli prismatici allungati. Non posso escludere la presenza dell'ilmenite, anzi questa è avvalorata dal fatto che dalla roccia ho potuto separare dei granuli opachi i quali, opportunamente trattati, mi hanno data nettissima la reazione del titanio.

A riempire o a tappezzare alcune piccolissime cavità della roccia si presentano accidentalmente alcuni granuli e cristallini di un minerale incoloro, con birifrazione debole e rifrazione molto bassa; credo si tratti di una zeolite.

L'analisi chimica della roccia ha dato i risultati riuniti nella colonna I della seguente tabella; le altre colonne si riferiscono a rocce delle quali mi occuperò più oltre.

| | I | II | III |
|--------------------------------|--------|-------|---------|
| SiO ₂ | 37.64 | 42.28 | 45.49 |
| TiO ₂ | 2.68 | 1.44 | 0.13 |
| P ₂ O ₅ | 1.64 | 0.15 | 0.16 |
| Al ₂ O ₃ | 8.18 | 20.56 | 17.66 |
| Fe ₂ O ₃ | 7.73 | 2.83 | 0.81 |
| FeO | 7.19 | 1.71 | 1.45 |
| MnO | 0.24 | 0.12 | tracce |
| MgO | 7.04 | 1.98 | 4.27 |
| CaO | 17.82 | 14.05 | 16.72 |
| BaO | 0.30 | — | — |
| Na ₂ O | 2.17 | 6.82 | 1.66 |
| K ₂ O | 5.43 | 6.74 | 11.44 |
| Fl | 0.48 | — | — |
| Cl | 0.25 | — | 0.03 |
| SO ₃ | 0.21 | 0.68 | assente |
| H ₂ O + | 1.35 | 0.38 | 0.93 |
| H ₂ O — | 0.70 | 0.03 | 0.05 |
| | 101.05 | 99.77 | 100.80 |
| — O = 2(Fl, Cl) | 0.26 | • | |
| | 100.79 | | |

Formule secondo il Niggli delle tre analisi:

| | si | ti | p | al | fm | c | alk | mg | k | c/fm |
|-----|-----|------|------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|
| I | 72 | 3.86 | 1.32 | 9.23 | 43.24 | 36.85 | 10.68 | 0.47 | 0.62 | 0.85 |
| II | 95 | 2.42 | 0.15 | 27.07 | 14.83 | 33.70 | 24.40 | 0.45 | 0.39 | 2.27 |
| III | 100 | 0.21 | 0.15 | 22.86 | 18.09 | 39.44 | 19.61 | 0.78 | 0.82 | 2.18 |

Nell'insieme mi sembra che i caratteri chimici dell'incluso del Pian di Celle corrispondano assai bene alla sua composizione mineralogica. L'eccezionale quantità di titanio e di fosforo, e la presenza del fluoro e del cloro sono da riferire, almeno in parte, alla presenza dell'ilmenite e dell'apatite; alquanto fluoro deriva certo dalla flogopite.

Per quanto mi risulta, sono ben poche le rocce che possono essere confrontate con quella ora descritta.

Due rocce olocristalline melilitiche con struttura granulare, che costituiscono proietti raccolti entro tufi vulcanici, sono state descritte dal Washington: una proviene dal Monte Somma, e fu distinta col nome di «vesbite»⁽¹⁾, l'altra da Villa Senni nei Colli Albani⁽²⁾. In entrambe la me-

(1) H. S. WASHINGTON, *Sull'italite: un nuovo tipo di roccia leucitica*. «Rend. R. Accad. Lincei» [5], XXIV, 431 (1920); lo stesso lavoro in inglese in «Am. J. Sc.» [4], L, 43 (1920) e una notizia preliminare in «J. Washington Acad. Sc.», X, 272 (1920).

(2) Id., *The italite locality of Villa Senni*. «Am. J. Sc.», XIV, 190 (1927).

lilite è componente essenziale, ed è sempre associata ad altri feldispatoïdi: nella prima, anzi, l'elemento prevalente è la leucite, nella seconda sono presenti nefelina, leucite e un po' di un minerale descritto, ma non identificato dal Washington, e ritenuto dal Rittman davyna con orlo di microsommité⁽¹⁾. Nella roccia del Monte Somma vi è pure una notevole quantità di augite, minerale solo accessorio in quella del Lazio. La composizione chimica delle due rocce risulta dalle analisi riportate nella tabella, alle colonne II (roccia di Villa Senni, anal. Keyes) e III (roccia del Monte Somma, anal. Washington).

Anche nella zona vulcanica di Prata Porci, nel Vulcano Laziale, sono state segnalate rocce analoghe: entro una lava melilitica, il Cumin⁽²⁾ ha trovato una « segregazione » formata da leucite, melilite, e pirosseno augitico, come minerali essenziali, e olivina e magnetite, come accessori. E nella stessa regione il medesimo autore ha raccolto nei tufi « aggregati di carattere basico » nei quali è talvolta presente la melilite; di uno, composto di « leucite, augite, e melilite idiomorfa » egli ha pubblicato una microfotografia, dalla quale appare chiara la struttura granulare.

Tutte queste rocce – compresa quella da me descritta – risultano quindi essenzialmente costituite da due o più feldispatoïdi, uno dei quali è la melilite, associati a un silicato basico di tipo pirossenico, biotitico, o, subordinatamente, olivinico. Ma pur dentro i limiti segnati da tale schema, si hanno notevolissime differenze qualitative e quantitative, che si riflettono naturalmente nella composizione chimica. Perciò le analogie che si possono cogliere, confrontando le analisi, si riducono a ben poche: l'acidità sempre piuttosto bassa e la quantità di calcio costantemente tanto alta da far pensare alla possibilità di un assorbimento di calcari da parte del magma.

Questi dati, per quanto scarsi, permettono tuttavia di porre in rilievo che i caratteri mineralogici e chimici – almeno nelle loro linee generali – sono quelli delle rocce effusive feldispatoïdiche, più o meno ricche di melilite. Come queste, le rocce prese in esame in questa Nota non costituiscono un gruppo ben definito, collegandosi strettamente, da un lato con le rocce leucitiche, dall'altro con le rocce nefeliniche. Ma una precisa corrispondenza con termini effusivi non è possibile di cogliere, né a San Venantzo, né – probabilmente – a Prata Porci, dove pur si notano affioramenti di lave melilitiche. Appare quindi assai probabile che queste rocce melilitiche granulari derivino dalla consolidazione di parti differenziate di un magma, le quali non sono venute a giorno; né si può escludere che talvolta alcune loro caratteristiche non possano derivare da una trasformazione autopneumatolitica di materiali, precedentemente formatisi; questa possibilità è stata

(1) A. RITTMANN, *Die geologische bedingte Evolution und Differentiation des Somma-Vesuvmagmas* « Zeitschr. f. Vulkanologie », XV, 14 (1933).

(2) G. CUMIN, *Il cratere di Prata Porci nel Vulcano Laziale*. « Boll. Soc. geol. it. », LX, 172 (1921).

considerata dal Rittmann per la « vesbite », data soprattutto la presenza della davyna.

È noto come non si conoscano ancora forme tipicamente intrusive di rocce melilitiche; in tali condizioni si può pensare che queste rocce a struttura granulare colmino tale lacuna. La cosa potrebbe apparire tanto più verosimile, in quanto che alcuni loro caratteri ricordano quelli di rocce melilitiche lamprofiriche — nel senso dato a quest'ultimo aggettivo dal Niggli e dal Beger — e quindi strettamente connesse con masse intrusive⁽¹⁾. Comunque, sulla loro origine, e sulle condizioni nelle quali può essere avvenuta la consolidazione, ritengo siano applicabili alcuni concetti espressi per la prima volta dal Lacroix⁽²⁾, e ripresi successivamente dal Washington⁽³⁾. Secondo questi due petrografi, tali rocce granulari sono da ritenere frammenti di masse di tipo filoniano o simile, che si sono consolidate nelle parti più basse di un edificio vulcanico; la loro olocristallinità, la struttura granulare, e la grana piuttosto grossa sono da attribuire a un lento raffreddamento, in continua presenza di componenti volatili, piuttosto che a grande pressione.

Considerando queste rocce granulari come frammenti strappati da formazioni esistenti nel sottosuolo dei vulcani, potremmo dare — come ha fatto il Washington per la « vesbite » — un nome particolare ogni qualvolta si descriva un tipo che sia nuovo per i suoi caratteri mineralogici e chimici, come sarebbe quello di San Venanzo. Non mi sembra che sia il caso di seguire tale sistema, trattandosi di rocce che hanno sempre un carattere di eccezione, non solo per la frammentarietà dei pezzi che possono essere raccolti, ma anche per la probabile piccolezza delle masse geologiche originarie, e per le notevoli trasformazioni alle quali possono essere state sottoposte durante e dopo la loro consolidazione⁽⁴⁾.

(1) Vedi, per esempio: N. L. BOWEN, *Genetic features of alnoitic rocks at Isle Cadieux, Quebec*. « Am. J. Sc. », [5], III, 13 (1922) e K. H. SCHEUMANN, *Zur Genese alkalisch-lamprophyrischer Ganggesteine*. « Centralblatt f. Min. », 495 (1922).

(2) A. LACROIX, *Les roches grenues, intrusives dans le brèches basaltiques de la Réunion* etc. « C. R. Acad. Sc. », CLIV, 630 (1912).

(3) H. S. WASHINGTON, *The italite locality of Villa Senni*, cit., p. 194 e sgg.

(4) Dopo la revisione delle bozze di stampa, sono venuto a conoscenza che erano state descritte due rocce melilitiche di carattere intrusivo: la « turjaite » della Penisola di Cola, e la « uncomaphrite » del Colorado. Nella farragine dell'attuale nomenclatura petrografica, era difficile comprendere che questi nomi indicassero due rocce melilitiche; comunque i loro caratteri mineralogici e chimici non corrispondono ad alcuna delle rocce esaminate in questa Nota.

Botanica. — *Ulteriore contributo alla cariologia del genere «Fumaria»⁽¹⁾.* Nota di G. NEGODI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. E. CARANO.

Nella nostra recente Memoria sulla cariologia del genere *Fumaria*⁽³⁾, in cui furono presentati pure per raffronto i caratteri fogliari e fiorali della *Fumaria muralis* Sond., non si poterono fornire i valori delle grandezze nucleari ed il valore del numero dei cromosomi di questa piccola specie ben definita e costante, ma i cui rapporti morfologici sono evidenti con altre della specie collettiva *Fumaria capreolata*.

Questi rapporti sistematici sono ben evidenti e furono esattamente valutati dal Fiori nella «Flora analitica d'Italia», in cui *F. muralis* Sond. viene collocata nella collettiva *F. capreolata* e particolarmente in quel gruppo di piccole specie relativamente micrante e microcarpe che si inquadranano nella sezione «serotina».

Il gruppo di specie micrante e microcarpe di questa sezione si contrappone alle altre due sottospecie di *F. capreolata* (senso lato) includenti varie entità elementari, e cioè la sottospecie *Eucapreolata* e la sottospecie *Agraria*.

Di queste due ultime sottospecie furono posti in evidenza nella precedente nostra Memoria i caratteri citologici di quattro specie elementari e cioè: della *Eucapreolata*, *F. capreolata* L., *F. flabellata* Gasp. e della sottospecie *Agraria* la *F. agraria* Lag. e la *F. major* Bad., le quali risultano avere tutte, pure con delle leggere differenze di grandezza nucleare, l'assetto cromosomico $n = 28$. Per cui il loro stato gigante in confronto alle specie elementari della collettiva *F. officinalis* (di cui si fornirono i valori $n = 14$ per *F. officinalis* L., *F. micrantha* Lag., *F. parviflora* Lam. e per la grande specie *F. spicata* L.), si mette in rapporto all'assetto tetraploide del loro genoma.

Rimaneva da chiarire, tra altri lati del problema cariologico e filogenetico del gen. *Fumaria* particolarmente uno e cioè che valore di grandezza nucleare e quale numero dei cromosomi vi fossero nelle specie elementari della sezione *serotina* e particolarmente in quelle presentanti il soma più ridotto di grandezza, con segmenti fogliari più piccoli delle entità macrante della sottospecie *agraria* e specialmente *capreolata*, ma aventi tuttavia un portamento complessivo che morfologicamente si avvicina alle specie ele-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico della R. Università di Modena.

(2) Nella seduta del 6 dicembre 1936.

(3) G. NEGODI, *Cariologia e filogenesi del genere «Fumaria» (Papaveraceae)*. «Riv. di Biologia», vol. XX, fasc. II, 1936.

mentari del gruppo Eucapreolata pur essendo di statura appena un po' superiore alla grande specie micranta: *F. officinalis*.

Una di queste specie elementari, *F. muralis* Sond. che ottenni da semi avuti dall'Istituto Botanico di Parigi, risponde a questi requisiti.

I filli essendo mediocri di sviluppo hanno i segmenti larghi ovato-cuneati, i fiori di 9 mm. di lunghezza, rosei pallidissimi con l'apice porporino, presentano pedicelli mediocri sempre eretti e frutti rotondo-compressi del diametro di 2 mm.; i sepali si presentano grandetti.

Per molti caratteri essa costituisce una forma in miniatura della *Fumaria flabellata* avente pure essa i pedicelli fiorali diritti. Per la grandezza del polline essa risponde ai valori ed alle figure riportate nella citata nostra Memoria.

Le osservazioni cariologiche su questa entità portano ad un valore del diametro del nucleo delle cellule madri delle microspore in *synapsis* di 9μ e del nucleolo di $2,4 \mu$, in ciò assai simili ai valori della entità tipica della collettiva *F. officinalis*.

Pure il valore aploide del numero dei cromosomi si è potuto definire essere 14 ($2n = 28$).

Questi reperti cariologici portano quindi a stabilire come il modesto sviluppo somatico di *F. muralis* stia in relazione allo stato semplicemente diploide del suo genoma, ma soprattutto come nell'ambito della collettiva *F. capreolata* vi siano specie elementari (nel gruppo *serotina*) diploidi in confronto ai tetraploidi finora definiti nelle sezioni Agraria ed Eucapreolata.

Riflessa questa constatazione sul piano della filogenesi risulta un fatto di notevole interesse in quanto si possono vedere in queste forme diploidi (od affini, attuali od estinte) i capostipiti di alcune specie del gruppo *capreolata* (tetraploidi), qualora si accetti un'origine di queste per fatti di duplicazione auto- od alloploide.

In questo senso la relativa affinità morfologica tra tipi giganti e nani indizierebbe un legame filogenetico nell'ambito della stessa collettiva *capreolata*, come in senso sistematico fu intravisto pure dagli Autori che giustamente inchiodono le forme microsomatiche (*serotina*) nella collettiva *capreolata*.

Con ciò non si esclude che altre specie elementari attuali, od affini estinte, possano avere contribuito all'edificio delle specie giganti della collettiva *capreolata* ed il nostro pensiero va specialmente ad alcune entità della sottospecie Agraria, ma per ora i legami non si possono trarre sicuramente.

Biologia. — *Sopravvivenza e mitosi di cellule epiteliali libere in vitro*⁽¹⁾. Nota di W. JABLONSKI, presentata⁽²⁾ dal Socio G. LEVI.

Colture pure di cellule di diversi epiteli, dopo coltivazione della durata di anni⁽³⁾, e verosimilmente per tempo illimitato, crescono in forma di membrane, se vengono coltivate nelle condizioni abituali (in plasma non diluito ed estratto embrionale diluito). Le cellule epiteliali isolate in certi casi difficilmente si distinguono citologicamente da cellule isolate di altre razze⁽⁴⁾, p. es. dai fibroblasti; come criterio di riconoscimento delle cellule epiteliali *in vitro* valgono appunto i rapporti reciproci, il fatto cioè che esse crescono in forma di membrane, o, in altre parole, che la loro migrazione è un movimento di massa (Massenbewegung) « die nicht mit einer Isolierung einzelner Zellen einhergeht, sondern zu einer flaechenhaften Beruehrung gleichartiger Zellen fuehrt. Ganze Zellgruppen bewegen sich miteinander in derselben Richtung (Oppel) ». La cinematografia ha dimostrato lo stesso anche per l'epitelio *in vitro*⁽⁵⁾, nel quale si ha un costante mutamento di sede delle singole cellule nei loro rapporti reciproci⁽⁶⁾.

Però già nel 1914 Uhlenhuth⁽⁷⁾ vide, che al margine di colture di epitelio della pelle di rana vi erano cellule libere, e queste in numero maggiore se il tessuto era coltivato in un mezzo diluito. È inoltre noto che al margine di colture di epitelio irideo⁽⁸⁾ (e di epitelio del cristallino e del fegato⁽⁹⁾) diventano liberi gruppi di cellule e cellule singole.

Non ha rapporto con osservazioni antecedenti il reperto di Thomas⁽¹⁰⁾ che da colture pure di endotelio vitellino si possono ottenere istiociti e stituti di cellule morfologicamente simili ai fibrocyti.

Sopra il comportamento e la durata della sopravvivenza delle cellule libere nelle colture di tutti gli altri epiteli non ho potuto trovare nella let-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Anatomico della R. Università di Torino.

(2) Nella seduta del 6 dicembre 1936.

(3) EBELING, « J. exp. Med. », 41, 338 (1925).

(4) Vgl. FISCHER, Verh. Dtsch. Zool. Ges. », 1933.

(5) FISCHER, *Gewebezüchtung*. München, 1930.

(6) OPPEL, « Anat. Anz. », 41, 398 (1912); LEVI, « Arch. exp. Zellf. », 1, 1 (1925).

(7) « J. exp. Med. », 20, 614, (1914); BARKA, « Anat. Rec. », 29, 33, (1924), e « C. R. Soc. Biol. Pa. », 94, 1125 (1926).

(8) LEVI, « Erg. Anat. u. Entwicklungsgesch. », 31, 126, 1934.

(9) R. S. LYNCH, « A. f. Anat. », 29, 281 (1921).

(10) « C. R. Ac. Sci. Pa. », 196, 182; 199, 886, (1934); 200, 1360; 201, 1431, (1835); « C. R. Soc. Biol. Pa. », 112, 1206; 117, 758, (1934) e molte altre pubblicazioni.

teratura alcun dato. Io ho intrapreso ricerche sovra colture viventi dirette a studiare « *in vivo* » il destino di cellule libere di origine epiteliale, le quali non sono a contatto né colle membrane né fra loro; evidentemente in tal caso la migrazione individuale ha il sopravvento sulla migrazione collettiva, e ad esse manca adunque il carattere più nettamente specifico delle cellule epiteliali, il contatto reciproco. Mi sono particolarmente interessato di stabilire per quanto tempo esse sopravvivono e se siano capaci di suddividersi.

Furono studiate colture pure di epitelio irideo (metodo di Albert Fischer⁽¹⁾) e di epitelio del cristallino di embrioni di pollo di 8-11 giorni. Furono coltivate su copri oggetti di mica e in scatole di Carrel D e studiate fra l'8° e il 16° passaggio (da 3 a 9 settimane *in vitro*) in microscopio mantenuto nel termostato a 37, 38, 39°C⁽²⁾.

Alla periferia della membrana epiteliale si trovano in numero vario da coltura a coltura cellule che sono collegate alla membrana soltanto da sottili connessioni protoplasmatiche o « ponti ». Tali cellule possono dopo alcune ore migrare ancora radialmente; e allora i ponti di unione colla membrana possono persistere e, raramente, diventare molto lunghi, ovvero scomparire del tutto⁽³⁾. Le cellule nelle quali si vedeva anche un accenno di connessioni protoplasmatiche non furono prese in considerazione nelle mie ricerche. Le cellule libere presentano forma variabile da quella di fuso a quella di rettangolo allungato, sono mono- o binucleate (quest'ultime furono osservate in una sola coltura), in massima con due nucleoli. I condriosomi circondano il nucleo in forma di corti bastoncelli e granuli, oppure di lunghi filamenti contenuti nel plasma ialino il quale è più abbondante al polo attivo. In corrispondenza di questo polo il protoplasma emette prolungamenti molto fini di aspetto mutevole. I movimenti protoplasmatici sono veloci. Come nelle cellule sane delle membrane epiteliali, anche nelle cellule libere, durante il primo giorno, si trovano solo poche e piccole gocce di grasso.

Le cellule in gran parte non si allontanano molto dalla membrana, da una a tre volte la loro lunghezza, ma talora circa dieci volte tanto. Esse restano di solito separate dalla membrana solo per poche ore, talvolta però per molto di più, da uno a tre giorni (questo tempo è stato, per ragioni tecniche, la massima durata di osservazione⁽⁴⁾), emettono pseudopodi, e migrano lentamente come cellule libere di altri tipi.

Mi è sembrato importante di stabilire se le cellule che sono almeno da qualche ora senza connessione con altre cellule, possano dividersi per

(1) « *J. exp. Med.* », 36, 367, (1922).

(2) LEVI, *Gewebezüchtung* in « Peterfis Methodik der wiss. Biol. »: Berlin, Springer, 1928.

(3) Durante la mitosi i ponti scompaiono sempre.

(4) La durata di osservazione sarà probabilmente allungata con modificazioni di tecnica.

mitosi. Ho visto la mitosi di quattro cellule libere in tre colture; le cellule figlie non mostravano anche in seguito nessun segno di sofferenza. In un caso fu riscontrata, 18 ore dopo la divisione di una cellula libera la divisione di una delle cellule figlie. Una delle due cellule di quest'ultima generazione si riunì alla membrana dopo altre sei ore; l'altra non poté venire seguita.

Cellule che già precedentemente apparivano danneggiate, possono venire a morte mentre sono isolate. Le cellule sane invece dopo il periodo di tempo indicato, da qualche ora fino a tre giorni, si riuniscono colla membrana epiteliale.

L'unione con quest'ultima si stabilisce nel modo seguente: il ialoplasma attivo appare al polo centrale della cellula; da esso si dipartono verso la membrana prolungamenti molto sottili, filiformi; in pari tempo, o solo poco dopo, in ogni caso mentre la cellula è ancora nettamente separata dall'epitelio, si originano da questo dei filamenti altrettanto sottili verso i prolungamenti della cellula. Il nucleo migra rapidamente verso la membrana, e spesso entro tre quarti d'ora la cellula non è più distinguibile dalle altre cellule dell'epitelio. Il fatto che col cambiare della direzione di migrazione della cellula libera il pezzo centrale della coltura emette dei pseudopodi incontro a quelli della cellula, ci fa supporre che anche le cellule libere siano in qualche modo in correlazione col pezzo centrale⁽¹⁾.

(1) Desidero ringraziare il prof. LEVI per avermi suggerito il presente lavoro, per l'interesse dimostrato alle mie ricerche, e per i numerosi consigli datimi nel corso del lavoro.

Ringrazio anche la signorina H. MEYER per il suo instancabile aiuto nella osservazione prolungata delle colture.

Fisiologia. — Funzione tiroidea e alcoolemia provocata⁽¹⁾.

Nota di G. LOLLI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sui rapporti tra funzione tiroidea e metabolismo dell'alcool hanno eseguito ricerche già altri AA. Widmark⁽³⁾ nei cani ha osservato che la tiroxina non modifica le curve alcooliche provocate; Dell'Acqua⁽⁴⁾ invece in individui affetti da ipertiroidismo avrebbe osservato curve alcooliche più basse di quelle caratteristiche degli individui normali.

È da notare però che le ricerche di quest'ultimo A., essendo state eseguite con dosaggi del tasso alcoolemico assai distanziati l'uno dall'altro (30'-90' d'intervallo), sono tali, come risulta dalle oramai numerose osservazioni delle curve alcooliche, da non fornire elementi sufficienti per esatti rilievi comparativi.

Ci è sembrato opportuno pertanto riprendere l'argomento, studiando da un lato anzichè l'azione di un solo ormone tiroideo, quale la tiroxina, l'azione di un estratto totale di ghiandola tiroide, ripetutamente somministrato; dall'altro il comportamento della curva alcoolemica provocata a digiuno in individui affetti da malattia di Flajani-Basedow con tecnica appropriata, ossia eseguendo prelievi di sangue assai ravvicinati.

Le ricerche sono state eseguite in due individui affetti da malattia di Flajani-Basedow e in un individuo normale sottoposto a trattamento con estratto totale di ghiandola tiroide.

Le curve alcooliche sono state ricavate con la tecnica già descritta in precedenti Note⁽⁵⁾,⁽⁶⁾.

Nel soggetto A. E., (Esp. 1, 2) affetto da m. di Flajani-Basedow, le curve alcooliche provocate a digiuno e dopo pasto furono sostanzialmente analoghe a quelle che si riscontrano in soggetti normali.

L'esperienza n. 3 concerne un altro caso di m. di Flajani-Basedow. Anche qui la curva alcoolemica provocata a digiuno si comportò come nei soggetti normali.

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia umana di Roma e nel Reparto di Patologia digestiva e dietetica degli Ospedali Riuniti di Roma.

(2) Nella seduta del 6 dicembre 1936.

(3) E. WIDMARK, « Bioch. Zeitschr. », 1935.

(4) G. DELL'ACQUA, « Klin. Wochenschr. », 1932.

(5) G. LOLLI, *Problema alimentare*, 1935.

(6) G. LOLLI, *Fisiologia e Medicina*, 1936.

TABELLA DELLE ESPERIENZE.

| N. ordine d'ordine Numerico | Data | Nome | Diagnosi | Condizioni della esperienza | Quantità di alcool ingerita | Tassi alcolemici %/oo successivi alla inglestione dell'alcool | | | | | | | |
|-----------------------------------|-----------|-------------------------|---------------------------|---|-----------------------------------|---|-----------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|----------------------|
| 1 | 6-4-1935 | A. E. Peso Kg. 46 | m. di Flaiani- Basedow | Curva alcolemica provocata a di- giuno | cc. 23 in sol. al 20 % | 5' 0.31 0.49 | 25' 0.62 0.51 0.45 | 35' 0.53 0.33 | 45' 0.33 0.33 | 55' 0.33 | 70' 0.33 | 85' 0.24 | — |
| 2 | 26-4-1935 | id. | id. | Curva alcolemica provocata dopo pasto misto. | id. | 5' 0.14 0.31 | 25' 0.33 0.31 | 35' 0.31 0.33 | 45' 0.38 0.38 | 55' 0.38 0.08 | 75' 0.08 | — | — |
| 3 | 26-4-1935 | R. A. Peso Kg. 40 | id. | Curva alcolemica provocata a di- giuno | cc. 20 in sol. al 20 % | 5' 0.29 0.48 | 25' 0.56 0.56 | 35' 0.44 0.47 | 45' 0.47 0.47 | 55' 0.44 0.44 | 70' 0.38 0.38 | 85' 0.35 0.35 | — |
| 4 | 12-6-1935 | C. F. Peso Kg. 55 | Soggetto sano | id. | cc. 27,5 in sol. al 20 % | 5' 0.15 0.50 | 25' 0.57 0.57 | 35' 0.39 0.39 | 45' 0.36 0.36 | 55' 0.36 0.36 | 70' 0.30 0.27 | 85' 0.27 0.27 | 100' 0.23 0.20 |
| 5 | 21-6-1935 | id. | id. | Curva alcolemica provocata a di- giuno dopo due giorni di trattamento con estratto tiroideo. | id. | 5' 0.29 0.58 | 25' 0.55 0.55 | 35' 0.39 0.39 | 50' 0.31 0.31 | 65' 0.27 0.27 | 80' 0.21 0.21 | 95' 0.18 0.18 | — |

Le esperienze 4, 5 furono eseguite con l'intento di osservare il comportamento della curva alcoolemica provocata a digiuno in soggetto normale sottoposto a trattamento con estratto totale di ghiandola tiroide.

La prima curva (Esp. 4) fu eseguita prima di iniziare il trattamento.

La seconda curva (Esp. 5) fu eseguita dopo due giorni di trattamento. Nei giorni 19 e 20 giugno furono somministrate al soggetto in esame complessivamente quattro compresse di tiroide « Dispert », corrispondenti a 40 unità tiroidee titolate secondo il metodo biologico ideato da Straub. Una quinta compressa (10 unità tiroidee) fu somministrata cinque ore prima dell'inizio dell'esperienza n. 5 (21 giugno).

Non si osservarono sensibili differenze tra le esperienze 4 e 5.

Riassumendo, nei due individui affetti da m. di Flajani-Basedow, contrariamente alle osservazioni compiute da Dell'Acqua in altri casi di ipertiroidismo, le curve alcolemiche sono state normali; e così pure comportamento normale della curva alcoolemica provocata è stato rilevato nel soggetto sano sottoposto a trattamento con estratto totale di tiroide, in accordo con i risultati ottenuti da Widmark nei cani con la tiroxina.

Fisiologia. — L'azione della morfina sulla curva alcoolemica provocata nell'uomo normale.⁽¹⁾ Nota di E. SERIANNI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Come è stato rilevato in Note precedenti⁽³⁾ e⁽⁴⁾, l'alcoolemia provocata può essere modificata da alcune sostanze che agiscono anche sulla glicemia. Tale fatto si è dimostrato evidente specialmente per l'insulina, i cui effetti sull'alcoolemia sembrerebbero analoghi a quelli da essa esplicati sulla glicemia; per l'adrenalina invece, pur essendo stato osservato in qualche soggetto un lieve abbassamento della curva alcoolemica, azione opposta cioè a quella che l'ormone esercita sulla glicemia, non si è potuta dimostrare un'azione netta e costante.

Con le presenti ricerche ho saggiato un'altra sostanza iperglicemizzante quale la morfina, la cui azione sulla glicemia è stata dimostrata da vari autori (Frank e Förster, Holm, Stewart e Rogoff, Pannella, Zagami, Lolli e Serianni ecc. ⁽⁵⁾, ⁽⁶⁾, ⁽⁷⁾, ⁽⁸⁾, ⁽⁹⁾, ⁽¹⁰⁾).

Le ricerche sono state eseguite nell'uomo, in tre soggetti giovani e sani a digiuno da circa 12 ore, con tecnica analoga a quella riferita nelle precedenti Note. La morfina, sotto forma di cloridrato, è stata iniettata per via sottocutanea nella dose di 1 ctg. prima della ingestione della bevanda idroalcoolica con un intervallo di circa 25'. I particolari delle condizioni sperimentali e i dati relativi risultano dalla seguente tabella:

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia umana della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 6 dicembre 1936.

(3) E. SERIANNI, *L'azione dell'insulina sull'alcoolemia provocata nell'uomo normale*. «Rend. Acc. Naz. Lincei», XXI, 1935, p. 394.

(4) S. MINZ e E. SERIANNI, *L'azione dell'adrenalina e dell'atropina sull'alcoolemia provocata*. «Rend. Acc. Naz. Lincei» in corso di pubblicazione.

(5) N. FRANK e J. FÖRSTER, *Untersuchungen über Glycogengehalt der Leber*. «Biochem. Ztschr.» 159, 1925, p. 48.

(6) K. HOLM, *Zur Wirkung des Morphiums auf die Zusammensetzung des Blutes und den Kohlenhydrat-Stoffwechsel*. «Zeitsch. f. d. Ges. exper. Med.» 37, 1923, p. 811.

(7) G. N. STEWART e J. M. ROGOFF, *Morphine hyperglycemia and the adrenals*. «Am. Journ. Physiol.» 62, 1922, p. 93.

(8) P. PANNELLA, *Influenza della morfina sugli organi ematopoietici, sulla glicemia e sul glicogeno epatico*. «Arch. di Fisiol.», 1929, p. 493.

(9) V. ZAGAMI, *Effetti dell'azione associata della morfina e dell'insulina*. «Fisiologia e Medicina», III, 1932, p. 15.

(10) G. LOLLI e E. SERIANNI, *L'azione dell'insulina e della morfina sulla glicemia dell'uomo normale e di malati di diabete mellito*. «Boll. R. Acc. Med. di Roma», 1935.

TABELLA.

| Soggetto Eta Peso | Data | Quantità di alcool ingerito | Condizioni della esperienza | Tassi alcoolemici % successivi all'ingestione di alcool | | | | | | | |
|-----------------------------|------------|-----------------------------------|--|---|---------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|--------------|
| | | | | 34 cc. | Curva normale | 0' 0,07 | 5' 0,30 | 15' 0,67 | 30' 0,65 | 35' 0,62 | 50' 0,61 |
| D. A. L. a. 23 Kg. 68 | 6-12-1934 | 34 cc. | Curva normale | 0' 0,07 | 5' 0,30 | 15' 0,67 | 30' 0,65 | 35' 0,62 | 50' 0,61 | 70' 0,54 | — |
| Idem | 14-12-1934 | Idem | Idem | 10' 0,42 | 20' 0,46 | 30' 0,57 | 44' 0,54 | 59' 0,64 | 74' 0,53 | 89' 0,46 | 114' 0,36 |
| Idem | 20-12-1934 | Idem | 26' dopo iniezione di 1 ctg. di morfina | 5' 0,20 | 15' 0,28 | 25' 0,35 | 35' 0,36 | 45' 0,37 | 75' 0,36 | 105' 0,25 | — |
| L. G. G. a. 25 Kg. 65 | 6-12-1934 | 33 cc. | Curva normale | 0' 0,01 | 5' 0,31 | 15' 0,61 | 25' 0,81 | 35' 0,62 | 50' 0,61 | 65' 0,56 | — |
| Idem | 11-12-1934 | Idem | Idem | 15' 0,83 | 25' 0,80 | 40' 0,70 | 50' 0,67 | 60' 0,62 | 90' 0,49 | 115' 0,50 | — |
| Idem | 20-12-1934 | Idem | 26' dopo iniezione di 1 ctg. di morfina | 5' 0,46 | 15' 0,63 | 25' 0,63 | 35' 0,51 | 45' 0,50 | 66' 0,44 | 81' 0,39 | — |
| E. E. a. 24 Kg. 72 | 8-1-1935 | 36 cc. | Curva normale | 29' 0,80 | 35' 0,73 | 45' 0,65 | 59' 0,63 | — | — | — | — |
| Idem | 10-1-1935 | Idem | Idem | 0' 0,01 | 5' 0,37 | 15' 0,79 | 25' 0,88 | 35' 0,81 | 45' 0,74 | 69' 0,56 | 91' 0,53 |
| Idem | 28-2-1935 | Idem | 25' dopo iniezione di 1 ctg. di morfina | 5' 0,38 | 15' 0,53 | 25' 0,55 | 35' 0,58 | 45' 0,52 | 55' 0,48 | 65' 0,44 | 75' 0,40 |

Dall'esame comparativo delle curve alcoolemiche normali e di quelle provocate dopo iniezione di morfina mi sembra poter concludere che in tutti e tre i soggetti esaminati la morfina ha esplicato un'azione sull'alcoolemia provocata nel senso di indurre un abbassamento, più o meno marcato, della curva. Gli abbassamenti relativi all'acme della curva sono stati rispettivamente di circa 40 %, 20 %, 30 %.

Biologia. — *Sulla presenza di una vera capsula surrenale nei Selaci.*
Nota di M. PITOTTI, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *Ghiandole endocrine, maturità sessuale e gestazione nei Selaci.*
Nota di S. RANZI, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio SEVERI dà ai Colleghi la dolorosa notizia della morte, avvenuta a Parigi il 25 novembre scorso, del Socio Straniero EDOUARD GOURSAT. Commemora brevemente lo Scomparso e, sicuro di interpretare il sentimento dei Colleghi, invia alla Sua memoria un commosso saluto.

Il Presidente sen. MILLOSEVICH si associa alle parole pronunciate dal Socio SEVERI e assicura che sarà inviato alla famiglia del Socio GOURSAT un telegramma che esprima il sentimento di compianto dell'Accademia.

RELAZIONI SU TEMI DATI

Ha inizio la discussione sulla relazione dei Soci ROLLA e ABETTI sulla « Chimica delle stelle », già distribuita in fascicolo stampato ai Soci.

Il Presidente MILLOSEVICH comunica che il Socio ABETTI è assente perché trattenuto a Firenze dai suoi doveri di pro-rettore dell'Università.

Comunica anche che sono presenti alla Seduta, invitati dalla Presidenza, il prof. Piccardi, collaboratore del prof. ROLLA e del prof. ABETTI nelle loro ricerche di astrochimica, il prof. Colacevich in rappresentanza del prof. ABETTI e il prof. Gratton in rappresentanza del Socio BIANCHI, trattenuto a Milano da gravi ragioni di famiglia.

Dà quindi la parola al Socio ROLLA, che, con brillante esposizione, riassume la relazione già distribuita ai Soci parlando dei problemi della moderna astrofisica che possono essere affrontati nei laboratori di chimica-fisica. Idrogeno molecolare, idruri, e ossidi nell'atmosfera del sole; vapor d'acqua, anidride carbonica, metano e ammoniaca nelle atmosfere dei pianeti sono le scoperte recenti che hanno trovato una spiegazione in base a esperienze di laboratorio.

Apertasi la discussione sulla relazione dei Soci ROLLA e ABETTI il Presidente dà la parola al prof. Piccardi che parla delle proprie ricerche teoriche e sperimentali riguardanti l'idrogeno molecolare nelle macchie solari, precisando dal punto di vista termodinamico e spettroscopico il problema dell'identificazione di questa molecola.

Hanno preso successivamente la parola, per osservazioni e chiarimenti di carattere particolare, gli Accademici FERMI e RASSETTI e i proff. Colacevich e Gratton.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Corrisp. BORDONI presenta in omaggio il volume 1º del suoi « Fondamenti di Fisica tecnica » e ne parla.

Il Socio Sacco presenta in omaggio il suo opuscolo dal titolo « Il fenomeno diluvio-glaciale nelle Alpi durante l'era terziaria » e ne espone il contenuto.

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta i libri giunti in dono all'Accademia segnalando fra gli altri il volume secondo, parte prima, dell'« Enciclopedia delle Matematiche elementari », e il grosso volume degli « Atti del Vº Congresso Nazionale di Chimica pura ed applicata ».

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei Rendiconti i Soci CARANO, CORBINO, CROCCO, GIORGI, RAFFAELE, ROLLA, SCORZA.

PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

Il PRESIDENTE informa i Colleghi che è pervenuto alla Segreteria un plico suggellato del dott. Trifone De Micheli, e dichiara che esso sarà conservato a disposizione del dott. De Micheli negli Archivi dell'Accademia

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACADEMIA

presentate nella seduta del 6 dicembre 1936

- Atti del V Congresso Nazionale di chimica pura ed applicata (tenuto in Sardegna dal 29 aprile al 6 maggio 1935—XIII) a cura del prof. Domenico Marotta. Roma, 1936. 8° pp. I—LXXVIII, I—979.
- BARBERA MARCO. — Le cantonate dei fisici novecento e la fisica razionale. Torino, 1936. 8°, pp. I—31, I—3.
- BARTA J. — Ueber die Randwertaufgabe der gleichmässig belasteten Kreisplatte. (Sonderabdruck aus « Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Ingenieurwissenschaftliche Forschungsarbeiten ». Band XVI, pp. 311—314). Berlin, 1936. 4°.
- BOJK BART J.— A study of the γ Carinae Region. Groningen, 1932. 8°, pp. I—90.
- BORDONI UGO. — Fondamenti di fisica tecnica. Vol. I. Bologna, Editore Nicola Zanichelli, 1936. 8°, pp. I—VIII, I—711.
- BUA GAETANO. — Un quinquennio di osservazioni bio-ambientali sulla mosca delle olive. (Estr. dalla Rivista « La Meteorologia pratica ». Anno XVII. Perugia, 1936. 8°, pp. I—15).
- Divisional Reports on present tendencies in the development of mathematical Teaching in Japan. Tokyo, 1936. 8°, pp. I—174.
- DOBELL CLIFFORD. — Researches on the intestinal Protozoa of monkeys and man. VIII. An experimental study of some simian strains of « *Entamoeba coli* ». (From « Parasitology ». Vol. XXVIII, pp. 541—593). Cambridge, 1936. 8°.
- DOBROVSKY JOSEF. — Návrh soustavy rostlinné a rostlinopisný materiál z pozůstalosti. (Spisy. Svazek XVIII). V Praze, 1936. 8°, pp. I—120.
- Enciclopedia delle matematiche elementari. A cura di L. Berzolari, G. Vivanti e D. Gigli. Vol. II, parte I. Milano, Ulrico Hoepli, 1937—XV. 8°, pp. I—XVI, I—634.
- GOLDBERG LEO. — Note on absolute multiplet strengths. (Reprinted from the « Astrophysical Journal ». Vol. 84). S. l. 1936. 8°, pp. 11—13.
- GOLDBERG Leo. — Vedi MENZEL DONALD H.
- JANNONE GIUSEPPE. — Italy: Numerous Outbreaks of *Locusta migratoria* L. ph. *gregaria* (Typical) and Phases of transition in the Province of Naples. (Reprinted from the « International Bulletin of Plant Protection ». Year X, pp. 218—219). Rome, 1936. 8°.
- LAWS C. R. — The Waitotaran Faunule at Kaawa Creek. Part I. (Reprinted from the « Transactions of the Royal Society of New Zealand ». Vol. 66, pp. 37—59). Aneklund, 1934. 8°, pp. 1—59.
- LONGO L. — Vedi PENTA F.
- LORIA GINO. — Galileo Galilei nella vita e nelle opere. (Estr. dagli « Atti della Società di Scienze e Lettere di Genova ». Vol. I). Pavia, 1936. 8°, pp. 1—68.
- MENZEL DONALD H. and GOLDBERG LEO. — Multiplet strengths for transitions involving equivalent electrons. (Reprinted from the « Astrophys-

- cal Journal ». Vol. 84). S. l. 1936.
8°, p. 1-10.
- ÔUCHI YOSHIO. — 1935. Supplements to
bibliographical Introduction to the
study of Chinese Insects. (From the
« Journal of the Shanghai Science
Institute ». Section III, vol. III,
pp. 125-220). Shanghai, 1936. 8°.
- PARISELLE M. H. — Polarimétrie et chi-
mie (In « Mémorial des Sciences
Physiques ». Fasc. XXXII). Paris,
1936. 8°, pp. 1-59.
- PAYNE GAPASCHKIN CECILIA. — On the
physical condition of the supernova-
vae. (Reprinted from the « Proceed-
ings of the National Academy of
Sciences ». Vol. XXII, pp. 332-336).
S. l. 1936. 8°.
- PENTA F. e LONGO L. — Sulla « reazione
della lignina » per la distinzione fra
ligniti e litantraci. (Estr. dal « Bol-
lettino della Società dei Naturalisti
in Napoli ». Vol. XLVIII, pp. 91-
118). Napoli, 1936. 8°.
- RUSSO A. — Aumento del condrioma nel-
l'ovocite della coniglia. (Estr. dal-
l'« Archivio di Scienze Biologiche ».
Vol. XXII, pp. 374-378). Bologna,
1936. 8°.
- SACCO FEDERICO. — Il fenomeno dilu-
vio-glaciale nelle Alpi durante l'Èra
terziaria. (Estr. dal « Bollettino della
Società Geologica Italiana ». Vol. LV,
pp. 63-115). Roma, 1936. 8°.
- SFORZA NICOLA. — Prima mostra degli
spedali italiani. Roma, maggio 1935-
XIII. Roma, 1935. 4°, pp. 1-148.
- SILVESTRI FILIPPO. — Report on Diplura
and Thysanura. (From the « Mem.
Conn. Acad. ». Vol. X, pp. 253-259).
S. l. 1936. 8°.
- SILVESTRI FILIPPO. — Report on Myria-
pods. (From the « Mem. Conn. Acad.
Vol. V, pp. 241-252). S. l. 1936. 8°.
- VIGNE PAUL. — L'œuvre scientifique de
Auguste Lumière dans le domaine
de la biologie et de la médecine.
Lyon, 1936. 8°, pp. 1-60.

N. P.

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 20 dicembre 1936-XV

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica (Geometria algebrica). — *Complementi alla teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche.* Nota I⁽¹⁾ del Socio F. SEVERI.

Queste Note continuano le mie ricerche sulle corrispondenze tra varietà algebriche⁽²⁾. Nella costruzione della teoria delle corrispondenze *ecc.*, sopra una varietà M , ad r dimensioni, si distinguon tre fasi essenziali:

1) Determinazione delle corrispondenze a valenza zero (rispetto alle serie d'equivalenza).

2) Determinazione delle corrispondenze che si riducono a valenza zero, mercè l'aggiunta del multiplo secondo un intero conveniente γ (positivo o negativo) dell'identità Ω (corrispondenze a valenza γ). Per queste la teoria è compiuta in conseguenza di 1), non appena siasi determinata la serie virtuale d'equivalenza (Ω, Ω) .

3) Determinazione del principio generale di corrispondenza e del suo significato funzionale, componendo ogni corrispondenza per combinazione lineare di un numero fissato di altre corrispondenze, date una volta per sempre, e di una corrispondenza a valenza zero. Anche per questo si deve poggiar sulla fase 1).

(1) Presentata nella seduta del 20 dicembre 1936.

(2) Richiamo soltanto le ultime ricerche, che contengon gli elementi essenziali della teoria e i riferimenti alle precedenti: A) *La base per le varietà ecc.* («Memorie della R. Accademia d'Italia», 1934); B) *La teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche.* Nota I e II («Rendiconti dei Lincei», giugno, 1936); C) *Il rango di una corrispondenza a valenza sopra una superficie.* («Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», ottobre 1936).

È dunque anzitutto necessario di lumeggiar sotto ogni aspetto le corrispondenze a valenza zero. Il concetto dei ranghi d'una tal corrispondenza è forse il solo che abbisogni ancora d'un'ulteriore analisi, perchè con esso non si pone *a priori* in evidenza (come sarebbe desiderabile) per qual ragione le singole corrispondenze a valenza zero, sulle varietà a più di 1 dimensione, dipendono non soltanto dalla natura geometrica, ma anche dalla natura aritmetica della varietà, cioè dai problemi della base.

Per brevità limito il discorso alle superficie. Io avevo introdotto il rango, specialmente per chiarire la portata delle corrispondenze studiate da Zeuthen (1906–1914), il quale considerò un carattere proiettivo, che, correttamente interpretato, riducesi appunto, per tali corrispondenze, al rango. Ma avevo altresì finito col concludere che le corrispondenze di Zeuthen sono d'un tipo particolarissimo. Invero, mentre una corrispondenza a valenza zero di tipo generale sottopone i cicli bidimensionali della superficie F soltanto alla condizione di trasformarsi in cicli algebrici, una corrispondenza di Zeuthen è particolare perfino entro la classe delle corrispondenze, che mutano ogni ciclo bidimensionale in un multiplo di un *dato* ciclo algebrico. La definizione del rango alla maniera di Zeuthen è possibile precisamente in virtù di questa particolarità. P. es., nel piano ogni ciclo bidimensionale si riduce ad un multiplo della riemanniana d'una retta e quindi può assegnarsi (come fece il Salmon nel 1865) il numero (oggi si direbbe virtuale) dei punti uniti d'una corrispondenza algebrica piana come somma di tre indici (l'ultimo dei quali è appunto il rango): i numeri cioè delle coppie x, x' di punti omologhi nella corrispondenza, il cui x od il cui x' son dati ed il numero delle coppie x, x' il cui x sta sopra una retta data ed il cui x' sta sopra un'altra retta data.

Ma la possibilità di assimilare il rango ad un indice, inquadrando rango ed indici in una sola definizione, viene a mancare se la corrispondenza T a valenza zero è di tipo generale. Quando non v'è un ciclo algebrico privilegiato per T , rispetto al quale il rango sia definibile come un indice, con riferimento cioè al numero delle coppie x, x' , aventi x sopra quel ciclo e x' sopra un ciclo ad esso omologo, è chiaro che bisogna porre in gioco tutte le possibili coppie, algebricamente distinte, di cicli algebrici, della superficie F . E da ciò il collegamento colla base.

È appunto questo collegamento, che vien attuato nella presente Nota, in modo che rimanga visibile nell'enunciato del principio di corrispondenza. Nello stesso tempo il risultato, che avevo già ottenuto per via algebrico-geometrica in B , viene conseguito per via puramente topologica, muovendo dalle proprietà topologiche d'una corrispondenza a valenza (o pseudovalenza) zero.

I. Sia, anzitutto, $\Gamma_s^1, \Gamma_s^2, \dots, \Gamma_s^{R_s}$ una base intermediaria degli s -cicli sulla varietà M , e T una corrispondenza algebrica qualunque ∞^r sopra M .

Denoti infine M' una copia di M , sovrapposta ad M . Poichè ogni $2r$ -ciclo di $M \times M'$ è pseudomologo⁽¹⁾ ad una combinazione lineare a coefficienti interi di cicli del tipo $\Gamma_s^i \times \Gamma_{2r-s}^j$, così:

$$(1) \quad T \approx \sum_{s=0}^{2r} \sum_{i,j} \lambda_{ij}^{(s)} (\Gamma_s^i \times \Gamma_{2r-s}^j), \quad (i, j = 1, 2, \dots, R_s).$$

Intendo qui che T sia l'operazione facente passare da M ad M' e che nella corrispondenza topologica degenere $\Gamma_s^i \times \Gamma_{2r-s}^j$, il ciclo scritto a sinistra appartenga ad M (luogo degli x) e il ciclo a destra ad M' (luogo degli x'). Se si considera invece l'operazione inversa T^{-1} , essa è rappresentata su $M \times M'$ dallo stesso $2r$ -ciclo (che si potrà senza ambiguità denotare con T o con T^{-1}), ma naturalmente cangia il modo di operare della corrispondenza sui cicli della varietà, secondo che ci si riferisce all'una o all'altra operazione (ved. l'Osservazione alla fine di questo numero).

Sia Γ_k un qualunque k -ciclo di M . Il suo trasformato $T(\Gamma_k)$, mediante T , s'ottiene, in base alla (1), trasformando Γ_k colla generica corrispondenza $\Gamma_s^i \times \Gamma_{2r-s}^j$. Ora, se $k+s < 2r$, i cicli Γ_k, Γ_s^i non hanno intersezioni virtuali in M , epperò il trasformato di Γ_k mediante $\Gamma_s^i \times \Gamma_{2r-s}^j$ è un ciclo nullo. Se $k+s = 2r$ il trasformato di Γ_k è il ciclo $[\Gamma_s^i, \Gamma_k] \Gamma_k^j$, ove, al solito, $[\Gamma_s^i, \Gamma_k]$ sia l'indice di Kronecker di Γ_s^i, Γ_k , cioè il numero virtuale delle loro intersezioni; se infine $k+s > 2r$, il trasformato di Γ_k è un ciclo Γ_{2r-s}^j di dimensione $< k$ (da contarsi ∞^{k+s-2r} volte), cioè un ciclo nullo, come k -ciclo. Si perviene in tal guisa rapidamente alla nota relazione:

$$T(\Gamma_k) \approx \sum_{i,j} \lambda_{ij}^{(2r-k)} [\Gamma_{2r-k}^i, \Gamma_k] \Gamma_k^j,$$

che scriveremo sotto la forma:

$$T(\Gamma_k) \approx \sum_j \mu_j^{(k)} \Gamma_k^j,$$

avendo posto:

$$\mu_j^{(k)} = \sum_i \lambda_{ij}^{(2r-k)} [\Gamma_{2r-k}^i, \Gamma_k].$$

(1) Chiamo brevemente *pseudomologie* quelle che LEFSCHETZ, sull'esempio di POINCARÉ, chiama *omologie senza divisione*, cioè omologie a meno d'un fattor numerico intero comune ai due membri. Le deduzioni di questo numero derivano già da LEFSCHETZ (ved. le citazioni più innanzi), salvo lievi cangiantimenti formali, che convengono ai nostri scopi e che le riattaccano con maggiore chiarezza agli sviluppi dei successivi numeri.

Fatto coincidere successivamente Γ_k con $\Gamma_k^1, \Gamma_k^2, \dots, \Gamma_k^{R_k}$, viene:

$$(2) \quad \mu_{jl}^{(k)} = \sum_i \lambda_{ij}^{(2r-k)} [\Gamma_{2r-k}^i, \Gamma_k^l]^{(1)}, \quad (l=1, 2, \dots, R_k),$$

$$(3) \quad T(\Gamma_k^l) \approx \sum_i \mu_{jl}^{(k)} \Gamma_k^i.$$

OSSERVAZIONE. — L'inversa T^{-1} di T è ancora rappresentata su $M' \times M$ dal secondo membro della (1), scritto però sotto la forma:

$$T^{-1} \approx \sum_{s=0}^{2r} (-1)^s \sum_{i,j} \lambda_{ij}^{(s)} [\Gamma_{2r-s}^j, \Gamma_s^i],$$

tenuto conto che il prodotto $\Gamma_s^i \times \Gamma_{2r-s}^j$ cangia di segno permutandone i termini, se s è dispari. Perciò le relazioni analoghe alle (2), (3), per T^{-1} , sono:

$$(4) \quad \bar{\mu}_{il}^{(k)} = \sum_j (-1)^k \lambda_{ij}^{(k)} [\Gamma_{2r-k}^j, \Gamma_k^l],$$

$$(5) \quad T^{-1}(\Gamma_k^l) \approx \sum_i \bar{\mu}_{il}^{(k)} \Gamma_k^i.$$

2. Se T è una corrispondenza a valenza o a pseudovalenza zero, essa è a circolazione dispari nulla e a circolazione pari algebrica, cioè essa muta i cicli di dimensione dispari di M in cicli nulli (o pseudonulli) e i cicli di dimensione pari in cicli algebrici. Analogamente si comporta T^{-1} , che è pure a valenza o a pseudovalenza zero.

Questa proposizione conseguie dal fatto che una serie d'equivalenza o di pseudoequivalenza su M è appunto a circolazione dispari nulla e a circolazione pari algebrica, come si riconosce estendendo il ragionamento che ho già svolto altrove nel caso delle superficie, tenuto conto che la rieman-

(1) Cioè, per ogni valore di k , la matrice quadrata delle $\mu^{(k)}$ è il prodotto della matrice quadrata delle $\lambda^{(2r-k)}$ per la matrice $[[\Gamma_{2r-k}^i, \Gamma_k^l]]$, che è la matrice discriminante delle due basi duali Γ_{2r-k}^i e Γ_k^l . (Ved. LEFSCHETZ, *Topology*, New York, 1930, p. 268). Dalla (1), segando i due membri coll'identità Ω e tenendo conto del segno delle intersezioni delle varietà algebriche $\Gamma_s^i \times \Gamma_{2r-s}^j$ ed Ω , entro $M \times M'$, segno che uguaglia o no il segno di $[\Gamma_s^i, \Gamma_{2r-s}^j]$ su M , secondo la parità di s , si trova, mediante le (2), il numero virtuale delle coincidenze di T espresso colla formula di LEFSCHETZ:

$$[T, \Omega] = \sum_{s=0}^{2r} (-1)^s \sum_{i=1}^{R_s} \mu_{ii}^{(s)}.$$

(Ved. LEFSCHETZ, *Topology*, p. 272).

niana di uno spazio lineare S_r ha nulle le connessioni dispari ed uguali ad 1 le connessioni pari; e che in essa ogni ciclo di data dimensione $2l$ si riduce ad un multiplo di uno spazio lineare S_l , contenuto in S_r .

Ma lo stesso risultato, per ciò che concerne le corrispondenze, può pure dedursi subito dall'espressione data per T nella Nota B (nn. 2, 6), e che del resto è quella medesima successivamente indicata con (8) nella Nota II. Basta all'uopo osservare che ciascuno dei prodotti che compongono, per combinazione lineare, le singole corrispondenze delle specie $r, r+1, \dots, 2r-2$, associate a T , muta un ciclo di dimensione dispari in un ciclo nullo o pseudonullo (perchè in quel prodotto non figurano che cicli di dimensione pari) e un ciclo di dimensione pari in un ciclo nullo o in un ciclo algebrico, secondo che la dimensione del ciclo trasformando è diversa dalla dimensione del primo fattore del prodotto o uguale a questa.

Matematica. — *Complementi alla teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche.* Nota II del Socio F. SEVERI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Polinomi definiti.* - II. *Classi di polinomi definiti ottenuti da alcuni prefissati.* Nota di G. BARBA, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. V. NOBILE.

1. In una precedente Nota lincea, abbiamo impostato il problema dei polinomi definiti e accennato alla costruzione di sistemi lineari portanti a polinomi non indefiniti. Vogliamo qui esaminare alcune proprietà delle trasformazioni introdotte nella predetta Nota, alla quale rimandiamo sia pel simbolismo, sia per ogni altro riferimento.

A partire dal polinomio non indefinito

$$(4) \quad f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (a_n = 1),$$

formiamo $f(x+\alpha)$ e $f(x+\beta)$, con α e β reali. Risulterà non indefinito anche il polinomio somma.

a) Non esiste, però, alcun valore reale γ per cui si abbia identicamente:

$$Af(x+\alpha) + Bf(x+\beta) = Cf(x+\gamma).$$

(1) Nella seduta del 6 dicembre 1936.

b) Da $f(x)$ si passi a $f(x + \alpha)$ - e diciamone Σ_α l'operazione - quindi si passi a $f(x + \alpha + \beta)$. Si à:

(I) $\Sigma_\beta \Sigma_\alpha f(x) = \Sigma_{\alpha+\beta} f(x)$

(II) $\Sigma_\alpha \Sigma_\beta = \Sigma_\beta \Sigma_\alpha$.

c) Date le due costanti α e β , non è possibile trovare una altra γ , tale che:

$$f(\alpha x) + f(\beta x) = f(\gamma x).$$

d) Diciamo Π_ρ l'operazione che porta da $f(x)$ a $f(\rho x)$.

Applicando iteratamente tale operazione al polinomio non indefinito $f(x)$, si ha:

$$\Pi_\alpha \Pi_\beta \cdots \Pi_\lambda f(x) = \Pi_{\alpha \cdot \beta \cdots \lambda} f(x)$$

quindi, neppure qui, come già per l'operazione Σ_σ , vale un teorema di additività.

e) Risulta, poi:

$$\Pi_\alpha \Pi_\beta = \Pi_\beta \Pi_\alpha.$$

Tanto l'operatore Σ , quanto l'altro Π , costituiscono gruppo⁽¹⁾.

2. Dal polinomio (1), stacchiamo i primi tre termini: prescindendo dal fattore x^{n-2} , si ha, con lieve modificazione:

$$a_n x^2 + a_{n-1} x + \frac{a_{n-2}}{2}.$$

Analogamente, operando per i tre successivi termini, si ha:

$$\frac{a_{n-2}}{2} x^2 + a_{n-3} x + \frac{a_{n-4}}{2}$$

e così via.

(1) È da notare, qui, che l'operazione introdotta dal Colucci

$$\varphi(x) - \alpha \varphi'(x) = f(x)$$

per mezzo della quale si passa da $f(x)$ definito a $\varphi(x)$ definito, non dà, invece, luogo a gruppi, in quanto, detto $\psi(x)$ il risultato del « prodotto » di due siffatte operazioni, per cui

$$\psi(x) - \beta \psi'(x) = \varphi(x)$$

risulta:

$$\psi(x) - \psi'(x)(\alpha + \beta) + \alpha \beta \psi''(x) = f(x)$$

e non si ricade su una operazione del tipo di quella di partenza.

Ognuno di tali polinomi è rappresentato da semirette giacenti in un S_3 , avente in comune, con un altro S_3 consecutivo, soltanto una retta [il 1° ed il 2°, per esempio, hanno in comune la semiretta corrispondente ad $a_{n-2} = 0$, $a_n = \dots = a_{n-4} = 0$].

Nei vari spazi le rette rappresentative saranno nella regione D dei polinomi non indefiniti, se si avrà:

$$(5) \quad \begin{cases} a_{2r-1}^2 \leq 2a_{2r-2} \cdot a_{2r} & \left(r = 1, \frac{n}{2} \right) \\ a_{2s-1}^2 - a_{2s-2} \cdot a_{2s} \leq 0 & \left(s = 2, \dots, \frac{n}{2} - 1 \right) \end{cases}$$

cioè le rette sono interne a regioni paraboloidiche passanti per l'origine. Se combiniamo, quindi, linearmente, con coefficienti positivi, i trinomi così ottenuti, otterremo un polinomio rappresentato da una semiretta interna a D.

Analiticamente, ciò equivale a considerare polinomi dati da:

$$(6) \quad Q(x) = u_1 \left[a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{2} x^{n-2} \right] + \dots + \frac{u_n}{2} \left[\frac{a_2}{2} x^2 + a_1 x + a_0 \right]$$

dove le u sono arbitrarie costanti positive.

Detti q_n, \dots, q_0 i coefficienti di $Q(x)$, sarà:

$$(7) \quad 2 \frac{q_{n-2t-2}}{a_{n-2t-2}} = \frac{q_{n-2t-1}}{a_{n-2t-1}} + \frac{q_{n-2t-3}}{a_{n-2t-3}} \quad \left(t = 0, \dots, \frac{n}{2} - 1 \right).$$

Ed allora, dato un polinomio $Q(x)$, esso sarà non indefinito se, scelte le a soddisfacenti alle condizioni (5), valgono le (7). Dunque, consideriamo un polinomio $f(x)$ – che non basta sia non indefinito, occorrendo, inoltre, che verifichi le (5) – un nuovo polinomio $Q(x)$, sarà non indefinito se i suoi coefficienti sodisfano le (7).

Sia, così un *nuovo criterio di sufficienza*.

E si ha ancora una nuova fonte di polinomi non indefiniti, costituita dalla (6), sempre che sieno soddisfatte le (5): per ogni $\left(\frac{n}{2}\right)$ -pla di valori positivi delle u si ha un polinomio sicuramente non indefinito. Si soddisfa certamente alle (5) notando che esse sono in numero di $\frac{n}{2}$, tanti quanti i coefficienti delle potenze dispari della x .

Ed allora si possono assegnare ad arbitrio gli $\frac{n}{2} + 1$ restanti coefficienti, purché TUTTI dello stesso segno, indi assumere per coefficienti di potenze dispari quantità – positive o negative – i cui quadrati non superino i prodotti dei coefficienti dei termini adiacenti.

Per ottenere, in particolare, coefficienti razionali, basta, per esempio, assumere un quadrato perfetto contenuto nel prodotto dei coefficienti adiacenti. Segue, anche, che se un polinomio è definito rimane definito cambiando segno a qualcuno o tutti i coefficienti di indice dispari, o cambiando segno a TUTTI i coefficienti di indice pari.

Supponiamo che un polinomio $f(x)$ manchi dei termini di grado dispari e si voglia vedere s'è non indefinito. Consideriamo un polinomio $f(x)$ a coefficienti a_r completo. Esso sarà non indefinito se tra i suoi coefficienti hanno luogo le (5), ossia se, nel caso attuale, risulta:

$$\begin{aligned} -2a_{2r-2}a_{2r} &\leq 0 & \left(r = 1, \frac{n}{2} \right) \\ -a_{2s-2}a_{2s} &\leq 0 & \left(s = 2, \dots, \frac{n}{2} - 1 \right) \end{aligned}$$

e perciò *basta* ed *occorre* che tutti i coefficienti abbiano lo stesso segno⁽¹⁾.

3. Nel numero precedente, collegando a tre a tre, nel modo già visto, i coefficienti di $f(x)$, si è potuto trarre un criterio per decidere se un polinomio è non indefinito.

Geometricamente ciò corrisponde ad assegnare le proiezioni del punto $f(x)$ sugli S_3 determinati dalle terne anzidette, ottenendosi un certo numero di punti di proiezione (polinomi) e considerare, poi, tutti i punti interni all'iperpiramide fissata in un certo modo da tali punti.

Reciprocamente, dato un polinomio $Q(x)$ si tratta di riconoscere se, rispetto ad un certo polinomio $f(x)$ esso si trovi nelle condizioni già dette. In altri termini, partendo da un $f(x)$, si possono costruire infiniti polinomi non indefiniti: quando tra questi vi è $Q(x)$?

Se le a del polinomio $f(x)$ sodisfano le (7) ed inoltre verificano le (5), allora, di sicuro il polinomio $Q(x)$ è non indefinito.

4. LE TRASFORMAZIONI. — Tra le trasformazioni che mutano polinomi in polinomi, dal punto di vista che attualmente ci interessa, ve ne sono di tre tipi:

- I) quelle che mutano polinomi non indefiniti in polinomi non indefiniti;
- II) quelle che mutano polinomi qualunque in polinomi non indefiniti;
- III) quelle che mutano polinomi non indefiniti in polinomi qualunque.

Del primo tipo sono, per esempio, le trasformazioni della forma $f(x + \alpha)$, $f(\alpha x)$, con α reale.

(1) Tutti i risultati ottenuti dalla SERRA-CARACCIOLÒ nelle sue Note: *Su alcuni polinomi definiti o semidefiniti*. «Rivista di Fisica-matematica e Scienze naturali», anno VII, fasc. 2; *Sui polinomi definiti*. «Rivista R. Accademia Scienze fisiche e matematiche di Napoli», ser. 4^a, vol. III, 1933, rientrano, quali casi particolari, in quelli ottenuti in questo numero.

Si tratta, però, sempre, di trasformazioni *lineari*, nel senso che i coefficienti dei due polinomi sono legati da relazioni lineari.

Si abbia una trasformazione funzionale lineare che dà un polinomio $P(x)$, di grado n , faccia passare SEMPRE e SOLO ad un polinomio $Q(x)$, di grado n .

In tal caso i coefficienti q_r di $Q(x)$ saranno espressi linearmente mediante i coefficienti p_s dalle formole:

$$q_r = \sum_0^n \alpha_{rs} p_s \quad (r = 0, \dots, n).$$

Naturalmente noi considereremo non distinte due trasformazioni lineari che diano luogo agli stessi coefficienti q_r .

Poichè si tratta di operazioni funzionali lineari, possiamo dare ad esse aspetto più completo, ponendo:

$$Q(x) = \int_0^x G(x) \cdot P(x) dx.$$

Indichiamo, qui, con $G(x)$, la più generale funzione che, attraverso l'integrazione conduca da un polinomio non indefinito $P(x)$ ad un altro non indefinito $Q(x)$. Vogliamo studiare ora alcune classi di funzioni $G(x)$.

5. 1^a CLASSE. — Con le presenti trasformazioni otteniamo un sottogruppo di quello indicato, in quanto un termine di grado m è mutato in un solo termine di grado m . Si intende parlare, qui, delle trasformazioni del tipo:

$$Q(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x x^{\alpha-1} \cdot P(x) dx. \quad (\alpha > 0)$$

che indichiamo col simbolo M_α .

La M_α porta da un polinomio $P(x)$ di grado m ad un altro, di grado, ancora m .

Applicate iteratamente due operazioni M_α , M_β , per esempio, a x^m , si ha:

$$M_\beta M_\alpha x^m = \frac{x^m}{(\alpha + m)(\beta + m)}.$$

Ne segue che non esiste alcun γ positivo tale che:

$$M_\beta M_\alpha = M_\gamma$$

cioè che le operazioni M non formano gruppo.

Evidentemente è poi:

$$M_\beta M_\alpha = M_\alpha M_\beta.$$

Un complesso godente la proprietà gruppale si può avere, invece, nella combinazione:

$$\mathfrak{M} = c_1 M^{(1)} + \cdots + c_n M^{(n)}$$

ove le c_i sono costanti e le $M^{(i)}$ « prodotti » di operazioni M .

Con ciò, attraverso opportune costanti, ci si potrà liberare dal denominatore nelle rispettive formazioni « prodotto » che sono nella $M^{(i)}$ e quindi le \mathfrak{M} , oltre a mutare polinomi in polinomi di egual grado, godranno la proprietà gruppale.

Ora le \mathfrak{M} , se le c_i sono positive — il che richiede, certamente, che le α, β, \dots che figurano nelle M , siano positive, — portano, di sicuro, polinomi definiti in polinomi definiti.

Nell'espressione di M_α , all'integrale possiamo dare altra forma ponendo, dapprima, s al posto della variabile di integrazione x e mutando, indi, s in tx :

$$Q(x) = \int^x t^{\alpha-1} \cdot P(tx) dt.$$

Se è $0 < x < 1$, l'integrale è singolare ed in tal caso occorre esistere:

$$\lim_{z \rightarrow 1^-} \int^z t^{\alpha-1} P(tx) dt.$$

Ma la funzione integranda è non indefinita e l'integrale quindi è una funzione non decrescente di z , dunque detto integrale è non indefinito.

Sicché possiamo dare altra forma alla operazione \mathfrak{M} ; e cioè

$$Q(x) = \int^x [c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\beta-1} + \cdots + c_r t^{\rho-1}] \cdot P(tx) dt$$

con le c costanti positive.

Anche qui si presenta una questione analoga a quelle già trattate per altre operazioni del tipo e precisamente:

È dato il polinomio non indefinito $P(x)$; attraverso le operazioni M si trovano altri polinomi non indefiniti P_i : si tratta di determinare il polinomio — baricentro della iperpiramide avente vertici nei punti rappresentativi dei polinomi P_i .

Si abbia il polinomio non indefinito:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Applichiamo ad esso la M_α . Si avrà, detti q_i i coefficienti del polinomio $Q(x)$:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{q_n}{a_n} = \frac{1}{n+\alpha} + \frac{1}{n+\beta} + \cdots + \frac{1}{n+\lambda} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{q_0}{a_0} = \frac{1}{\alpha} + \cdots + \frac{1}{\lambda}. \end{array} \right.$$

Da un lato, queste ci danno la possibilità di costruire dei polinomi $Q(x)$ non indefiniti con partenza da un assegnato $P(x)$ non indefinito, per ogni sistema di valori positivi di $\alpha, \beta, \dots, \lambda$; dall'altro, il modo di riconoscere se un dato polinomio è non indefinito, occorrendo, in tal caso, che le (8) siano sodisfatte per valori positivi delle costanti:

Ma si può porre, qui, un altro problema.

Dato $P(x)$, non indefinito, e date le costanti positive $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, quand'è che $Q(x)$ è interno alla iperpiramide $M_\alpha, M_\beta, \dots, M_\lambda$?

Tale problema non differisce da quello precedentemente trattato, ma possiamo trovare un'altra condizione ricorrendo all'operazione \mathfrak{M} dianzi definita.

Le (8) in tal caso, divengono:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{c_1}{n+\alpha} + \frac{c_2}{n+\beta} + \cdots = \frac{q_n}{a_n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{c_1}{\alpha} + \frac{c_2}{\beta} + \cdots = \frac{q_0}{a_1} \end{array} \right.$$

che occorre siano sodisfatte per valori *positivi* delle c_r .

Per il determinante dei coefficienti si trova il valore:

$$D = \frac{V_{\alpha, \dots, \lambda}}{\prod_{r=1}^{n+1} r!} \cdot \frac{1}{\prod_{\alpha}^{\lambda} (s+n)} \cdot$$

dove s assume i valori $\alpha, \beta, \dots, \mu, \lambda$.

Condizione necessaria e sufficiente affinché un determinante del tipo D sia diverso da zero è che i numeri positivi $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ siano *tutti diversi tra loro*. Tale condizione si presentava *a priori* solo necessaria.

Inoltre D ha lo stesso segno di $V_{\alpha, \dots, \lambda}$.

Se per fissare le idee il segno è quello positivo, tale segno occorre che competa ad ogni determinante Δ_r ottenuto da D sostituendo alla colonna r -esima ($r = 1, \dots, n+1$) quella dei termini noti; solo così si è *sicuri* che le c_r sono positive.

Occorre, cioè, che tutti i Δ_r abbiano il segno di $V_{\alpha, \dots, \lambda}$.

Pel valore di un Δ_r , si trova:

$$\Delta_{r+1} = \frac{V_{\alpha, \dots, \lambda}}{\prod_{i=1}^{n+1} s^i} \cdot \prod_{\alpha=p}^{\lambda} \left\{ \frac{p+r+1}{(p+n)} \right\} \left\{ \frac{1}{(r+1)!} \right\}.$$

Si hanno, pertanto, tutti gli elementi per determinare le costanti c_r che figurano nel sistema (9).

Meccanica. — *La meccanica dei galleggianti con moti ciclici interni.* Nota di G. ARRIGHI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

§ 1. — Diremo che un galleggiante è *semirigido* quando entro l'involucro rigido chiuso vi sono parti deformabili o parti solide non rigidamente connesse con questo. Se il moto (per forze interne) di queste parti è ciclico, cioè avviene senza alterare la distribuzione delle masse, diremo che il galleggiante è *girostatico*⁽²⁾.

Per questo non si alterano la posizione del baricentro G e i momenti d'inerzia rispetto ad assi rigidamente connessi col corpo.

Il momento della spinta rispetto al baricentro è dato da

$$\tilde{\omega} V (P - G) \wedge \mathbf{c}$$

dove $\tilde{\omega}$ è il peso specifico (costante) del liquido, V il volume di carena del galleggiante, P il centro di carena al tempo t e \mathbf{c} un vettore unitario verticale volto verso l'alto che al tempo t è parallelo alla normale in P alla superficie dei centri di carena⁽³⁾ relativa al volume; pertanto, il teorema della coppia d'impulso con riferimento a G , detti: \mathbf{K} il momento delle quantità di moto dovuto al trascinamento, cioè considerando il galleggiante come

(1) Nella seduta del 20 dicembre 1936.

(2) Per analogia al problema dei girostati, pei quali vedi: T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*. Zanichelli, Bologna, 1927, vol. II, parte II, cap. IX, § 4.

(3) Per la geometria e la meccanica delle isocarenne vedi le mie Note: *Introduzione alla geometria differenziale della superficie dei centri di carena* in «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», vol. LXVII, 1932; *L'evoluta della superficie dei centri di carena* in «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», vol. XVII, 1933; *Il problema cinematico delle rotazioni isocarenne dei galleggianti* in «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», vol. LXVIII, 1933; *La statica dei galleggianti e la dinamica delle isocarenne* in «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», vol. XVIII, 1933; *Le oscillazioni isocarenne attorno le configurazioni cui competono moti di puro giro permanente* in «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», vol. XXIV, 1936; *I moti isocareni attorno le configurazioni di equilibrio generale* in «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», Nota I, vol. XXIV, 1936; «idem», Nota II, vol. XXIV, 1936.

completamente irrigidito, e χ quello dovuto ai moti interni, pei moti dei galleggianti girostatici fornirà l'equazione cardinale

$$(1) \quad (\mathbf{K} + \chi)' = \tilde{\omega}V(P - G) \wedge \mathbf{e}$$

dove con indice sono indicate le derivate rispetto al tempo.

Ma⁽¹⁾

$$\mathbf{K}' = (\alpha\Omega)' = \alpha\Omega' + \Omega \wedge \alpha\Omega,$$

dove α è la dilatazione baricentrale d'inerzia del galleggiante e Ω è il vettore della rotazione istantanea, onde la (1) verrà a scriversi

$$(2) \quad \alpha\Omega' + \Omega \wedge \alpha\Omega + \chi' = \tilde{\omega}V(P - G) \wedge \mathbf{e}.$$

Per la impostazione del problema del moto del galleggiante occorre, a parte, determinare il vettore χ (problema meccanico interno); ma questa equazione, quando siano noti gli altri temini, può farci conoscere χ , dando essa luogo ad un sistema di 3 equazioni differenziali del 1° ordine nelle sue componenti.

Moltiplicando la (1) scalarmente per \mathbf{e} si ricava

$$(\mathbf{K} + \chi)' \times \mathbf{e} = 0,$$

da cui

$$(3) \quad (\mathbf{K} + \chi) \times \mathbf{e} = \text{costante},$$

che è l'integrale delle aree nel piano orizzontale.

§ 2. - Si consideri un generico moto isocarenico di puro giro permanente definito dalla

$$(4) \quad \Omega = \varphi' \mathbf{e} \quad (\varphi' = \text{cost.}),$$

la (2) diventa

$$\varphi'^2 \mathbf{e} \wedge \alpha\mathbf{e} + \chi' = \tilde{\omega}V(P - G) \wedge \mathbf{e};$$

moltiplicando questa scalarmente per \mathbf{e} si ricava

$$\chi' \times \mathbf{e} = 0,$$

da cui

$$\chi \times \mathbf{e} = \text{costante},$$

che esprime, pei moti ciclici interni, l'integrale delle aree nel piano orizzontale, ciò che del resto potevamo dedurre altresì dalla (3) e dalla espressione di \mathbf{K}' data nel precedente paragrafo.

(1) C. BURALI-PORTI e R. MARCOLONGO, *Applications à la mécanique et à la physique*. Lattes, Torino, 1913, cap. I.

§ 3. — Supponiamo che i moti ciclici interni siano stazionari cosicchè ω è un vettore a modulo costante e rigidamente connesso col galleggiante; sarà allora semplicemente

$$\dot{x}' = \omega \wedge x$$

e la equazione (2) verrà a scriversi

$$(2') \quad \alpha \omega' + \omega \wedge (\alpha \omega + x) = \tilde{\omega} V (P - G) \wedge c.$$

Per l'esistenza di moti isocarenici di puro giro permanente (peì quali, cioè, debba valere la (4)), dovrà avversi

$$\varphi' c \wedge (\varphi' \cdot \alpha c + x) = \tilde{\omega} V (P - G) \wedge c$$

e questa, per esser sempre verificata, dà

$$c \wedge (\varphi' \cdot \alpha c + x) = 0$$

$$(P - G) \wedge c = 0,$$

cioè

$$\varphi' \cdot \alpha c + x = 0$$

deve esser parallelo a c e P deve stare sulla verticale baricentrica, imponendo quest'ultima condizione, come vedremo in appresso, che il centro di carena P corrisponda ad una posizione di equilibrio.

Viceversa, verificate queste condizioni, il puro giro definito dalla

$$\omega = \varphi' c$$

per la (2') dà

$$\varphi'' \alpha c = 0$$

cioè φ' = costante ed è permanente.

§ 4. — A dimostrazione di una asserzione proposta e per il migliore approfondimento nello studio dei galleggianti girostatici, di così utile vantaggio per le applicazioni navali, converrà trattare dell'equilibrio statico di questi galleggianti rispetto alla equazione dei momenti, compito che è ormai facilitato in virtù della conoscenza delle precedenti equazioni dell'equilibrio dinamico.

Dalla (2), infatti, per $\omega = 0$ resulta la relazione

$$x' = \tilde{\omega} V (P - G) \wedge c,$$

la quale ci dice che, nelle posizioni di equilibrio dei galleggianti girostatici a moti ciclici interni non stazionari, a differenza del caso dei galleggianti totalmente rigidi, il centro di carena e il baricentro non stanno sulla me-

desima verticale, ed anzi: il seno dell'angolo che la congiungente il centro di carena col baricentro forma la verticale è espresso da

$$\frac{\text{mod } \chi'}{\tilde{\omega} V |P - G|},$$

e lo spostamento è in guisa tale che la terna $c, \chi', P - G$ resulti destrogira.

In seguito a quanto sopra si può ora completare l'osservazione intrapresa al § 2.

Un generico moto isocarenico di puro giro permanente per un galleggiante girostatico a moti ciclici interni non stazionari, avviene per

$$\begin{aligned}\chi' - \tilde{\omega} V (P - G) \wedge c &= 0 \\ c \wedge \alpha c &= 0\end{aligned}$$

cioè quando P è un centro di carena corrispondente ad una posizione di equilibrio come sopra considerata e la verticale è direzione principale baricentrale d'inerzia del galleggiante.

Viceversa: verificate le condizioni superiori il puro giro permanente definito da $\phi' c$, resulta, come è facile a vedersi, permanente⁽¹⁾.

Pel caso di galleggianti girostatici a moti ciclici interni stazionari dalla (2), per $\Omega = 0$, segue

$$(P - G) \wedge c = 0,$$

cioè una condizione di equilibrio analoga a quella dei galleggianti completamente rigidi.

(1) È opportuno confrontare il risultato or ora trovato con quello che, relativamente ad un galleggiante completamente rigido, è stato trovato nella quinta delle mie Note citate in (3) a p. 504.

Meccanica. — *Azioni dinamiche di una corrente traslocircolatoria che investe un ostacolo costituito da due lamine incrociate.* Nota di L. SONA, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

Avendo in una Nota precedente⁽²⁾ risolto il problema della determinazione del moto liquido piano generato dalla presenza, in una corrente traslocircolatoria qualsiasi, di un ostacolo costituito da due lamine uguali incrociantesi nel loro punto di mezzo, passo ora alla determinazione delle azioni dinamiche esercitate dalla corrente sull'ostacolo in essa immerso.

L'espressione che ottengo è particolarmente semplice data la natura della questione.

L'azione dinamica è direttamente proporzionale al prodotto, CV, della circolazione per il modulo della velocità asintotica della corrente ed è quindi nulla nel caso di una corrente puramente traslatoria o puramente circolatoria.

Come in tutti i casi consimili la presenza delle cuspidi negli estremi delle lamine conduce ad un caso di eccezione del teorema di Kutta-Joukowsky⁽³⁾. Infatti l'*azione trasversa* (componente secondo la normale alla direzione della corrente) risulta composta dalla spinta che si avrebbe secondo il detto teorema e da una forza aggiunta che si oppone sempre alla precedente, potendo giungere, per opportuni valori dell'inclinazione delle lamine, ad annullarla e anche a invertire il senso dell'azione trasversa totale.

Esiste anche in generale un'*azione diretta* che può essere positiva (resistenza diretta) o negativa (forza di risucchio), e che cambia in ogni caso di segno invertendo il verso della sola corrente circolatoria.

Tale azione si annulla quando la corrente traslatoria è parallela ad una delle bisettrici degli angoli formati dall'incrocio delle lamine o quando le due lamine si taglano ad angolo retto.

Assai semplice è pure l'espressione del momento risultante rispetto al punto d'incrocio delle lamine. Detto momento, indipendente dalla circolazione, è proporzionale al quadrato della lunghezza delle lamine e al quadrato della velocità della corrente traslatoria, ed è nullo quando la corrente investe le lamine secondo una qualunque delle due bisettrici dei loro angoli. Se il

(1) Nella seduta del 20 dicembre 1936.

(2) L. SONA, *Corrente traslocircolatoria in presenza di un ostacolo costituito da due lamine incrociate*. Questi «Rendiconti», vol. XXIV, fasc. 11, p. 447.

(3) Cfr. U. CISOTTI, *Sulla regolarizzazione di salienti idrodinamici*. «Rend. Sem. Mat. e Fis. di Milano» (1934), vol. VIII, § 8.

sistema si considera girevole intorno al proprio centro si hanno in corrispondenza una posizione di equilibrio stabile e una di equilibrio instabile.

Se le due lame s'incrociano ad angolo retto il momento è sempre nullo, l'equilibrio è indifferente e sussiste per qualsiasi direzione della corrente investitrice.

5⁽¹⁾. CALCOLO DELL'AZIONE DINAMICA. — Applichiamo per la determinazione delle azioni dinamiche esercitate dalla corrente liquida sull'ostacolo fisso, la formula già adoperata in casi consimili⁽²⁾:

$$(8) \quad R_x + iR_y = -\frac{i\rho}{2} \int_{\gamma} w(\zeta) \cdot \bar{w}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \cdot \frac{d\zeta}{d\zeta} d\zeta,$$

in cui R_x ed R_y rappresentano le componenti dell'azione dinamica secondo i due assi, ρ è la densità del liquido, γ è la circonferenza di raggio uno che nel piano forato ζ rappresenta il contorno dell'ostacolo, w è la velocità del liquido in forma complessa e \bar{w} la sua funzione coniugata.

Sostituendo alle quantità che si trovano sotto il segno di integrale i valori che ad esse competono in base alle (1), (6), otteniamo facilmente

$$R_x + iR_y = -\frac{i\rho l}{2h} \int_{\gamma} \left[V^2 \left(2 - \frac{e^{2i\beta}}{\zeta^2} - \frac{\zeta^2}{e^{2i\beta}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{b^2 C^2}{4\pi^2 l^2} - \frac{ibCV}{\pi l} \left(\frac{e^{i\beta}}{\zeta} - \frac{\zeta}{e^{i\beta}} \right) \right] \cdot \left(1 + \frac{\zeta^2}{1 - \zeta^2} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} \cdot \frac{(1 - \zeta^2) d\zeta}{(\zeta^2 - e^{2i\sigma_1})(\zeta - e^{-2i\sigma_1})},$$

ed essendo, su γ , $\zeta = e^{i\sigma}$ si ha pure

$$R_x + iR_y = -\frac{i\rho l}{2h} \int_0^{2\pi} \left\{ 2V^2 [1 - \cos 2(\sigma - \beta)] + \right. \\ \left. + \frac{b^2 C^2}{4\pi^2 l^2} + \frac{2bCV}{\pi l} \sin(\beta - \sigma) \right\} \frac{\sin \sigma \cdot (i \operatorname{ctg} \sigma)^{\frac{2\alpha}{\pi}}}{\cos 2\sigma - \cos 2\sigma_1} d\sigma.$$

È facile ridurre l'intervallo di integrazione al solo primo quadrante; tenuto conto delle semplificazioni che ne conseguono si ottiene

(1) Riprendo la numerazione degli articoli e delle formule dalla Nota precedente (citata nell'introduzione) a cui rimando pure il lettore per il significato dei simboli e per le necessarie premesse.

(2) Cfr., p. es., la mia Nota *Azioni dinamiche di una corrente traslocircolatoria che investe una lamina bilatera*. «Rend. Lincei», ser. 6^a, vol. XIX (1934), p. 402.

$$(9) \quad R_x + iR_y = \frac{4\rho CV}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \alpha \sin \beta \cos \sigma + i \cos \alpha \cos \beta \sin \sigma}{\cos 2\sigma - \cos 2\sigma_i} \cdot \sin \sigma (\operatorname{ctg} \sigma)^{\frac{2\alpha}{\pi}} d\sigma.$$

L'integrale che qui figura, pur diventando infinita la funzione integranda nel punto $\sigma = \sigma_i$ compreso nell'intervallo di integrazione, è finito e si calcola agevolmente ponendo $t = \operatorname{tg}^2 \sigma$. Si ha in particolare (rammentando anche che $\cos 2\sigma_i = 1 - \frac{4\alpha}{\pi}$):

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \sigma \cos \sigma}{\cos 2\sigma - \cos 2\sigma_i} (\operatorname{ctg} \sigma)^{\frac{2\alpha}{\pi}} d\sigma = \\ &= -\frac{\pi}{4(\pi - 2\alpha)} \int_0^\infty \frac{t^{-\frac{\alpha}{\pi}} dt}{(t+1)(t-a)} = -\frac{1}{4} \int_0^\infty \left(\frac{1}{t-a} - \frac{1}{t+1} \right) t^{-\frac{\alpha}{\pi}} dt, \\ I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \sigma}{\cos 2\sigma - \cos 2\sigma_i} (\operatorname{ctg} \sigma)^{\frac{2\alpha}{\pi}} d\sigma = \\ &= -\frac{\pi}{4(\pi - 2\alpha)} \int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{\pi}} dt}{(t+1)(t-a)} = -\frac{1}{4} \int_0^\infty \left(\frac{a}{t-a} + \frac{1}{t+1} \right) \cdot t^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\pi}\right)} dt, \end{aligned}$$

avendo posto per semplicità

$$a = \frac{2\alpha}{\pi - 2\alpha}.$$

Gli integrali I_1 e I_2 sono così ricondotti a forme ben note e si ha:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\pi}{4 \sin \alpha} \left[1 - \left(\frac{\pi - 2\alpha}{2\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\pi}} \cos \alpha \right] \quad ; \\ I_2 &= -\frac{\pi}{4 \cos \alpha} \left[1 - \left(\frac{2\alpha}{\pi - 2\alpha} \right)^{\frac{\pi - 2\alpha}{2\pi}} \sin \alpha \right]. \end{aligned}$$

Sostituendo questi valori nella (9), e scindendo anche le due parti reale ed immaginaria, otteniamo subito

$$(10) \quad \begin{cases} R_x = \rho CV (1 - \Gamma_1) \sin \beta, \\ R_y = -\rho CV (1 - \Gamma_2) \cos \beta, \end{cases}$$

avendo posto

$$(11) \quad \Gamma_1 = \left(\frac{\pi - 2\alpha}{2\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\pi}} \cos \alpha, \quad \Gamma_2 = \left(\frac{2\alpha}{\pi - 2\alpha} \right)^{\frac{\pi - 2\alpha}{\pi}} \sin \alpha.$$

L'azione dinamica è dunque in ogni caso proporzionale al prodotto CV della circolazione per il modulo della velocità asintotica della corrente; è quindi nulla se la corrente è puramente traslatoria o puramente circolatoria.

Per $\alpha = 0$, cioè nel caso della lamina semplice posta sull'asse x , si ha $\lim_{\alpha=0} \Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = 0$ e quindi $R_x = 0$, $R_y = -\rho CV \cos \beta$ come è ben noto⁽¹⁾.

Per $\alpha = \frac{\pi}{2}$, cioè per una lamina semplice posta lungo l'asse delle y , si ha $\Gamma_1 = 0$, $\lim_{\alpha=\frac{\pi}{2}} \Gamma_2 = 1$ e quindi $R_x = \rho CV \sin \beta$, $R_y = 0$, risultato che coincide col precedente quando si tenga conto della diversa orientazione della lamina.

Per $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (lamine intersecantesi ad angolo retto), si ha $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e quindi

$$R_x = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \rho CV \sin \beta, \quad R_y = -\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \rho CV \cos \beta.$$

6. VALORI DI Γ_1 E Γ_2 . - Prima di proseguire la ricerca valutando l'azione diretta e la componente deviatrice, è opportuno fare un cenno sul comportamento dei due termini Γ_1, Γ_2 definiti dalla (11) come funzioni dell'angolo α nell'intervallo $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Notiamo anzitutto che Γ_1 si cambia in Γ_2 , e Γ_2 in Γ_1 , quando si cambi α in $\frac{\pi}{2} - \alpha$; Γ_1 e Γ_2 sono cioè funzioni complementari e basterà quindi limitare lo studio ad una sola di esse per esempio a Γ_1 .

Si constata immediatamente che Γ_1 è sempre positiva nell'intervallo prefissato. La sua derivata logaritmica

$$\frac{1}{\pi} \log \frac{\pi - 2\alpha}{2\alpha} - \frac{1}{\pi - 2\alpha} - \operatorname{tg} \alpha,$$

è la differenza fra una funzione sempre decrescente e una sempre crescente nell'intervallo considerato, ed è positiva per α prossimo al valore 0, nega-

(1) U. CISOTTI, Una notevole eccezione al teorema di Kutta-Joukowsky. «Rend. Acc. Lincei», ser. 6^a, vol. V, 1927, pp. 16-21.

tiva per α prossimo al valore $\frac{\pi}{2}$. Si annullerà quindi per uno e un solo valore di α nel predetto intervallo e in corrispondenza si avrà un massimo per Γ_1 .

Il comportamento di Γ_1 è allora il seguente:

Per $\alpha = 0$, $\lim \Gamma_1 = 1$; partendo da tale valore Γ_1 cresce fino ad un massimo di 1.075 circa per $\alpha \approx 45^\circ$, ritorna poi decrescendo al valore 1 per $\alpha \approx 28^\circ$; continuando poi a decrescere, acquista il valore $\frac{\sqrt{2}}{2}$ per $\alpha = 45^\circ$, e il valore zero per $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

7. AZIONE DIRETTA E AZIONE TRASVERSA. — Indicando con R l'azione diretta (componente dell'azione dinamica secondo la direzione della corrente investitrice) e con S l'azione deviatrice o trasversa (componente secondo la normale alla corrente, fissando il verso in modo che velocità asintotica e normale formino un sistema congruente a quello degli assi x, y), otteniamo facilmente dalle (10):

$$(12) \quad \begin{cases} R = \frac{1}{2} \rho CV (\Gamma_2 - \Gamma_1) \sin 2\beta, \\ S = -\rho CV (1 - \Gamma_1 \sin^2 \beta - \Gamma_2 \cos^2 \beta). \end{cases}$$

Osserviamo immediatamente che un cambiamento di segno della circolazione fa variare solo il segno della R e della S e che il cambiamento di verso della corrente traslatoria le lascia entrambe inalterate.

Conseguentemente se per una certa direzione ed un certo verso della corrente investitrice la R acquista il carattere di resistenza diretta, si avrà invece una forza di risucchio quando si inverta la corrente lasciando inalterata la circolazione.

È nulla l'azione diretta quando la corrente investe le due lame secondo la direzione di una qualunque delle bisettrici dei loro angoli $(\beta = 0, \frac{\pi}{2})$.

Tenendo fissi β e C il segno di R cambia anche quando α passa da valori minori di $\frac{\pi}{4}$ a valori maggiori. Per $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\Gamma_1 = \Gamma_2$, e quindi la R si annulla.

L'azione deviatrice S è composta di due parti: la prima

$$S' = -\rho CV,$$

è la spinta trasversa secondo il teorema di Kutta-Joukowsky, l'altra

$$S'' = \rho CV (\Gamma_1 \sin^2 \beta + \Gamma_2 \cos^2 \beta),$$

è dovuta alla presenza delle cuspidi e ha sempre verso opposto alla precedente.

La S'' ha un massimo, $\rho CV \Gamma_1$, per $\beta = \frac{\pi}{2}$ e un minimo, $\rho CV \Gamma_2$,

per $\beta = 0$ quando l'angolo α sia compreso fra zero e $\frac{\pi}{4}$, viceversa per α compreso fra $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$.

Per valori di β prossimi a $\frac{\pi}{2}$ la S'' può acquistare una intensità maggiore o uguale ad S' quando α sia compreso fra 0° e $28^\circ \sim$ (ved. numero precedente), risultandone così un'azione trasversa totale di verso opposto alla spinta di Joukowsky, o nulla. Precisamente se $\beta = \frac{\pi}{2}$, l'azione trasversa è nulla quando $\alpha = 0$ o $\alpha \approx 28^\circ$.

Per $\alpha > \frac{\pi}{4}$ si possono fare osservazioni analoghe e complementari alle precedenti.

Per $\alpha = \frac{\pi}{4}$ si annulla la R come abbiamo visto sopra, e l'azione trasversa diventa

$$S = -\rho CV \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

del tutto indipendente quindi dalla direzione della corrente. Nel sistema costituito da due lame incrociate ad angolo retto la presenza delle cuspidi porta quindi, rispetto ad un corpo regolare, unicamente alla diminuzione

della spinta di Joukowsky da $-\rho CV$ a $-\rho CV \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

8. MOMENTO RISULTANTE. — L'unica componente M , diversa da zero, del momento delle azioni dinamiche rispetto al punto d'incrocio delle lame, è quella diretta secondo la normale al piano del moto e può essere espressa, scegliendo come positivo il verso sinistrorso, dalla formula

$$M = -\frac{\rho}{2} \int |w|^2 (x dx + y dy) = -\frac{\rho}{2} \Re \int w \cdot \bar{w} \cdot \bar{z} dz,$$

essendo c il contorno dell'ostacolo, \bar{w} e \bar{z} le coniugate di w e z , e avendo dato a \Re il significato di « parte reale di ». Nel piano rappresentativo ζ si avrà

$$(13) \quad M = -\frac{\rho}{2} \Re \int_{\gamma} w(\zeta) \cdot \bar{w}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \cdot \bar{z}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \cdot \frac{d\zeta}{d\zeta} d\zeta,$$

γ essendo la circonferenza di raggio unitario.

Sostituendo in questa per le funzioni sotto il segno di integrale i valori ad esse attribuiti in base alle (1), (3), (6) si ottiene dapprima

$$M = -\frac{l\rho}{2b} \Re \int_{\gamma} \left[V^2 \left(2 - \frac{e^{2i\beta}}{\zeta^2} - \frac{\zeta^2}{e^{2i\beta}} \right) + \frac{b^2 C^2}{4\pi^2 l^2} - \frac{ib CV}{\pi l} \left(\frac{e^{i\beta}}{\zeta} - \frac{\zeta}{e^{i\beta}} \right) \right] \cdot \frac{(1 - \zeta^4) d\zeta}{\zeta(\zeta - e^{2i\sigma_1})(\zeta - e^{-2i\sigma_1})},$$

e quindi, tenendo presente che sul contorno è $\zeta = e^{i\sigma}$,

$$M = -\frac{\rho l^2}{b^2} \int_0^{2\pi} \left[2V^2 (1 - \cos 2(\sigma - \beta)) + \frac{b^2 C^2}{4\pi^2 l^2} + \frac{2b CV}{\pi l} \sin(\beta - \sigma) \right] \frac{\sin \sigma \cdot \cos \sigma \cdot d\sigma}{\cos 2\sigma - \cos 2\beta}.$$

Riducendo l'intervallo di integrazione al primo quadrante e valutando i facili integrali che ne risultano otteniamo infine

$$(15) \quad M = -2(\pi - 4\alpha) \frac{\rho l^2}{b^2} V^2 \sin 2\beta,$$

avendo b^2 , in base alla (4), il valore

$$b^2 = 4 \left(\frac{2\alpha}{\pi} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} \cdot \left(\frac{\pi - 2\alpha}{\pi} \right)^{\frac{\pi - 2\alpha}{\pi}}.$$

Il momento risultante è direttamente proporzionale al quadrato della lunghezza delle due lame e al quadrato della velocità della corrente investitrice; è indipendente dalla circolazione e si annulla quando la corrente ha la direzione dell'una o dell'altra delle bisettrici degli angoli formati dalle lame. Non cambia invertendo la corrente e cambia solo di segno cambiando α in $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Per $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $M = 0$ cioè nel caso delle due lame incrociate ad angolo retto le azioni dinamiche hanno il centro nel punto d'incrocio.

Per $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}$ si ha

$$M = \mp \frac{\pi}{2} \rho l^2 V^2 \sin 2\beta,$$

risultati già noti relativi alle lame semplici (1).

(1) U. CISOTTI, *Idromeccanica piana*, vol. I, p. 125.

9. POSIZIONI DI EQUILIBRIO DEL SISTEMA INTORNO AL SUO CENTRO. — Consideriamo il sistema delle due lame (sistema rigido essendo α costante) girevole intorno al suo centro. Saranno posizioni di equilibrio quelle per cui $M = 0$.

Osservando la (14) è facile allora concludere che:

Per $\alpha = \frac{\pi}{4}$ si ha sempre equilibrio indifferente per qualsiasi direzione della corrente investitrice.

Negli altri casi, limitando le nostre considerazioni, per ragioni di simmetria, a valori di β compresi fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, estremi inclusi, abbiamo sempre le due posizioni di equilibrio per $\beta = 0$ e $\beta = \frac{\pi}{2}$; di equilibrio stabile la prima e instabile la seconda per $\alpha > \frac{\pi}{4}$, viceversa per $\alpha < \frac{\pi}{4}$. La posizione di equilibrio stabile si ha cioè in entrambi i casi quando la corrente investe l'ostacolo secondo la bisettrice del maggiore dei due angoli formati dalle due lame; in particolare per $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}$, si ha equilibrio stabile quando la lamina semplice corrispondente si dispone normalmente alla corrente, risultato già noto⁽¹⁾.

(1) Loc. cit. nota precedente,

Geofisica (Sismologia). — *Sulle profondità ipocentrali, con particolare riguardo ai terremoti delle Prealpi Carniche (8 giugno 1934) e del Lago di Costanza (31 gennaio 1935)*⁽¹⁾. Nota di P. CALOI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. F. VERCELLI.

In uno studio⁽³⁾ sul terremoto delle Prealpi Carniche (8 giugno 1934) ho valutato, con tre metodi distinti, applicati a numerose stazioni, una profondità ipocentrale di 37 km. Il dott. Hiller⁽⁴⁾, analizzando il successivo terremoto del Lago di Costanza (31 gennaio 1935), calcolò con un solo metodo, applicato ai dati di due stazioni, una profondità media ipocentrale di 19 km. Avendo richiesto al dott. Hiller i sismogrammi del terremoto del Lago di Costanza, egli, intuendo che dovessero servire per controllo sulla profondità ipocentrale, scrisse il seguente parere: «Der Unterschied in der Herdtiefe dieser beiden Beben – ca. 37 km. für das Beben am 8 juni 1934 nach Ihrer Bestimmung und ca. 20 km. für das Bodenseebiben nach meiner Bestimmung – ist meiner Ansicht nach sehr gut möglich. Die Herdtiefe dieser beiden Beben braucht nicht, wie G. Agamennone es haben möchte, dieselbe zu sein ».

Il dott. Hiller anticipava così il giudizio che mi propongo di chiarire in merito alle osservazioni pubblicate dal prof. G. Agamennone in una Nota apparsa in questi *Rendiconti*⁽⁵⁾.

Il prof. Agamennone, insigne pionere degli studi sismici, preoccupato forse della generale tendenza moderna di attribuire alle profondità ipocentrali cifre molto superiori a quelle comprese fra 10 e 20 km., ammesse un tempo, tra' argomento dall'apparente contrasto di risultati ottenuti nei due sismi indicati, per appoggiare le stime che portano a piccole profondità ipocentrali e svalutare quelle che concludono con profondità maggiori.

(1) Lavoro eseguito nella stazione sismica di Trieste, Istituto Geofisico del R. Comitato Talassografico.

(2) Nella seduta del 20 dicembre 1936.

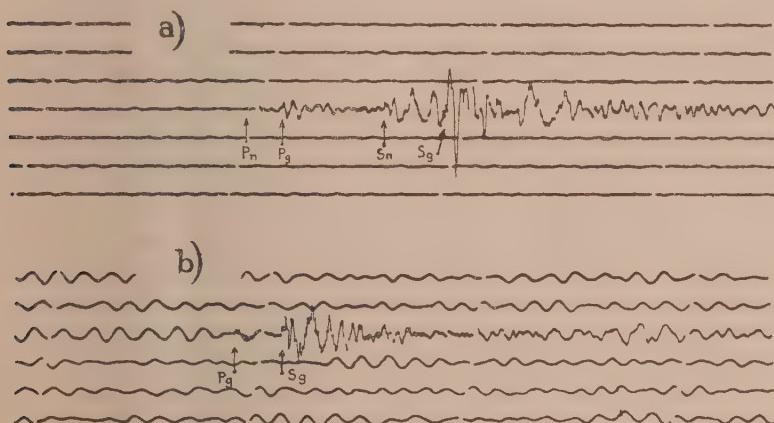
(3) P. CALOI, *Studio microsismico del terremoto delle Prealpi Carniche dell'8 giugno 1934*, «Boll. del Com. per la Geodesia e la Geofisica del Consiglio Naz. delle Ricerche», ser. II, anno V, n. 3, luglio 1935.

(4) W. HILLER, *Die Erdbeben am Untersee (Bodensee) vom 31. Januar 1935*, «Jahresberichte und Mitteilungen des Oberrheinischen geologischen Vereins». Band XXV, 1936.

(5) G. AGAMENNONE, *Confronto delle profondità ipocentrali di due recenti terremoti consimili*. «Rendiconti della R. Acc. Naz. dei Lincei», vol. XXIII, ser. 6^a, I sem., fasc. 11, giugno 1936.

Tanto l'analisi dei dati macrosismici, quanto quella delle registrazioni microsismiche, offrono sicuri elementi di orientamento nella questione discussa dal prof. Agamennone.

Il *Bollettino settimanale dell'Ufficio Centrale di Meteorologia e Geofisica*, n. 866, attribuisce alla scossa delle Prealpi Carniche il V grado. L'Agamennone ammette il grado VI. La scossa conservò il V grado per tutto il Friuli ed aveva ancora il IV grado a Trieste (123 km.), Riva e Monselice (130 km.). In alcuni luoghi intermedi la scossa fu avvertita con intensità minori. Questo è dovuto alle condizioni geologiche locali, che influiscono tanto maggiormente sull'intensità di un terremoto quanto più profondo è l'ipocentro. Si sa infatti che i terremoti profondi hanno una distribuzione irregolare e discontinua nelle intensità superficiali. Sono stati osservati terremoti a focolare profondo, con l'epicentro geometrico più o meno disteso dall'epicentro macrosismico (*Handbuch der Experimentalphysik*, Band XXV-Geophysik, II Teil, p. 528).



STOCCARDA - Galitzin-Wilip E-W: a) Prealpi Carniche 8-VI-1934, $\Delta = 369$ km .
b) Lago di Costanza 31-I-1935, $\Delta = 119$ km .

Volendo precisare alcune notizie macrosismiche, aggiungerò, sebbene ciò non abbia nessuna importanza, che le informazioni sul terremoto carnico furono pubblicate sulla stampa di Trieste il giorno stesso 8 giugno (*Il Piccolo della Sera, Ultime Notizie*), mentre nessun osservatorio ha registrate le scosse complementari, che il prof. Agamennone ammette.

Ben diverso comportamento ha avuto, sempre dal punto di vista macrosismico, il terremoto studiato da Hiller. Ad una distanza di appena 40 km. dall'epicentro (in cui la scossa fu valutata del VI grado e, molto probabilmente, lo superò, in quanto l'epicentro cade in pieno lago), la scossa è già

ridotta al IV grado. La zona macrosismica non supera i 110-120 km. di raggio. A questa distanza, nel terremoto carnico, la scossa conservava ancora il IV grado, pur avendo avuto all'epicentro un'intensità minore.

Ciò basterebbe a dare piena ragione della differenza di profondità riscontrata nei due casi. Ma poichè le osservazioni macrosismiche risentono sempre l'incertezza delle interpretazioni personali, converrà dare maggior peso alle osservazioni microsismiche, specie se fatte con apparecchi della stessa potenzialità. A terremoti veramente consimili, per intensità e profondità di provenienza, corrispondono su uno stesso sismografo, per distanze epicentrali uguali, registrazioni pressochè uguali, o per lo meno analoghe. Questo non è invece il caso dei terremoti in esame. La scossa delle Prealpi Carniche ha dato fino a Neuchâtel (stazione più lontana di cui ho potuto avere i sismogrammi), cioè a 427 km. dall'epicentro, delle registrazioni in cui l'inizio delle varie fasi longitudinali P_n , P^* , P_g appare con un impeto netto. Il terremoto del Lago di Costanza, ha dato invece delle registrazioni che si sono rapidamente smorzate con la distanza: mi sono fatto mandare i sismogrammi di varie stazioni ed ho quindi avuto modo di confrontare. Per il terremoto studiato da Hiller, già a 135 km. l'inizio delle onde P^* appare assai debole, mentre a partire da 190 km. l'onda manca affatto od è molto incerta; per le stesse distanze, l'onda P_g , sui sismografi Wiechert di 1000 kg., inizia con una lenta insensibile emersione (Hiller la pone tra parentesi). L'onda P_n poi manca su tutti i sismogrammi: solo sulla componente verticale di Neuchâtel, a 174 km., essa dà un'impercettibile emergenza (trascurata sia dagli osservatori della stazione, sia da Hiller), mancando invece completamente sulle componenti orizzontali. Nella stessa stazione di Neuchâtel, il terremoto delle Prealpi Carniche, pur avendo avuto all'epicentro un'intensità minore, ha dato un netto iP_n ; e in questo caso l'Osservatorio in parola risultava 253 km. più lontano. Ora è noto che, a parità di altre condizioni, la profondità di un terremoto è tanto maggiore quanto più netto è l'inizio dei sismogrammi relativi.

La differenza di profondità nei due terremoti resta quindi giustificata, sia dal punto di vista macrosismico, come da quello microsismico.

La figura riproduce le registrazioni ottenute a Stoccarda; per l'estrema sottigliezza dei tracciati, non è stato possibile riprodurre i sismogrammi, ancora più significativi, ottenuti a Neuchâtel.

Circa i metodi usati, farò osservare che quello basato sui tempi di registrazione dell'onda Q è sottoposto a incertezze più di qualsiasi altro. Chi ha pratica di registrazioni relative a terremoti vicini sa che l'onda Q è di difficile individuazione. Arduo compito è distinguere dall'onda S_g . Essa compare in non molti terremoti, e chiaramente solo per piccole distanze epicentrali. Non risultò apprezzabile nel terremoto delle Prealpi Carniche; ed anche Hiller, per il terremoto da lui studiato, riuscì ad individuarla in due sole stazioni, distanti dall'epicentro soltanto 46 e 49 km. rispettivamente.

Non esiste nessuna relazione tra l'antico metodo dell'Omori e quello basato sull'angolo d'emergenza delle onde Pg (e non ha alcun valore il riferimento a profondità ipocentrali determinate con i metodi ormai superati del Dutton, o del Comas-Solà). Il metodo usato dall'Omori, in un tempo in cui le Pg neppure si conoscevano, era del tutto empirico, non tenendo conto della teoria dell'elasticità e dell'esistenza delle superficie di discontinuità nell'interno della terra. Il metodo basato sull'angolo d'emergenza delle onde Pg è già stato usato con successo, oltre che dallo scrivente, anche da altri Autori. Il Lacoste⁽¹⁾ lo applicò al terremoto di Rastatt dell'8 febbraio 1933, ottenendo un risultato in buon accordo con quello tratto per altre vie; lo stesso Hiller⁽²⁾ se ne valse recentemente, per il terremoto delle Alpi Sveve del 27 giugno 1935, ottenendo la profondità di 27 km., in accordo perfetto con la media di 28 km., risultante dai valori ottenuti con quattro metodi diversi.

Ho applicato al terremoto del Lago di Costanza il metodo dell'angolo d'emergenza delle onde Pg, che per il terremoto delle Prealpi Carniche mi aveva condotto alla profondità di 37 km. Ho chiesto perciò i sismogrammi di Zurigo, Basilea, Stoccarda e Neuchâtel, ove gli Osservatori avevano ottenuto registrazioni su tutte e tre le componenti. Ho dovuto però limitarmi ai soli dati di Neuchâtel (a Zurigo le Pg sono cadute nell'interruzione del tempo; a Basilea, per i sobbalzi delle pennine, l'onda Pg non appare completa; a Stoccarda gli spostamenti sono troppo piccoli per essere valutati).

Gli spostamenti sulle tre componenti sono stati misurati con l'ausilio di un cannocchialeto a forte ingrandimento, che consente di apprezzare il centesimo di millimetro. Tenendo conto delle costanti strumentali, gli spostamenti reali del suolo, in corrispondenza delle tre componenti, risultano, espressi in decimi di micron,

| N-S | E-W | Z |
|-------|-------|--------|
| — 1.5 | — 2.8 | + 1.1. |

L'angolo d'emergenza apparente risulta allora di $19^{\circ}42'$, a cui corrisponde un angolo d'emergenza vero (assumendo per il rapporto delle velocità delle onde longitudinali e trasversali il valore 1.69, trovato da Hiller) di $11^{\circ}.5$. A quest'angolo d'emergenza corrisponde⁽³⁾ una profondità

$$b = 14 \text{ km.}$$

(1) J. LACOSTE, *Les tremblements de terre en France en 1933*. «Annuaire de l'Institut de Physique du Globe», 1933, p. 86. Strasbourg, 1934.

(2) W. HILLER. *Das Oberschwäbische Erdbeben am 27. Juni 1935*. «Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landeskunde», 1934-1935, p. 222. Stuttgart, 1936.

(3) P. CALOI, *Calcolo delle profondità ipocentrali in funzione della distanza epicentrale e dell'angolo d'emergenza delle onde P*. «La Ricerca Scientifica», anno V, vol. II, nn. 3-4, 1934.

Quando gli spostamenti sono così piccoli, è necessaria la massima precisione nelle misure. Ad ogni modo, l'ordine di grandezza è attendibile. Dal rapporto degli spostamenti orizzontali si può trarre l'azimut dell'epicentro: esso risulta di $61^{\circ}49'$. La stessa grandezza, rispetto a Neuchâtel, per l'epicentro calcolato da Hiller, in base a note formule di trigonometria sferica, assume il valore $62^{\circ}15'$. L'accordo è entro i limiti degli errori di osservazione. L'onda considerata (a $12^{\text{h}}40^{\text{m}}00^{\text{s}}.0$, conformemente all'interpretazione di Neuchâtel) è quindi realmente un'onda longitudinale.

Il dott. Hiller, facendo uso di una formula di Gutenberg applicata alle differenze Q-Pg, registrate nelle stazioni di Ravensburg e di Zurigo, trova per la profondità ipocentrale i valori 21-22 km. e 16 km. rispettivamente. L'accordo col valore calcolato con il metodo dell'angolo d'emergenza è quindi soddisfacente: quest'ultimo metodo, caso mai, porta ad una profondità ipocentrale leggermente inferiore a quella calcolata da Hiller.

Anche il calcolo dà quindi ragione della differenza riscontrata nelle profondità ipocentrali dei terremoti delle Prealpi Carniche e del Lago di Costanza.

Accenno ancora ad una interessante constatazione fatta durante il confronto dei due terremoti in parola. Il terremoto del Lago di Costanza del 31 gennaio 1935 fu preceduto da alcune scosse premonitorie, una delle quali, avvenuta alle $10^{\text{h}}18^{\text{m}}$ (Tempo Medio Europa Centrale), fu avvertita di grado IV nella zona epicentrale e fu registrata in un raggio di circa 300 km., dando luogo nelle stazioni vicine, nonostante la lieve intensità, a inizi molto netti.

Le registrazioni di Zurigo e Neuchâtel provano che l'epicentro della scossa premonitoria è a Sud dell'epicentro della scossa principale. L'inizio netto ottenuto a Zurigo sulle tre componenti permette di determinare, con una certa sicurezza, il valore dell'angolo d'emergenza dell'onda Pg. Esso è risultato di circa 41° , a cui corrisponde, per una distanza epicentrale di circa 45 km. (leggermente inferiore a quella della scossa principale), una profondità di 30-35 km. Ad un risultato analogo si perviene facendo uso del metodo basato sulla differenza Q-Pg. A distanze così piccole, l'onda Q si trova presso il limite inferiore della sua possibilità di registrazione. Ad ogni modo, specie su l'E-W, essa appare abbastanza chiaramente $4^{\circ}.9$ dopo le Pg. Tenendo conto della sua velocità di 3.1 km./sec, per una distanza di 45 km. ca., la profondità risulta di circa 30 km.

L'ipocentro della scossa premonitoria risulterebbe quindi 10-15 km. più profondo di quello della scossa principale.

Passiamo ora ad alcune considerazioni di ordine generale.

Gli scienziati che sono all'avanguardia della sismologia moderna e dispongono di sismografi perfetti, sotto ogni punto di vista, introducono ormai nei loro bollettini la distinzione tra terremoti normali e terremoti profondi

(oltre 50 km.). I terremoti a profondità inferiore a 50 km. sono decisamente in minoranza. Nei *Seismological Reports* dell'Istituto di Ricerche sismologiche dell'Università di Tokyo, su 100 terremoti, 80 almeno risultano con profondità dai 50 ai 100 km., alcuni oltre i 100, rarissimi sotto i 30. Lo stesso dicasi per i bollettini dei Centri sismici nord-americani (Pasadena, Saint Louis, U. S. C. G. S., ecc.). Dai *Preliminary Bulletins* della Central Station of the Jesuit Seismological Association degli ultimi anni, risultano per le profondità ipocentrali, valori come questi: terremoto del 2 settembre 1933, profondità 400 km. secondo la J. S. A., 450 secondo Pasadena; terremoto del 6 settembre 1933, profondità 550 km. secondo la J. S. A., 600 secondo l'U. S. C. G. S.; terremoto del 3 gennaio 1934, profondità 300 km.; del 1º aprile 1934, 140 km.; terremoto del Guatemala del 19 marzo 1934, 100 km.; delle Isole Curili (13 giugno 1934), 95 km.; del Chile (24 giugno 1934), 100 km.; ancora del Chile (4 dicembre 1934), 200 km.; terremoto di Samoa del 1º gennaio 1935, 300 km., per non citarne che alcuni. Lo stesso Centro americano di studi sismici ha creduto di poter fissare l'ipocentro del terremoto del mar di Celebes del 29 giugno 1934 a ben 700 km. di profondità. E per un terremoto del 10 marzo 1930, avvenuto al Giappone, quattro diversi ricercatori, con quattro metodi del tutto distinti, hanno trovato per la profondità ipocentrale i seguenti valori: 620 km. (Strasbourg), 790 (International Seismological Summary), 660 (Miyamoto), 660 (Wadati).

Queste cifre eloquenti, derivate da centri sismici i quali hanno un attrezzamento teorico-pratico incomparabilmente progredito rispetto a quello di qualche diecina di anni fa, e possono usufruire dei dati di centinaia di stazioni ottimamente equipaggiate, sparse per ogni parte del mondo, affermano concordemente che si deve ritenere come fatto acquisito l'esistenza di terremoti ad ipocentro profondo. I risultati finora raggiunti non pretendono di essere definitivi: migliaia di registrazioni caratteristiche e di teorie attendibili mettono però in sicura luce il fatto; rimane il compito di una migliore approssimazione nei calcoli e di affrontare il problema delle cause.

Esaminando, in modo particolare, i terremoti dell'Europa centrale, si constata che gli ipocentri sono generalmente localizzati a profondità che variano da 30 a 50 km., cioè cadono nei pressi della prima superficie di discontinuità, la quale, per l'Europa centrale, è dai sismologi localizzata ad una profondità che varia da 40 a 50 km.

Per i terremoti molto profondi, C. Bois⁽¹⁾ ha messo recentemente in evidenza due massimi di frequenza, situati l'uno verso 120 km. e l'altro verso 320 km. di profondità. Il primo di questi livelli coincide approssimativamente con una superficie di discontinuità che Mohorovičić pone intorno

(1) C. Bois, *Sur les séismes à foyer profond*. «Comptes rendus des séances de l'Academie des Sciences», to. 203, p. 341, seance du 27 juillet 1936.

a 120 km. e Galitzin verso 106 km. La sig.ra Lehman ritiene che deve esistere un'altra superficie di discontinuità fra 250 e 350 km., senza poterne esattamente precisare la posizione; il secondo massimo di frequenza osservato verrebbe a trovarsi quindi in questa regione.

Le superficie di discontinuità costituiscono quindi zone particolarmente instabili.

La scossa premonitoria del Lago di Costanza si sarebbe verificata in prossimità della prima superficie di discontinuità dell'Europa centrale, mentre la scossa principale sarebbe avvenuta ad una profondità minore. Si direbbe che il sisma principale sia stato provocato in un punto di instabilità, prossimo alla superficie esterna, da un movimento che ha avuto la sua origine nei pressi della prima superficie di discontinuità, vera fucina di terremoti.

Si è indotti quindi ad esaminare se, come valori anormali, debbano essere considerate non le grandi, ma le piccole profondità ipocentrali. La sede normale dei sismi starebbe nelle zone profonde di discontinuità; molti dei sismi aventi focolare più prossimo alla superficie potrebbero essere tipici di zone instabili, ove gli scottimenti di origine profonda determinano terremoti del tipo che i sismologi chiamano *a relais*.

Chimica (Chimica-fisica). — *Spettri molecolari ed analisi spettroscopica.*
V. *Sulla ricerca del Gadolinio.* Nota di G. PICCARDI, presentata dal Corrisp.
L. ROLLA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica (Chimica-fisica). — *Spettri molecolari ed analisi spettroscopica.*
VI. *Sulla ricerca del Samario.* Nota di G. PICCARDI, presentata dai Corrisp.
L. ROLLA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Curve alcoolemiche provocate con somministrazione di bevande idroalcooliche attraverso sonda gastrica e duodenale.*⁽¹⁾ Nota di G. LOLLI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

È ben noto il comportamento delle curve alcoolemiche provocate con somministrazione per via orale di bevande idroalcooliche; non esistono invece osservazioni sul comportamento delle curve alcoolemiche provocate con somministrazione di bevande idroalcooliche attraverso sonda gastrica e duodenale.

Le presenti ricerche che mirano a tale studio sono state eseguite su tre soggetti sani e a digiuno. Su due soggetti, furono eseguite rispettivamente tre curve alcoolemiche: una prima, somministrando l'alcool per via orale; una seconda, introducendo l'alcool direttamente nello stomaco a mezzo di sonda; una terza, introducendo l'alcool direttamente nel duodeno, sempre a mezzo di sonda.

Nel terzo soggetto furono eseguite soltanto due curve: la prima somministrando l'alcool per via orale, la seconda introducendo l'alcool direttamente nello stomaco a mezzo di sonda.

Fu somministrato a ciascun soggetto alcool etilico a 95° in soluzione acquosa al 20 %, nella dose di cc. 0,5 per kg. di peso. Le determinazioni del tasso alcoolemico furono praticate sempre, per maggior precisione, su doppio campione di sangue, utilizzando il micrometodo di Widmark modificato. Nella seguente tabella sono riportati i risultati delle esperienze:

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia Umana di Roma e nel reparto di Patologia digestiva e dietetica degli Ospedali Riuniti di Roma.

(2) Nella seduta del 6 dicembre 1936.

TABELLA DELLE ESPERIENZE.

| n° ordine N. | Data | Nome | Condizioni della esperienza | Quantità di alcool ingressa | Tassi alcoolemici % H_2O successivi alla ingestione dell'alcool | | | | | | |
|-----------------|-----------|-------------------------|--|--------------------------------|--|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | | | | | cc. 26 in sol. al 20 % | 5' 0,04 | 15' 0,38 | 25' 0,56 | 35' 0,47 | 65' 0,29 | 80' 0,27 |
| 1 | 12-6-1935 | C. A. Peso Kg. 52 | Curva alcoolemica provo- cata con somministra- zione dell'alcool per via orale | cc. 26 in sol. al 20 % | 5' 0,04 | 15' 0,38 | 25' 0,56 | 35' 0,47 | 65' 0,29 | 80' 0,27 | — |
| 2 | 19-6-1935 | id. | Curva alcoolemica provo- cata con somministra- zione dell'alcool attrac- verso sonda gastrica | id. | 5' 0,22 | 15' 0,35 | 25' 0,56 | 35' 0,48 | 45' 0,34 | 55' 0,35 | 70' 0,31 |
| 3 | 29-6-1935 | id. | Curva alcoolemica provo- cata con somministra- zione dell'alcool attraverso sonda gastrica | id. | 5' 0,63 | 20' 0,59 | 30' 0,41 | 40' 0,41 | 50' 0,36 | 60' 0,29 | 75' 0,28 |
| 4 | 26-6-1935 | S. I. Peso Kg. 55 | Curva alcoolemica provo- cata con somministra- zione dell'alcool per via orale | cc. 27,5 in sol. al 20 % | 5' 0,23 | 15' 0,47 | 25' 0,55 | 35' 0,54 | 45' 0,48 | 60' 0,40 | 75' 0,32 |
| 5 | 30-6-1935 | id. | Curva alcoolemica provo- cata con somministra- zione dell'alcool attrac- verso sonda gastrica | id. | 5' 0,45 | 15' 0,60 | 25' 0,55 | 35' 0,46 | 45' 0,40 | 55' 0,38 | 65' 0,31 |
| 6 | 2-7-1935 | id. | Curva alcoolemica provo- cata con somministra- zione dell'alcool attrac- verso sonda gastrica | id. | 5' 0,70 | 15' 0,77 | 25' 0,79 | 35' 0,65 | 45' 0,40 | 55' 0,32 | 70' 0,33 |
| 7 | 21-6-1935 | P. N. Peso Kg. 66 | Curva alcoolemica provo- cata con somministra- zione dell'alcool per via orale | cc. 33 in sol. al 20 % | 5' 0,23 | 15' 0,39 | 25' 0,58 | 35' 0,46 | 45' 0,43 | 60' 0,40 | 75' 0,27 |
| 8 | 24-6-1935 | id. | Curva alcoolemica provo- cata con somministra- zione dell'alcool attrac- verso sonda gastrica | id. | 5' 0,75 | 15' 0,63 | 25' 0,58 | 35' 0,45 | 45' 0,56 | 55' 0,39 | 70' 0,50 |

Nel soggetto C. A. (Esp. 1, 2, 3) la curva alcoolemica provocata con somministrazione dell'alcool per via orale, non fu sostanzialmente differente dalla curva alcoolemica provocata con somministrazione di alcool attraverso sonda gastrica. In entrambe le curve infatti il tasso alcoolemico massimo fu di 0,56 % al 25° minuto. Invece nella curva provocata con somministrazione di alcool attraverso sonda duodenale, l'acme fu più alto che non nelle curve precedenti (0,63 %) e fu raggiunto solo dopo 5 minuti.

Nel soggetto S. I. (Esp. 4, 5, 6) la curva alcoolemica provocata con somministrazione di alcool attraverso sonda gastrica fu leggermente più alta e più rapidamente ascendente che non la curva provocata con somministrazione di alcool per via orale. La terza curva provocata con somministrazione di alcool attraverso sonda duodenale, fu ancor più alta di quella provocata con somministrazione di alcool attraverso sonda gastrica.

Nel soggetto P. N. (Esp. 7, 8) la curva provocata con somministrazione di alcool attraverso sonda gastrica ascese assai più rapidamente e raggiunse un acme assai più elevato che non la corrispondente curva provocata con somministrazione di alcool per via orale.

In conclusione, la somministrazione della bevanda idroalcoolica attraverso sonda gastrica ha provocato, in due casi su tre, curve alcolemiche più elevate e più rapidamente ascendenti di quelle ottenute mercè somministrazione orale; la somministrazione della bevanda idroalcoolica attraverso sonda duodenale, ha provocato, nei due casi studiati, curve alcolemiche più elevate e più rapidamente ascendenti non solo di quelle ottenute mercè somministrazione orale, ma anche di quelle con somministrazione mediante sonda gastrica.

Per l'interpretazione dei risultati conseguiti è opportuno anzitutto tener conto della velocità di assorbimento dell'alcool, che, portato direttamente a contatto delle pareti gastriche o duodenali, può forse agevolmente sorpassarle e raggiungere quindi più rapide ed elevate concentrazioni nel sangue circolante.

Non si possono trascurare inoltre le differenze nella capacità di assorbimento per l'alcool dei vari segmenti del tubo digerente. I risultati ottenuti nelle presenti ricerche, col dimostrare che la somministrazione dell'alcool attraverso sonda duodenale provoca un maggiore e più rapido passaggio dell'alcool nel sangue, potrebbero confermare i dati riferiti da Nemser, secondo i quali il potere di assorbimento per l'alcool del digiuno-ileo, che segue immediatamente il duodeno, è maggiore di quello dello stomaco.

Non è forse ingiustificato ammettere che in alcuni soggetti l'alcool introdotto nello stomaco, possa provocare un piloro-spasmo di durata variabile, come spesso si verifica per sostanze che eccitino la secrezione gastrica, con conseguente più prolungato soggiorno dell'alcool nello stomaco, il cui potere di assorbimento è minore di quello dei segmenti sottostanti del tubo digerente. Infine si potrebbe pensare anche che evitando l'ingestione orale

della bevanda idroalcoolica si eliminano quegli stimoli psichici e organolettici che determinando con meccanismi riflessi un sicuro eccitamento della funzione gastrica, provocano probabilmente un'esaltazione degli altri organi digestivi, e in particolare del fegato, che interviene nel metabolismo dell'alcool. Ed è probabile che tali stimoli siano più efficaci dello stimolo meccanico rappresentato dal sondino introdotto nello stomaco o nel duodeno.

Quindi, nella somministrazione dell'alcool per via orale, il fegato subirebbe un'eccitazione funzionale maggiore che non nella somministrazione attraverso sonda gastrica o duodenale; metabolizzerebbe o fisserebbe così più intensamente l'alcool ad esso pervenuto, provocando una meno rapida e minore concentrazione dell'accolemia.

I risultati ottenuti e le considerazioni cui essi si prestano, ci permettono di prospettare l'opportunità di adottare la somministrazione dell'alcool per sonda duodenale, in quelle ricerche e in quei casi nei quali sia conveniente evitare con certezza la possibilità di un pilorospasmo, o per lo meno raggiungere più rapidamente e più intensamente l'acme alcoolemico.

Biologia. — *Sulla presenza di una vera capsula surrenale nei Selaci⁽¹⁾.* Nota di MILENA PITOTTI presentata⁽²⁾ dal Corrisp. F. RAFFAELE.

In una serie di ricerche, intraprese per studiare le relazioni esistenti nei Selaci tra i sistemi interrenale e cromaffine e la gestazione⁽³⁾, ho avuto occasione di notare che la separazione tra i due sistemi non è così netta come si crede.

Prima di esporre queste mie osservazioni credo opportuno riportare qualche notizia sulle differenze esistenti tra le capsule surrenali dei Pesci e quelle degli altri Vertebrati...

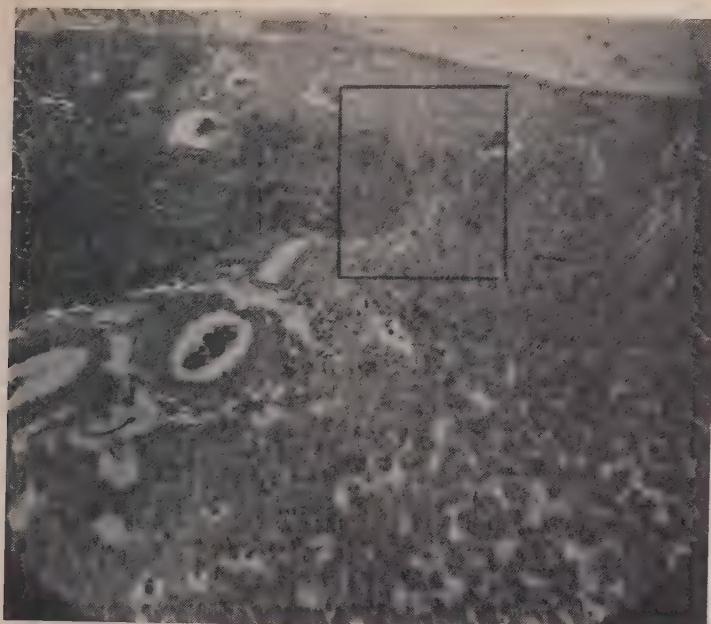
Nelle capsule surrenali dell'uomo si distingue una corteccia e una midolla. Gli elementi della corteccia sono caratterizzati da una secrezione lipida delle cellule; quelli della midolla dalla presenza nel protoplasma di granulazioni che si colorano spiccatamente in giallo bruno col bicromato di potassio. Tale proprietà ha valso a questi elementi il nome di cromaffini⁽⁴⁾. Questi due tipi di cellule sono presenti in tutta la serie dei Vertebrati; variano però i rapporti anatomici tra loro.

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Biologia e Zoologia generale della R. Università di Perugia e nella Stazione Zoologica di Napoli. Per ricerche della stessa serie vedi S. RANZI, questi «Rendiconti», ser. 6^a, vol. XXIV, p. 528, 1936.

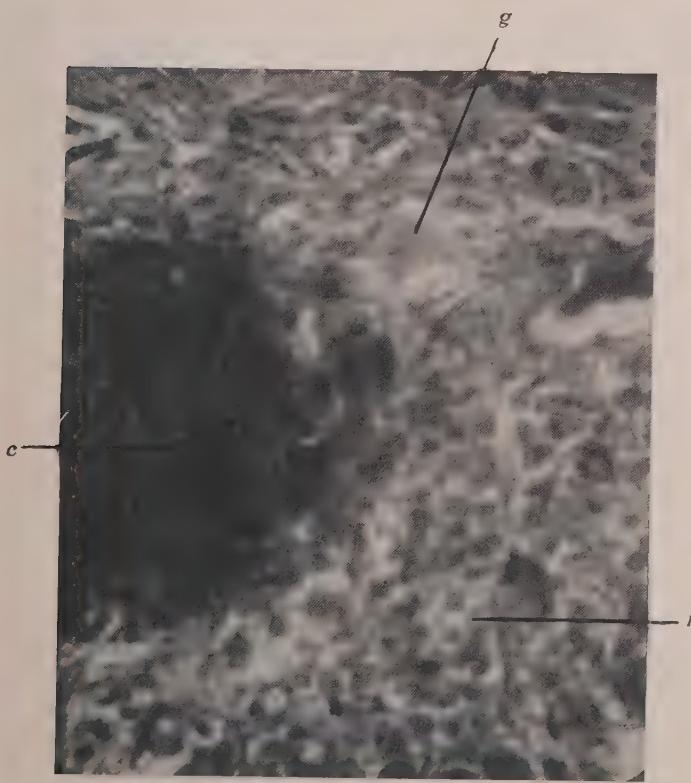
(2) Nella seduta del 6 dicembre 1936.

(3) A. KOHN, «Arch. mikr. Anat.», Bd. 53, S. 281, 1899.

(4) H. RABL, «Arch. mikr. Anat.», Bd. 38, S. 492, 1891.



A



B

Torpedo marmorata femmina alla fine della gestazione. - A. Zona di unione del tessuto corticale e del tessuto cromaffine ($\times 100$); B. Parte del preparato precedente racchiusa nel quadrolo della fig. A ($\times 550$) c tessuto cromaffine — g cellule gangliari — i tessuto interrenale o corticale.

Nell'uomo e nei Mammiferi in generale, il tessuto cromaffine si trova raggruppato all'interno dell'altro tessuto; tale relazione non si osserva nelle altre classi di Vertebrati.

Negli Uccelli gli elementi cromaffini non sono raccolti in massa all'interno di quelli corticali, ma sparsi e mescolati ad essi.

Nei Rettili tale relazione si fa meno intima; in taluni Sauri e Ofidi si ha, è vero, qualche elemento di tessuto cromaffine mescolato a quello corticale, ma la maggior parte del detto tessuto cromaffine viene a disporsi dorsalmente e perifericamente al tessuto corticale.

Negli Anfibi i due tessuti sono ancora riuniti, ma solo in minima parte, perchè la maggior parte del tessuto cromaffine si trova sparso nel corpo dell'animale lungo la parate di vasi sanguigni.

Nei Pesci si avrebbe la disgiunzione completa dei due tessuti⁽¹⁾ i quali vanno a costituire due organi ben distinti.

Nei Selaci in particolare si è convenuto chiamare *sistema interrenale o interrene* quello dei due organi che è formato da tessuto corticale, e *sistema cromaffine o surrene* quello formato da tessuto cromaffine.

Il sistema interrenale negli Squali è formato da un corpo impari allungato posto tra i due reni, visibile sulla faccia dorsale di questi; nei Batoidei è una formazione ovoidale che può anche essere pari.

Il sistema cromaffine è rappresentato da masserelle disposte lungo i reni sul decorso dei vasi sanguigni.

Come ho già detto, nelle mie ricerche ho avuto occasione di vedere numerosi interreni ed ho notato che nella *Torpedo (= Narcobatus) marmorata* Risso c'è costantemente una porzione di tessuto cromaffine la quale entra in rapporti anatomici molto intimi con l'interrene.

Uno dei noduli di tessuto cromaffine, che si trovano lungo la catena ganglionare in rapporto con le arterie parietali, si addentra nell'interrene così da non sporgere più sulla sua superficie. La capsula connettivale, che avvolge l'interrene, è ridotta in alcuni punti in maniera che il tessuto cromaffine viene direttamente a contatto con quello interrenale (fig. 1 A e B).

Tale relazione è più evidente durante la gestazione perchè il tessuto cromaffine si estende maggiormente nelle femmine gravide.

Troviamo allora cellule cromaffini direttamente a contatto coi cordoni interrenali, mentre in altre condizioni, a contatto di questi, troviamo cellule ganglionari che negli animali gravi si trovano solo di lato.

Inoltre, durante la gestazione, l'interrene aumenta considerevolmente di dimensioni e in taluni casi si estende fino ad arrivare a contatto con un'altro nodulo di tessuto cromaffine senza peraltro prendere con esso rapporti molto intimi.

(1) V. DIAMARE, « Mem. Soc. Ital. Sc. (dei XL) », ser. 3^a, vol. 10, 1896; E. GIACOMINI, « Atti R. Acc. Fisiocr. Siena », ser. 4^a, vol. 10, 1898.

Nella *Torpedo* (= *Narcobatus*) *ocellata* Rud, a quel che sembra (le mie ricerche in proposito si limitano a pochi casi), una massa di tessuto cromaffine si trova all'altezza dell'interrene e a contatto con esso, ma non presenta i rapporti che troviamo nella *T. marmorata*. In questa, infatti, il tessuto cromaffine viene in parte ad essere ricoperto dalla capsula connettivale dell'interrene, mentre nella *T. ocellata* i due tessuti conservano ciascuno il proprio rivestimento; in questo secondo caso non troviamo quindi rapporti di continuità ma soltanto di contiguità.

Da quanto ho esposto risulta che anche in alcuni Selaci esiste una vera *capsula surrenale*, intendendo per tale un organo ben delimitato composto di tessuto corticale e di tessuto midollare. È da notare però che quest'organo è unico e non pari come negli altri Vertebrati, e che ha una posizione peculiare essendo posto tra i due reni in una regione relativamente caudale.

Biologia. — *Ghiandole endocrine, maturità sessuale e gestazione nei Selaci.* Nota di S. RANZI presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. F. RAFFAELE.

È ben noto che i Selaci comprendono specie ovipare, che depongono uova, e specie vivipare i cui embrioni si sviluppano negli uteri materni senza prendere rapporti anatomici con le pareti di questi (specie oovivipare) ovvero entrando in rapporto con le pareti dell'utero mediante una placenta vitellina (specie vivipare p. d.)⁽²⁾.

In una serie di ricerche⁽³⁾, condotte anche con la collaborazione di miei Allievi (Pitotti, Carere Comes, Zizza), sto cercando di precisare i cambiamenti che la femmina dei Selaci subisce durante la gestazione. Per queste ricerche ho esaminate per ora 7 specie oovivipare: *Mustelus vulgaris* M. H., *Acanthias blainvilliei* Risso, *Centrophorus granulosus* Bl., *Scymnus lichia* Bonn., *Torpedo ocellata* Rud., *Torpedo marmorata* Risso, *Trygon violacea* Bp. e una vivipara, *Mustelus laevis* Risso.

In questo campo ben poco è noto perché tutto quanto si sapeva sui cambiamenti morfologici che le femmine dei Pesci, Anfibi, Rettili subiscono in rapporto alla gestazione si limitava a quanto è stato posto in evidenza dal Lo Bianco⁽⁴⁾ e dal Remotti⁽⁵⁾ circa la riduzione del fegato delle femmine nel corso della gravidanza.

(1) Nella seduta del 6 dicembre 1936.

(2) S. RANZI, « Naturwissen. », Bd. 24, S. 642, 1936.

(3) Ricerche eseguite nella Stazione Zoologica di Napoli e nell'Istituto di Biologia e Zoologia generale della R. Università di Perugia.

(4) S. LO BIANCO, « Mitt. zool. Stat. Neapel » Bd. 19, S. 513, 1909.

(5) E. REMOTTI, « Boll. Mus. e Lab. Zool. e Anat. comp. Genova », vol. 15, n. 85, 1935.

Ho creduto indirizzare le ricerche verso la fonte dei cambiamenti che si potevano osservare, e cioè verso le ghiandole endocrine, onde seguirne le modificazioni in rapporto alla gravidanza. Posso già ora concludere che nei tre periodi del ciclo sessuale dei Selaci gestanti sia ovovivipari, sia vivipari, (periodo che precede la maturità sessuale, periodo degli amori, periodo di gestazione) le ghiandole a secrezione interna presentano quadri istofisiologici diversi, tanto da potere, di solito, in base all'osservazione microscopica della ghiandola, stabilire lo stato sessuale dell'animale da cui fu prelevata.

Il lobo anteriore dell'ipofisi presenta diminuzione o scomparsa del secreto eosinofilo in rapporto alla maturità sessuale e alla gestazione. Inoltre, man mano che la gestazione procede, nei tubuli del lobo anteriore va depositandosi un secreto basofilo. Nel lobo intermedio si osserva, verso la fine della gestazione, un aumento della dimensione delle cellule accompagnato da un aumento della eosinofilia del citoplasma. A queste trasformazioni si associa una generale iperemia che investe specialmente il lobo anteriore e che si accentua man mano che la gestazione procede. Tutti questi cambiamenti determinano un aumento in dimensione della ipofisi nel corso della gravidanza, rilevabile quale aumento ponderale⁽¹⁾.

La tiroide presenta, nell'individuo in accrescimento, follicoli piccoli, con pareti spesse e scarsa colloide, abbondanti cordoni solidi, quadro cioè di attiva funzione (fig. 1 a). Negli individui a termine di accrescimento, con uova ovariche grandi, l'aspetto istologico della tiroide varia tra un quadro di completo riposo e un quadro di mediocre attività funzionale. Nel primo caso i follicoli appaiono molto grandi con epitelio sottile e colloide abbondante, omogenea, con scarsa vacuolizzazione (fig. 1 b). Nel secondo i follicoli appaiono rotondeggianti più piccoli, con epitelio più spesso, la colloide è scarsa, vacuolizzata (fig. 1 c). Negli individui gestanti l'aspetto istologico della tiroide varia tra l'aspetto che ho definito di mediocre attività funzionale, che si manifesta con caratteri simili a quelli che si osservano nelle femmine mature, e un aspetto di intensa attività. In questo secondo caso i follicoli appaiono piccoli, a lume, in sezione, irregolare, con scarsissima colloide, molto abbondanti sono anche i cordoni pieni, tutta la ghiandola appare iperemica (fig. 1 d). Subito dopo il parto si osservano follicoli rotondeggianti, con epitelio sottile e colloide abbondante, non vacuolizzata, quadro cioè di riposo funzionale.

L'interrene, che, come è noto, è omologo alla corteccia della surrenale dei Mammiferi, presenta cellule più grandi durante la gestazione e un aumento generale delle sue dimensioni.

Anche le surrenali (organi cromaffini), che equivalgono alla midollare

(1) S. RANZI, «Rend. R. Acc. Lincei (Cl. Sc. fis. mat. e nat.)», ser. 6^a, vol. 23, p. 365, 1936 e O. CARERE COMES, «Pubb. Staz. Zool. Napoli» vol. 14, p. 339, 1936.

delle surrenali dei Mammiferi, presentano aspetti corrispondenti ai diversi momenti del ciclo sessuale.

Volendo fare un parallelo tra le trasformazioni che, in rapporto alla gravidanza, subiscono le ghiandole a secrezione interna dei Selaci e quelle dei Mammiferi, bisogna notare: A) i cambiamenti istologici che si osservano nell'ipofisi durante la gestazione sono neidu e gruppi assai simili; B) le osservazioni sopra esposte dimostrano uno stato di ipertiroidismo nelle femmine gravide dei Selaci ed è noto che nei Mammiferi la gestazione si accompagna a ipertiroidismo; C) nei Selaci le cellule dell'interrene e l'interrene stesso aumentano in dimensione e nei Mammiferi è descritta una iperplasia gravidica della corteccia surrenale.

Sarà interessante stabilire se tutte queste trasformazioni osservate sono anche nei Selaci correlate ai corpi lutei che, anche in questi animali, si sviluppano⁽¹⁾. Certo esse, causando un cambiamento umorale, debbono produrre cambiamenti morfologici e fisiologici in rapporto alla gestazione.

I cambiamenti fisiologici portano in molte specie a un cambiamento delle reazioni ai principali stimoli ambientali, onde alcuni Selaci, in rapporto alla maturità sessuale o alla gravidanza, sono spinti a cambiare di ambiente. Così i *Trygon violacea*, che passano l'inverno in acque profonde, all'epoca degli amori salgono alla superficie e vi si trattengono per tutto il periodo della gestazione cambiando, secondo Bertolini⁽²⁾, anche regime alimentare. Similmente molti Squali migrano al momento della riproduzione e secondo Lo Bianco⁽³⁾ si porterebbero in acque basse al momento del parto.

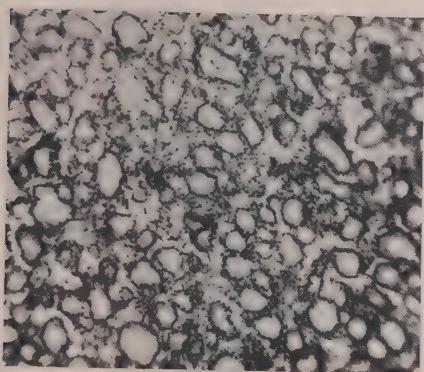
Tra i cambiamenti anatomici rientra forse la diminuzione ponderale del fegato, che ho dimostrato essere proporzionale alla richiesta di sostanza per parte dell'embrione in via di sviluppo⁽⁴⁾. Inoltre la femmina gestante presenta un *habitus* particolare, perchè molti organi presentano lievi modificazioni durante la gestazione.

(1) E. GIACOMINI, «Ric. Lab. Anat. Roma», vol. 5, p. 221, 1896.

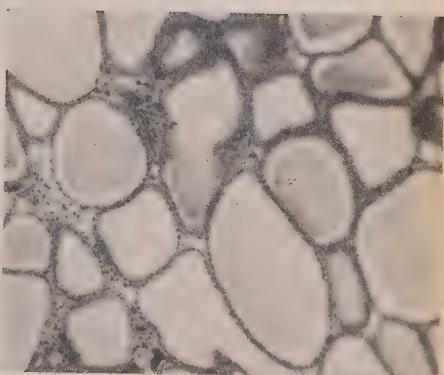
(2) F. BERTOLINI, «Rend. R. Acc. Lincei» (Cl. Sc. fis. mat. e nat.), ser. 6^a, vol. 18, p. 234, 1933.

(3) S. LO BIANCO, op. cit.

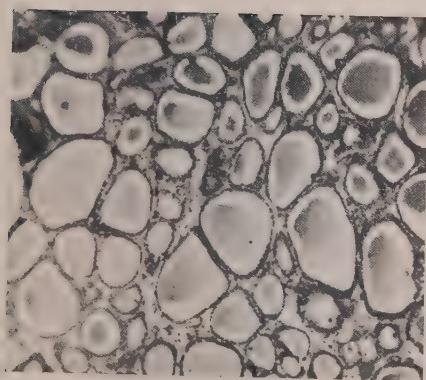
(4) S. RANZI, «Atti Pontif. Acc. Sc.», vol. 87, p. 100, 1934 e S. RANZI, e P. ZEZZA, «Pubb. Staz. Zool. Napoli», vol. 14, p. 355, 1936.



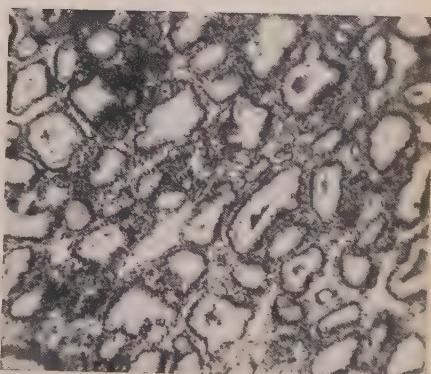
a



b



c



d

Fig. 1 - Tiroide di *Trygon violacea* a) femmina giovane; b) c) femmine con uova ovariche grandi; d) femmina gravida con embrioni di 116 g.

Tutte le fotografie sono state eseguite col medesimo sistema ottico (oc. 5 K Zeiss, obb. Zeiss apo 8 mm \times 20), su preparati eseguiti nella stessa maniera (fissazione Zenker, colorazione Prenant, spessore sezioni 10 μ), col medesimo ingrandimento (\times 145).

INDICE DEL VOLUME XXIV, SERIE VI. — RENDICONTI

Secondo Semestre 1936.

INDICE PER AUTORI

A

- ABRAMESCU N. — « Sullo studio di una superficie nell'intorno di un suo punto e una nuova interpretazione della cubica che dà le tangenti di Darboux e Segre ». 340.
AGOSTINI A. — « Studi statistici sulla variabilità del Succiaccapre ("Caprimulgus e. europaeus L.") ». 164.
AIROLDI M. — « Sull'appartenenza della "Pelagosome" ad un nuovo genere di alga calcarea ». 18.
ARRIGHI G. — « Le oscillazioni isocarene attorno le configurazioni cui competono moti di puro giro permanente ». 14.
ID. — « Sulla dinamica del corpo deformabile di massa variabile ». 264.
ID. — « Sul moto di un fluido comprensibile di massa variabile con forze derivanti da un potenziale ». 268.
ID. — « Le oscillazioni isocarene attorno le configurazioni di equilibrio generale ». Nota I. 363.
ID. — « Le oscillazioni isocarene attorno le configurazioni di equilibrio generale ». Nota II. 427.
ID. — « La meccanica dei galleggianti con moti ciclici interni ». 504.
AVONI G. — Vedi SCAGLIARINI G.

B

- BAMBACIONI-MEZZETTI V. e SUARDI A. — "Prime osservazioni sull'impor-

tanza dei cotiledoni per la neoformazione di radici su gli ipocotili di " Lupinus albus L." e "Vicia villosa Roth.". 23.

- BARBA C. — « Polinomi definiti. I. Problemi fondamentali ». 410.
ID. — « Polinomi definiti. II. Classi di polinomi definiti ottenuti da alcuni prefissati ». 415, 497.
ID. — « Polinomi definiti. III. Interpretazioni, proprietà e complementi ». 415.
BARONI A. — « Studio coi raggi elettronici della graftizzazione di alcuni nerofumi industriali ». 456.
BERNARDINI G. e BOCCIARELLI D. — « Sull'energia e l'intensità dei gruppi di neutroni emessi dal Po + Be ». Nota I. 59.
ID., ID. — « Sull'energia e l'intensità dei gruppi di neutroni emessi dal Po + Be ». Nota II. 132.
BOAGA G. — « Sulla localizzazione di un corpo sferico mediante misure eöt-vössiane ». 453.
BOCCIARELLI D. — Vedi BERNARDINI G.
BOMPIANI E. — « Gli invarianti proiettivi nella teoria delle superficie. I. Ricostruzione rapida della teoria delle applicabilità proiettive ». 323.
BONINO G. B. e MANZONI ANSIDEI R. — « Sullo spettro Raman del tiofene ». 207.
BONINO G. B. — « Sulla simmetria molecolare del tiofene ». Nota I. 288.
ID. — « Sulla simmetria molecolare del tiofene ». Nota II. 374.

BYTINSKI-SALZ H. — « Lo sviluppo della coda negli Anfibi. I. Esperimenti di isolamento e di difetto ». 34.

ID. — « Lo sviluppo della coda negli Anfibi. II. Alterazioni delle correlazioni fra i territori costituenti l'abbozzo codale e comportamento dell'ectoderma della pinna caudale ». 82.

C

CACCIOPPOLI R. — « Sulle corrispondenze funzionali inverse diramate: teoria generale e applicazioni ad alcune equazioni funzionali non lineari e al problema di Plateau ». Nota I. 258.

ID. — « Sulle corrispondenze funzionali inverse diramate: teoria generale e applicazioni ad alcune equazioni funzionali non lineari e al problema di Plateau ». Nota II. 416.

CALDONAZZO B. — « Effetti di zavorra dovuti ad una coppia di sorgenti ». 10.

CALOI P. — « Sulle profondità ipocentrali, con particolare riguardo ai terremoti delle Prealpi Carniche (8 giugno 1934) e del lago di Costanza (31 gennaio 1935) ». 516.

CAPPELLETTO A. — « Sullo sviluppo embrionale nell'aria rarefatta. I. L'accrescimento dei girini » 306.

CASALAINA G. — « Un eleocloroplasto a secrezione Ciaccio-positiva ». 160.

CASSINA U. — « Su una nuova costruzione grafica del piano osculatore ». 50.

CASTELNUOVO E. — « Di una classe di superficie razionali che ammettono ∞^2 trasformazioni proiettive in sè ». 263, 342.

CENTOLA G. — « Ricerche sul processo di stabilizzazione della nitrocellulosa ». 147.

CESARI L. e CONFORTO F. — « Sulla equazione dei tre momenti per una trave continua inflessa e sollecitata assialmente, con flessiorigidezza variabile linearmente lungo ogni campata ». Nota I. 273.

ID., ID. — « Sulla equazione dei tre momenti per una trave continua in-

flessa e sollecitata assialmente, con flessiorigidezza variabile linearmente lungo ogni campata ». Nota II. 354.

CHARRIER G. e GHIGI E. — « Demolizione ossidativa del 4-fenil-1, 9-benzantron-(10) con soluzione acetica ed anidride cromica ». 65.

ID., ID. — « Demolizione ossidativa del 4-fenil-1, 9-benzantron-(10) con soluzione alcalina di permanganato potassico ». 72.

CISOTTI U. — « Sul comportamento al contorno di notevoli integrali analitici ». 175.

CONFORTO F. — Vedi CESARI L.

CORBINO O. M. — « Un metodo di taratura del microfono elettrostatico fondato sul suo comportamento rispetto a una forza elettromotrice alternata ». 405.

CROCCO G. A. — « Sulla "certezza statistica" di colpire nel duello aeronaiale ». 404.

D

DE FRANCHIS M. — « Dimostrazione del teorema fondamentale sulle superficie iperellittiche ». 3.

DRAGONE-TESTI G. — « Germinazione di embrioni di "Mais" staccati dalla cariosside e privati dello scudetto in presenza di poliosi contenenti fruttofuranosio ». 31.

E

ERDÉLYI A. — « Sulla generalizzazione di una formula di Tricomi ». 263, 347.

F

FAMIANI V. — « Il contenuto in vitamina B¹ del grano studiato in confronto col campione internazionale per la vitamina medesima ». 88.

FENOGLIO M. — « Ricerche sui carbonati naturali neutri e basici di magnesio idrati ». 219.

G

GHIGI E. — « Demolizione dell'isodiben-zantrone (isoviolantrone) per ossi-dazione con soluzione alcalina di permanganato potassico ». 78.

ID. — Vedi CHARRIER G.

GOIDÀNICH G. — « Sulle cause della cosiddetta "defogliazione primave-riale" del pioppo in alta Italia ». 27.

GUGINO E. — « Sulle traiettorie dei pro-blemi variazionali ». 124.

ID. — « Sul problema varazionale che ammette prefissate traiettorie ». 431.

I

IANDELLI A. e BOTTI E. — « Sulla struttura cristallina dei composti delle terre rare con i metalloidi del V Gruppo. Fosfuri di Lantanio, Cerio e Praseodimio ». 459.

J

JABLONSKI W. — « Sopravvivenza e mi-tosi di cellule epiteliali libere *in vitro* ». 479.

JACOB C. — « Sulla biforcazione di una vena liquida dovuta a un ostacolo circolare ». 439.

JUCCI C. — « L'allevamento del "Re-ticulitermes lucifugus" in tubi da saggio ». 302.

K

KOCH C., SCHREIBER B. e SCHREIBER G. — « Tentativi d'impianti di tessuti nel vitreo dell'occhio di cavia ». 231.

L

LABOCSETTA L. — « Una forma più ge-nrale della terza legge di Keplero ». 277, 358.

LENTI C. — « Pressione osmotica dei colloidi dell'umor vitreo ». 223.

ID. — « Modificazioni del ricambio basale in alta montagna ». 311.

LEVI E. — « Proprietà caratteristiche della trasformazione di Laplace ». 422.

LOLLI G. — « Funzione tiroidea e alcoole-mia provocata ». 482.

ID. — « Curve alcoolemiche provocate con somministrazione di bevande idroalcoliche attraverso sonda ga-strica e duodenale ». 523.

M

MAGGI G. A. — « Notevole complemento delle condizioni del Love e sue appli-cazioni ». 246.

MAGGINI M. — « Tentativi di fotometria foto-elettrica delle superficie pla-netarie ». 278.

MANZONI ANSIDEI R. — « Spettro Raman di idrocarburi aromatici a nuclei condensati. — I. Antracene e fenan-trene e loro simmetria molecolare ». 368.

ID. — Vedi BONINO G. B.

MARLETTA G. — « Una proprietà del 2° spigolo di Green ». 6.

MINELLI C. — « Trave continua inflessa e sollecitata assialmente, con flessio-rigidezza variabile linearmente lungo ogni campata ». 115.

MINZ S. e SERIANNI E. — « L'azione dell'adrenalinina e dell'atropina sull'al-coolemia provocata ». 235.

MONTI L. — « Sull'azione ossidante del biossido di selenio ». Nota II. 145.

MORIN U. — « Sull'insieme degli spazi lineari contenuti in una ipersuperficie algebrica ». 188.

ID. — « Sulla unirazionalità delle iper-superficie algebriche del quarto or-dine ». 191.

N

NATTA G. e PASSERINI L. — « Sul dimor-fismo del fosforo bianco ». 464.

NATTA G. e RIGAMONTI R. — « Esame coi raggi di elettroni di alcuni poli-meri vinilici ». 381.

NEGODI G. — « Ulteriore contributo alla cariologia del genere "Fumaria" ». 477.

O

ORRÙ A. — « Sulle relazioni osmotiche tra il tuorlo e l'albumine nell'uovo di gallina ». 313.

ID. — « Comportamento della conduttività elettrica del siero di sangue in funzione della temperatura ». 313.

P

PALOZZI G. — « Sulla Geometria proiettivo-differenziale di nuovi reticolati dello spazio ordinario ». 53.

PASSERINI L. — Vedi NATTA G.

PAUC CHR. — « Courbure dans les espaces métriques ». 109.

PERRI T. — « Processi correlativi di determinazione e di accrescimento dell'abbozzo lentogeno negli Anfibi. III. Esperienze su "Bufo viridis", "Bufo vulgaris", "Rana agilis", "Rana esculenta" ». 167.

PICCARDI G. — « Sulla presenza dell'idrogeno molecolare nelle macchie del Sole ». Nota I. 212.

ID. — « Sulla presenza dell'idrogeno molecolare nelle macchie del Sole ». Nota II. 286.

ID. — « Spettri molecolari ed analisi spettroscopica. — V. Sulla ricerca del Gadolinio ». 522.

ID. — « Spettri molecolari ed analisi spettroscopica. — VI. Sulla ricerca del Samario ». 522.

PLATANIA E. — « Sulla natura della peritrofica di "Reticulitermes lucifugus (Rossi)" ». 41.

PITOTTI M. — « Sulla presenza di una vera capsula surrenale nei Selaci ». 487, 526.

R

RANZI S. — « Ghiandole endocrine, maturità sessuale e gestazione nei Selaci ». 487, 528.

REVERBERI G. — « Segmentazione "totale" nei frammenti dell'uovo fecondato delle Ascidie ». 299.

RIGAMONTI R. — Vedi NATTA G.

RODOLICO F. — « Sulle forme granulari delle rocce melilitiche ». 471.

ROTH L. — « Sulle varietà semi-razionali a tre dimensioni ». 351.

ROVERETO G. — « L'analisi panoramica nella descrizione geomorfologica della Liguria ». 45.

RUSSO A. — « Incremento del condrioma ed attivazione del metabolismo ». 107.

S

SALVATORI A. — « Sul contenuto in Cloro del ratto albino in rapporto all'età ». 93.

SANZO L. — « Allevamento di una larva pelagica di "Cerianthus" fino all'acquisto di caratteri definitivi. Nota preliminare ». 227.

SAVELLI R. — « Appunti su talune manifestazioni del potere riduttore dei tessuti vegetali ». 151.

ID. — « Sviluppo e adattamento di alcuni plastidi ». 156.

SCAGLIARINI G. e AVONI G. — « Sulla reazione cromatica fra nitroprussiato e glutathione ». 215.

SCAGLIARINI G. — « Azione del nitroprussiato sui pirroli ». 294.

SEGRE B. — « Invarianti topologici relativi ai punti uniti delle trasformazioni regolari fra varietà sovrapposte ». 195.

ID. — « Un complemento al principio di corrispondenza, per le corrispondenze a valenza zero sulle curve algebriche ». Nota I. 201.

ID. — « Complemento al principio di corrispondenza, per le corrispondenze a valenza con punti uniti di molteplicità qualsiasi ». Nota II. 250.

SEGRÈ E. — « Sul settore di velocità dei neutroni lenti ». 282.

SERIANNI E. — « L'azione della morfina sulla curva alcoolemica provocata nell'uomo normale ». 485.

ID. — Vedi MINZ S.

- SEVERI F. — « Complementi alla teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche ». Nota I. 493.
ID. — « Complementi alla teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche ». Nota II. 497.
SOLER E. — « Lavori geofisici eseguiti dall'Istituto di Geodesia della R. Università di Padova nella regione vesuviana nel 1934-35 ». 99.
SONA L. — « Corrente traslocircolatoria in presenza di un ostacolo costituito da due lamine incrociate ». 447.
ID. — « Azioni dinamiche di una corrente traslocircolatoria che investe un ostacolo costituito da due lamine incrociate ». 508.
SUARDI A. — Vedi BOMBACIONI-MEZZETTI V.

T

- TEDESCHI G. — « Sulle cause dello sviluppo di ossigeno dagli accumulatori a piombo in riposo ». 139.
TONELLI L. — « Sulle equazioni delle estremanti nei problemi di Mayer ». 180.
ID. — « Sulle equazioni delle estremanti nei problemi di Lagrange ». 239.
ID. — « Sul problema di Plateau ». Nota I. 333.
ID. — « Sul problema di Plateau ». Nota II. 339, 393.
ID. — « Su la semicontinuità nei problemi di Mayer e di Lagrange ». 399.
TRIA E. — « Relazione tra temperatura e attività del fermento glicogenolitico del fegato degli animali pecilotermi ». 389.
-

INDICE PER MATERIE

A

Astronomia. — « Tentativi di fotometria fotoelettrica delle superficie planetarie ». MAGGINI M. 278.

B

Biologia. — « Sullo sviluppo embrionale nell'aria rarefatta. I. L'accrescimento dei girini ». CAPPELLETTA A. 306.

- « Sopravvivenza e mitosi di cellule epiteliali libere *in vitro* ». JABLONSKI W. 479..
- « Tentativi d'impianti di tessuti nel vitreo dell'occhio di cavia ». KOCH C., SCHREIBER B. e SCHREIBER G. 231.
- « Pressione osmotica dei colloidi dell'umor vitreo ». LENTI C. 223.
- « Processi correlativi di determinazione e di accrescimento dell'abbozzo lento-geno negli Anfibi. — III. Esperienze su "Bufo viridis", "Bufo vulgaris", "Rana agilis", "Rana esculenta" ». PERRI T. 167.

— « Sulla presenza di una vera capsula surrenale nei Selaci ». PITOTTI M. 487, 526.

— « Ghiandole endocrine, maturità sessuale e gestazione nei Selaci ». RANZI S. 487, 528.

— « Incremento del condrioma ed attivazione del metabolismo ». RUSSO A. 107.

— « Allevamento di una larva pelagica di "Cerianthus" fino all'acquisto di caratteri definitivi ». Nota preliminare. SANZO L. 227.

Botanica. — « Sull'appartenenza della "Pelagosite" ad un nuovo genere di alga calcarea ». AIROLDI M. 18.

Botanica. — « Prime osservazioni sull'importanza dei cotiledoni per la neoformazione di radici sugli ipocotili di "Lupinus albus L." e "Vicia villosa Roth." ». BAMBACIONI-MEZZETTI V. e SUARDI A. 23.

- « Germinazione di embrioni di "Mais" staccati dalla cariosside e privati dello scudetto in presenza di poliosi contenenti frutto-furanosio ». DRAGONE-TESTI G. 31.
- « Sulle cause della cosiddetta "defogliazione primaverile" del pioppo in alta Italia ». GOIDÀNICH G. 27.
- « Ulteriore contributo alla cariologia del genere "Fumaria" ». NEGODI G. 477.

C

Chimica. — « Studio coi raggi elettronici della grafittizzazione di alcuni nerofumi industriali ». BARONI A. 456.

- « Sullo spettro Raman del tiofene ». BONINO G. B. e MANZONI-ANSIDEI R. 207.
- « Ricerche sul processo di stabilizzazione della nitrocellulosa ». CENTOLA G. 147.
- « Demolizione ossidativa del 4-fenil-1, 9-benzantrone-(10) con soluzione acetica ed anidride cromica ». CHARRIER G. e GHIGI E. 65.
- « Demolizione ossidativa del 4-fenil-1, 9-benzantrone-(10) con soluzione alcalina di permanganato potassico » ID. 72.
- « Demolizione dell'isodibenzantrone (isoviolantrone) per ossidazione con soluzione alcalina di permanganato potassico ». GHIGI E. 78.

Chimica. — « Sulla struttura cristallina dei composti delle terre rare con i metalloidi del V Gruppo. Fosfuri di Lantanio, Cerio e Praseodimio ». IANDELLI A. e BOTTI E. 459.

— « Spettro Raman di idrocarburi aromatici a nuclei condensati. — I. Antracene e fenantrene e loro simmetria molecolare ». MANZONI ANSIDEI R. 368.

— « Sull'azione ossidante del biossido di selenio ». Nota II. MONTI L. 145.

— « Sul dimorfismo del fosforo bianco ». NATTA G. e PASSERINI L. 388, 464.

— « Esame coi raggi di elettroni di alcuni polimeri vinilici ». NATTA G. e RIGAMONTI R. 381.

— « Azione del nitroprussiato sui pirroli ». SCAGLIARINI G. 294.

— « Sulla reazione cromatica fra nitroprussiato e glutathione ». SCAGLIARINI G. e AVONI G. 215.

— « Relazione tra temperatura e attività del fermento glicogenolitico del fegato degli animali pecilotermi ». TRIA E. 389.

Chimica-fisica. — « Sulla simmetria molecolare del tiofene ». Nota I. BONINO G. B. 288.

— « Sulla simmetria molecolare del tiofene ». Nota II. ID. 374.

— « Sulla presenza dell'idrogeno molecolare nelle macchie del Sole ». Nota I. PICCARDI G. 212.

— « Sulla presenza dell'idrogeno molecolare nelle macchie del Sole ». Nota II. ID. 286.

— « Spettri molecolari ed analisi spettroscopica. — V. Sulla ricerca del Gadolinio ». ID. 522.

— « Spettri molecolari ed analisi spettroscopica. — VI. Sulla ricerca del Samario ». ID. 522.

— « Sulle cause dello sviluppo di ossigeno dagli accumulatori a piombo in riposo ». TEDESCHI G. 139.

Citologia vegetale. — « Un eleocloroplasto a secrezione Ciaccio-positiva ». CASALAINA G. 160.

— « Sviluppo e adattamento di alcuni plastidi ». SAVELLI R. 156.

E

Embriologia sperimentale. — « Sperimentazione "totale" nei frammenti dell'uovo fecondato delle Ascidi ». REVERBERI G. 299.

F

Fisica: — « Sull'energia e l'intensità dei gruppi di neutroni emessi dal Po + Be ». Nota I. BERNARDINI G. e BOCCARELLI D. 59.

— « Sull'energia e l'intensità dei gruppi di neutroni emessi dal Po + Be ». Nota II. ID. 132.

— « Un metodo di taratura del microfono elettrostatico fondato sul suo comportamento rispetto a una forza elettromotrice alternata ». CORBINO O. M. 405.

— « Sul selettorre di velocità dei neutroni lenti ». SEGRÈ E. 282.

Fisiologia. — « Il contenuto in vitamina B₁ del grano studiato in confronto col campione internazionale per la vitamina medesima ». FAMIANI V. 88.

— « Modificazioni del ricambio basale in alta montagna ». LENTI C. 311.

— « Funzione tiroidea e alcoolemia provocata ». LOLLI G. 482.

— « Curve alcolemiche provocate con somministrazione di bevande idroalcoliche attraverso sonda gastrica e duodenale ». ID. 523.

— « L'azione dell'adrenalina e dell'atropina sull'alcoolemia provocata ». MINZ S. e SERIANNI E. 235.

— « Sulle relazioni osmotiche tra il tuorlo e l'albume nell'uovo di gallina ». ORRÙ A. 313.

— « Comportamento della conduttività elettrica del siero di sangue in funzione della temperatura ». ID. 313.

— « Sul contenuto in Cloro del ratto albino in rapporto all'età ». SALVATORI A. 93.

— « L'azione della morfina sulla curva alcoolemica provocata nell'uomo normale ». SERIANNI E. 485.

Fisiologia vegetale. — « Appunti su talune manifestazioni del potere riduttore dei tessuti vegetali ». SAVELLI R. 151.

G

Geodesia. — « Sulla localizzazione di un corpo sferico mediante misure eöt-vössiane ». BOAGA G. 453.

Geofisica. — « Sulle profondità ipocentrali, con particolare riguardo ai terremoti delle Prealpi Carniche (8 giugno 1934) e del lago di Costanza (31 gennaio 1935) ». CALOI P. 516.

— « Lavori geofisici eseguiti dall'Istituto di Geodesia della R. Università di Padova nella regione vesuviana nel 1934-35 ». SOLER E. 99.

Geologia. — « L'analisi panoramica nella descrizione geomorfologica della Liguria ». ROVERETO G. 45.

Litologia. — « Sulle forme granulari delle rocce melilitiche ». RODOLICO F. 471.

M

Matematica. — « Sullo studio di una superficie nell'intorno di un suo punto e una nuova interpretazione della cubica che dà le tangenti di Darboux e Segre ». ABRAMESCU N. 340.

— « Polinomi definiti. — I. Problemi fondamentali ». BARBA C. 410.

— « Polinomi definiti. — II. Classi di polinomi definiti ottenuti da alcuni prefissati ». ID. 415, 497.

— « Polinomi definiti. — III. Interpretazioni, proprietà e complementi ». ID. 415.

— « Gli invarianti proiettivi nella teoria delle superficie. — I. Ricostruzione rapida della teoria delle applicabilità proiettive ». BOMPIANI E. 323.

— « Sulle corrispondenze funzionali inverse diramate: teoria generale e applicazioni ad alcune equazioni funzionali non lineari e al problema di Plateau ». Nota I. CACCIOPPOLI R. 258.

— « Sulle corrispondenze funzionali inverse diramate: teoria generale e ap-

plicazioni ad alcune equazioni funzionali non lineari e al problema di Plateau ». Nota II. ID. 416.

Matematica. — « Su una nuova costruzione grafica del piano osculatore ». CASSINA U. 50.

— « Di una classe di superficie razionali che ammettono ∞^2 trasformazioni proiettive in sè ». CASTELNUOVO E. 263, 342.

— « Sul comportamento al contorno di notevoli integrali analitici ». CISOTTI U. 175.

— « Dimostrazione del teorema fondamentale sulle superficie iperellittiche ». DE FRANCHIS M. 3.

— « Sulla generalizzazione di una formula di Tricomi ». ERDÉLYI A. 263, 347.

— « Proprietà caratteristiche della trasformazione di Laplace ». LEVI E. 422.

— « Una proprietà del 2° spigolo di Green ». MARLETTA G. 6.

— « Sull'insieme degli spazi lineari contenuti in una ipersuperficie algebrica ». MORIN U. 188.

— « Sulla unirazionalità delle ipersuperficie algebriche del quarto ordine ». ID. 191.

— « Sulla Geometria proiettivo-differenziale di nuovi reticolati dello spazio ordinario ». PALOZZI G. 53.

— « Courbure dans les espaces métriques ». PAUC CHR. 109.

— « Sulle varietà semi-razionali a tre dimensioni ». ROTH L. 351.

— « Invarianti topologici relativi ai punti uniti delle trasformazioni regolari fra varietà sovrapposte ». SEGRE B. 195.

— « Un complemento al principio di corrispondenza, per le corrispondenze a valenza zero sulle curve algebriche ». Nota I. ID. 201.

— « Complemento al principio di corrispondenza, per le corrispondenze a valenza con punti uniti di molteplicità qualsiasi ». Nota II. ID. 250.

— « Complementi alla teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche ». Nota I. SEVERI F. 493.

Matematica. — « Complementi alla teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche ». Nota II. ID. 497.

— « Sulle equazioni delle estremanti nei problemi di Mayer ». TONELLI L. 180.

— « Sulle equazioni delle estremanti nei problemi di Lagrange ». ID. 239.

— « Sul problema di Plateau ». Nota I. ID. 333.

— « Sul problema di Plateau ». Nota II. ID. 339, 393.

— « Su la semicontinuità nei problemi di Mayer e di Lagrange ». ID. 399.

Meccanica. — Le oscillazioni isocarene attorno le configurazioni cui competono moti di puro giro permanente ». ARRIGHI G. 14.

— « Sulla dinamica del corpo deformabile di massa variabile ». ID. 264.

— « Sul moto di un fluido compressibile di massa variabile con forze derivanti da un potenziale ». ID. 268.

— « Le oscillazioni isocarene attorno le configurazioni di equilibrio generale ». ID. 363.

— « Le oscillazioni isocarene attorno le configurazioni di equilibrio generale ». Nota II. ID. 427.

— « La meccanica dei galleggianti con moti ciclici interni ». ID. 504.

— « Effetti di zavorra dovuti ad una coppia di sorgenti ». CALDONAZZO B. IO.

— « Sulla equazione dei tre momenti per una trave continua inflessa e sollecitata assialmente, con flessiorigidità variabile linearmente lungo ogni campana ». Nota I. CESARI L. e CONFORTO F. 273.

— « Sulla equazione dei tre momenti per una trave continua inflessa e sollecitata assialmente, con flessiorigidità variabile linearmente lungo ogni campana ». Nota II. ID. 354.

— « Sulla "certezza statistica" di colpire nel duello aeronavale ». CROCCO G. A. 404.

— « Sulle traiettorie dei problemi variazionali ». GUGINO E. 124.

Meccanica. — « Sul problema variazionale che ammette prefissate traiettorie ». ID. 431.

— « Sulla biforcazione di una vena liquida dovuta a un ostacolo circolare ». JACOB C. 439.

— « Una forma più generale della terza legge di Keplero ». LABOCETTA L. 277, 358.

— « Notevole complemento delle condizioni del Love e sue applicazioni ». MAGGI G. A. 246.

— « Trave continua inflessa e sollecitata assialmente, con flessiorigidità variabile linearmente lungo ogni campana ». MINELLI C. 115.

— « Corrente traslocircolatoria in presenza di un ostacolo costituito da due lame incrociate ». SONA L. 447.

— « Azioni dinamiche di una corrente traslocircolatoria che investe un ostacolo costituito da due lame incrociate ». ID. 508.

Mineralogia. — « Ricerche sui carbonati naturali neutri e basici di magnesio idrati ». FENOGLIO M. 219.

O

Opere pervenute in dono all'Accademia. — 317, 491.

P

Personale accademico. — 315, 488.

Presentazione di libri. — 315, 489.

Presentazione di Note e Memorie.

— 315, 489.

Presentazione di plachi suggellati.

— 489.

R

Relazioni di commissioni. — 315.

Relazioni su temi dati. — 488.

Z

Zoologia. — « Studi statistici sulla variabilità del Succiacapre (« *Caprimulgus e. europaeus L.* »). AGOSTINI A. 164.

- « Lo sviluppo della coda negli Anfibi. I. Esperimenti di isolamento e di difetto ». BYTINSKI-SALZ H. 34.
— « Lo sviluppo della coda negli Anfibi.

II. Alterazioni delle correlazioni fra i territori costituenti l'abbozzo codale e comportamento dell'ectoderma della pinna caudale ». ID. 82.

Zoologia. — « L'allevamento del « *Reticulitermes lucifugus* » in tubi da saggio ». JUCCI C. 302.

- « Sulla natura della peritrofica di « *Reticulitermes lucifugus (Rossi)* » ». PLATANIA E. 41.

ERRATA-CORRIGE AL VOLUME XXIV

Nella Nota di MASSIMO FENOGLIO:

A p. 221 ultimo rigo invece di:

$$a:b:c = 0,0379:1:0,9298$$

leggasi:

$$a:b:c = 1,0379:1:0,9298$$
